DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:____________

Teste 1 de Cálculo Diferencial e Integral III

Cursos: LIEC–A

Versão C

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total	20 val.	

Nome: ______________________________

Nº: ______________ Sala: ______________

1. Consider o problema de valor inicial

$$2y\frac{dy}{dx} = x(1+y^2). \tag{1}$$

(a) ($2^1\!/_2$ val.) Determine a solução geral da equação (1).

Solução:

A equação é separável. Temos

$1 + y^2 = Ae^{x^2/2}, A > 0,$

e portanto $y = \pm\sqrt{Ae^{x^2/2} - 1}$.

(b) ($2^1\!/_2$ val.) Determine a solução de (1) que satisfaz $y(0) = 1$ indicando o intervalo da solução e se explode nesse intervalo.

Solução:

A solução é $y = \sqrt{2e^{x^2/2} - 1}$. Como $x^2 \geq 0$, segue que $2e^{x^2/2} > 2$. Logo o intervalo da solução é $\mathbb{R}$.

2. Considere a equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2}$$

(a) ($2^1\!/_2$ val.) Determine um fator integrante da equação (2).

Solução:

Um fator integrante é $\mu(x) = 1 + x^2$.

(b) ($2^1\!/_2$ val.) Determine a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial $y(0) = -1$.

Solução:

A solução é $y = \dfrac{x-1}{1+x^2}$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) ($2^1/_2$ val.) Determine a solução geral de

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Solução:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) ($2^1/_2$ val.) Determine a solução da equação não homogénea $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Considere a equação diferencial

$$t(t^2+y)+tf(t)\frac{dy}{dt}=0. \tag{3}$$

(a) (2½ val.) Determine a única função $f(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}$ tal que equação (3) é exata.

Solução:

O domínio das funções $t(t^2+y)$ e $tf(t)$ é $\mathbb{R}^2$. Portanto a equação é exata se e só se

$$t=\frac{d}{dt}\big(tf(t)\big).$$

Logo $tf(t)=A+t^2/2$. Para ter uma função $f(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definida em $\mathbb{R}$, temos $A=0$ e $f(t)=t/2$.

(b) (2½ val.) Para a função determinada na alínea anterior resolva o PVI $y(1)=1$.

Solução:

$$y=\frac{3-t^4}{2t^2}$$