DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Registo:___________

Teste 1 de Cálculo Diferencial e Integral III

Cursos: LIEC–A

Versão A

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- **Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.**
- Duração do teste é 45 minutos.

Lembre-se de que seu trabalho é classificado com base na qualidade de sua escrita e explicação, bem como na validade da matemática.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total	20 val.	

Nome: ____

Nº: ______________ Sala: ______________

1. Consider o problema de valor inicial

$$2xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2. \tag{1}$$

(a) (2½ val.) Determine a solução geral da equação (1).

Solução:

Como $y' = (1-y^2)/(2xy)$, temos soluções cosntantes $y = \pm 1$. Para $y^2 \neq 1$ e $x \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{2y}{1-y^2}y' &= \frac{1}{x} \\ y^2 &= 1 - \frac{K}{x} \\ y &= \pm\sqrt{1 - K/x}. \end{aligned}$$

(b) (2½ val.) Determine a solução de (1) que satisfaz $y(1) = 2$ indicando o intervalo da solução e se explode.

Solução:

A solução é $y = \sqrt{1 + 3/x}$ com $0 < x < +\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty$.

2. Considere a equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^3}, \quad 0 < x. \tag{2}$$

(a) ($2\frac{1}{2}$ val.) Determine um fator integrante de (2).

Solução:

A função $\mu(x) = x^3$ é um fator integrante.

(b) ($2\frac{1}{2}$ val.) Determine a solução de (2) que satisfaz a condição inicial $y(\pi) = 0$.

Solução:

Usando o factor integrante x^3 obtemos

$$\left(x^3 y\right)' = \operatorname{sen} x.$$

Logo $y = -\dfrac{1+\cos x}{x^3}$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) ($2^1/_2$ val.) Determine a solução geral de

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

Solução:

Os valores próprios da matriz A são -3 e -1. O vetor $\mathbf{e}_1$ é um vetor próprio associado ao valor -3 e os vetores $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ são vetores próprios associados ao valor -1. Logo a solução geral é da forma

$$\mathbf{x}(t) = ae^{-3t}\mathbf{e_1} + be^{-t}\mathbf{e}_2 + ce^{-t}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3).$$

(b) ($2^1/_2$ val.) Determine a solução geral da equação não homogénea $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

É facil de ver que a função constante $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ é uma solução da equação não homogénea. Portanto, a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = ae^{-3t}\mathbf{e_1} + be^{-t}\mathbf{e}_2 + ce^{-t}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

4. Considere a equação diferencial

$$y^2 \operatorname{sen}(x) + y f(x) \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

(a) ($2^1/_2$ val.) Determine todas as funções $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ definidas em $\mathbb{R}$ tais que (3) é exata.

Solução:

O domínio da equação (3) é $\mathbb{R}^2$, e por isso é exata se e só se

$$2y \operatorname{sen} x = y f'(x).$$

Logo $f(x) = a - 2\cos x$.

(b) ($2^1/_2$ val.) Para cada função f determinada na alínea anterior resolva a equação tão explicitamente quanto possível.

Solução:

Para $f(x) = 2b - 2\cos x$ a equação (3) é exata. Usando a equação

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 \operatorname{sen} x$$

obtemos $\phi(x, y) = g(y) - y^2 \cos(x)$ e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g(y) - y^2\cos(x)\right) = g'(y) - 2y\cos(x) = y\big(2b - 2\cos(x)\big).$$

Logo

$$\phi(x, y) = y^2(b - \cos x),$$

e temos

$$y = \frac{A}{\sqrt{b - \cos x}} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{\sqrt{\cos x - b}},$$

com $A, b \in \mathbb{R}$.