DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

Teste 1 de Cálculo Diferencial e Integral III

Cursos: LIEC–A

Versão B

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ____________ Sala: ____________

1. Consider o problema de valor inicial

$$yx^2\frac{dy}{dx} = 1. \tag{1}$$

(a) (2½ val.) Determine a solução geral da equação (1).

Solução:

A equação é separável e temos

$$y = \pm\sqrt{A - 2/x}.$$

(b) (2½ val.) Determine a solução de (1) que satisfaz $y(1) = -2$ indicando o intervalo da solução e se explode.

Solução:

Aplicando a condição inicial obtems

$$y = -\sqrt{6 - 2/x}, \quad \frac{1}{3} < x,$$

e a solução não explode.

2. Considere a equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = (x+1)^2, \quad 0 < x. \tag{2}$$

(a) (2½ val.) Determine um fator integrante de (2).

Solução:

A função $\mu(x) = x^{-1}$ é um fator integrante.

(b) (2½ val.) Determine a solução de (2) que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$.

Solução:

Usando o fator integrante e a condição inicial obtems

$$y = \frac{x^3}{2} + 2x^2 - \frac{5}{2}x + x\log x.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) ($2\frac{1}{2}$ val.) Determine a solução geral de

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Solução:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

(b) ($2\frac{1}{2}$ val.) Determine a solução geral da equação não homogénea $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{v} + t\mathbf{e}_3\right), \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

4. Considere a equação diferencial

$$y(1+x)^2 + f(x)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

(a) ($2^1/_2$ val.) Determine todas as funções $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definidas em $\mathbb{R}$ tais que (3) é exata.

Solução:

As funções $y(1+x)^2$ e $f(x)$ são de classe $\mathcal{C}^1$ no plano $\mathbb{R}^2$. Logo a equação é exata se e só se

$$(1+x)^2 = f'(x).$$

Portanto $f(x) = A + (1+x)^3/3$.

(b) ($2^1/_2$ val.) Para cada função f determinada na alínea anterior resolva o problema do valor inicial $y(x_0) = y_0 \neq 0$, com $f(x_0) \neq 0$, tão explicitamente quanto possível.

Solução:

Para $f(x) = A + (1+x)^3/3$ e $y(x_0) = y_0$ temos a solução implícita

$$y\left(\frac{(1+x)^3}{3} + A\right) = y_0\left(\frac{(1+x_0)^3}{3} + A\right)$$

e

$$y(x) = y_0\frac{(1+x_0)^3 + 3A}{(1+x)^3 + 3A}.$$