Propagação & Antenas

Docente Responsável: **Prof. Carlos R. Paiva**

Duração: 45 minutos **12 de Novembro de 2021**

Ano Lectivo: 2021 / 2022 **TERCEIRO MAP45**

Pretende-se sintetizar um agregado de $N = 4$ antenas. Para o efeito deste problema pode assumir que as antenas elementares são isotrópicas. A excitação das correntes que alimentam as antenas elementares pode representar-se como $1 : \mathsf{A} : \mathsf{A} : 1$, i.e., trata-se de um agregado linear e simétrico, com $\mathsf{A} > 0$. Note que o diagrama de potência do agregado por ser representado pelo polinómio $P(\xi) = (\xi + 2)(\xi + c_0)^2$, em que $\xi = 2\cos(u)$ e $u = (k_0 d)\cos(\psi) - \alpha$. Considere, sempre, o plano equatorial XY onde $\theta = \pi/2$ (logo $\psi = \phi$). Admita que o espaçamento entre antenas elementares é $d = \lambda/2$.

---

1. Admitindo que todas as correntes estão em fase e que o agregado é uniforme, calcule o $\mathsf{SLL} = -20\log_{10}(R)$. Justifique a sua resposta. Não necessita de representar graficamente o diagrama de radiação do agregado.

Solução

No caso de um agregado uniforme de $N = 4$ antenas, o factor do agregado é dado por

$$\mathscr{F}(u) = \left| \frac{\sin(2u)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathscr{F}(u) = 4\left|\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u)\right|},$$

uma vez que se tem

$$\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u) = 2\left[2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right]\cos(u) = 4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u).$$

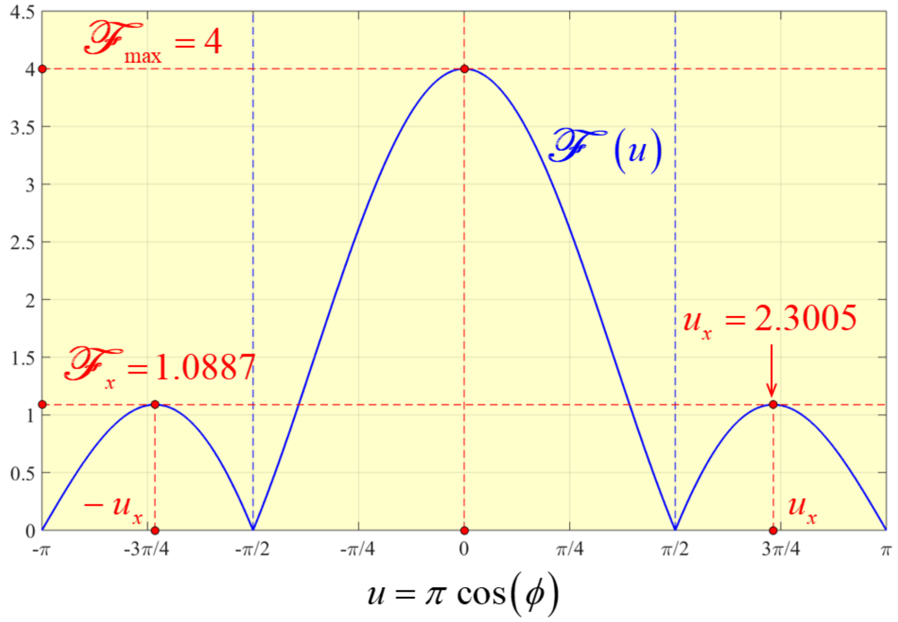
Tendo em consideração que, neste caso, vem

$$\boxed{\begin{array}{c} d=\dfrac{\lambda}{2} \\ \alpha=0 \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u=\pi\cos(\phi)}.$$

Assim, o intervalo visível é o seguinte

$$\left[\!\left[\begin{array}{lll} \bullet & \phi=180^\circ & \rightarrow \quad u_1=-\pi \\ \bullet & \phi=0^\circ & \rightarrow \quad u_2=\pi \end{array}\right.\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\pi\leq u\leq\pi}.$$

Facilmente se verifica que os dois máximos locais se verificam para $u=\pm u_x=\pm 2.3005$ com um valor $P_x=2^5/3^3=32/27$, donde $\mathscr{F}_x=4\sqrt{6}/9=1.0887$. O máximo global ocorre para $u=0$ com um valor $\mathscr{F}_{\max}=4$.



Desta forma, tem-se

$$R=\frac{\mathscr{F}_{\max}}{\mathscr{F}_x}=\sqrt{\frac{27}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}=3.6742 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathsf{SLL}=-20\log_0(R)=-11.3033\ \text{dB}}.$$

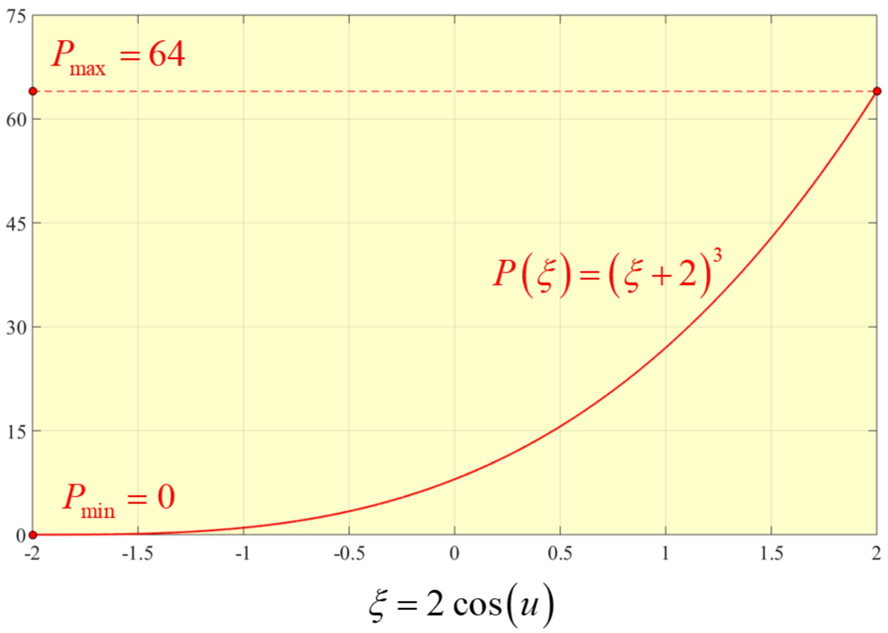
2. Explique a razão pela qual, se o agregado for binomial, não existem lobos secundários. Represente o diagrama de radiação do agregado para o caso em que $\alpha = \pi$.

Solução

No caso de um agregado binomial, com $N = 4$ antenas, a amplitude das correntes interiores é (pelo triângulo de Pascal) $\mathsf{A} = 3$ a corresponde um valor $c_0 = 2$. Ou seja,

$$\boxed{P(\xi) = (\xi + 2)^3}.$$

Esta função é monótona crescente no intervalo $-2 \le \xi \le 2$. Isto significa que não existem nulos do diagrama de radiação, a não ser para $\phi = \pi/2$, obtendo-se um «endfire array».



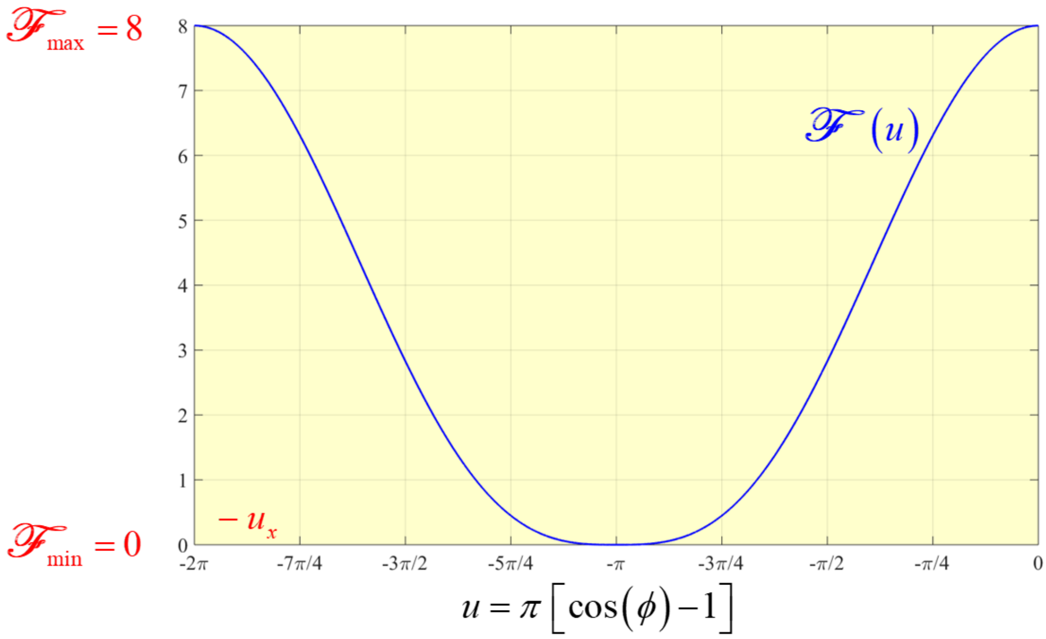
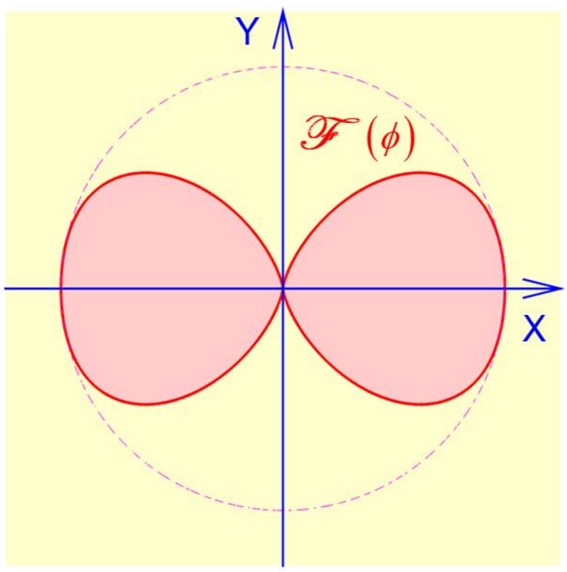


Diagrama de Radiação



3. Considere, doravante, que pretende obter um agregado em que os lobos secundários principais tenham todos um $\mathsf{SLL}_1 = -20\log_{10}(R_1)$, com $R_1 = 2.25$. Nestas condições, determine o diagrama de radiação do agregado de tal forma que o máximo de radiação seja dirigido na direcção $\phi_{\max} = 50^\circ$. Comece por calcular c_0, A, α e represente graficamente $P = P(\xi)$, $u = u(\xi)$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(u)$ e, finalmente, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\phi)$ em coordenadas polares. Sendo $\mathscr{F}_{\text{front}} = \mathscr{F}(0^\circ)$ e $\mathscr{F}_{\text{rear}} = \mathscr{F}(180^\circ)$, qual é a relação frente-trás $\mathscr{F}_{\text{front}} / \mathscr{F}_{\text{rear}}$?

Solução

Para se ter $R_1 = 2.25$, é necessário satisfazer a equação cúbica

$$\boxed{R^2 c_0^3 + \left(27 - 6R^2\right) c_0^2 + \left(108 + 12R^2\right) c_0 + \left(108 - 8R^2\right) = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_0 = -\,0.3950}$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathsf{A} = 1 + c_0 = 0.6050}\,.$$

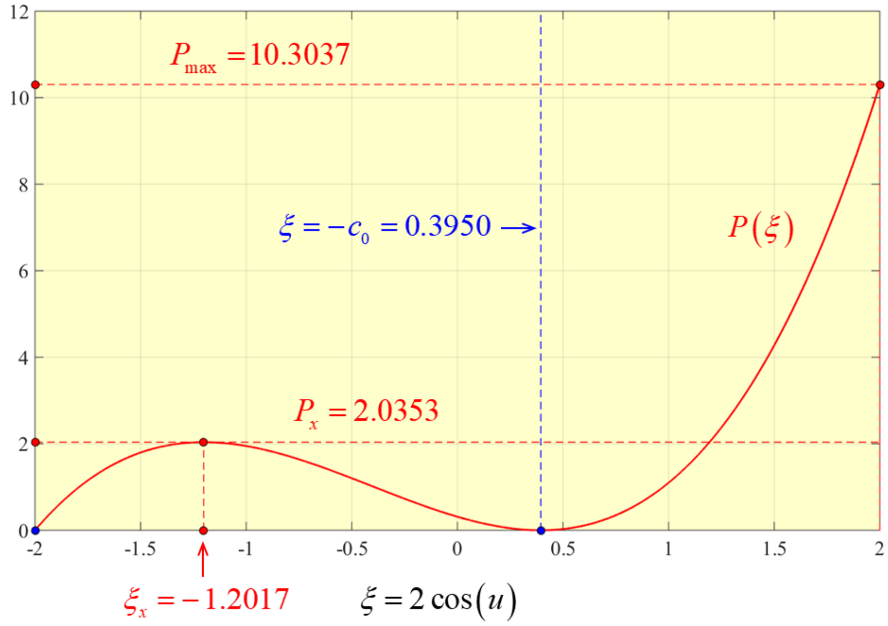
O valor de α deve satisfazer a relação

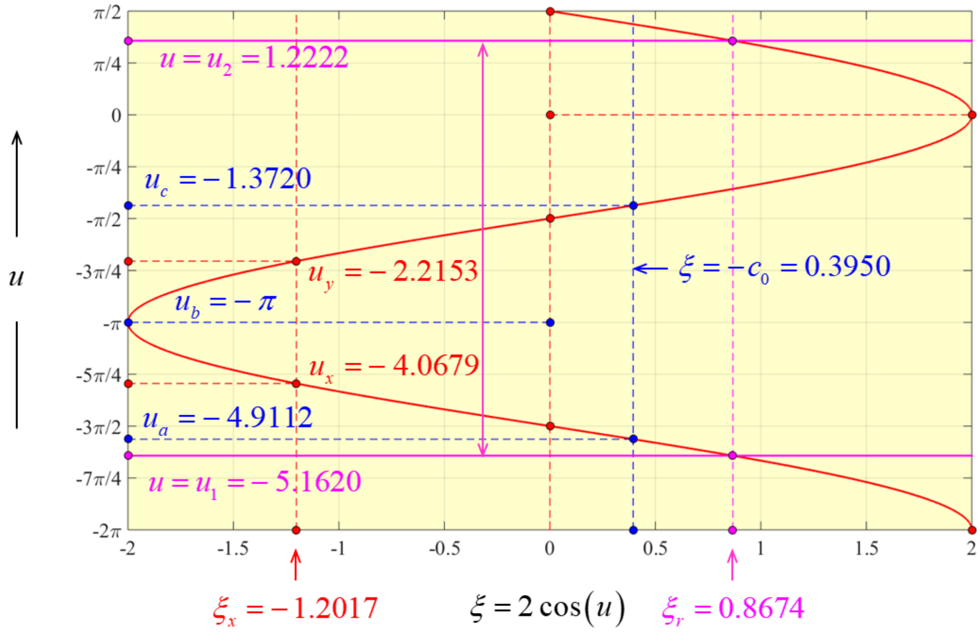
$$2\pi\left(\frac{d}{\lambda}\right)\cos(\phi_{\max}) - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \pi\cos\left(50^\circ\right) = 2.0194 \text{ rad}}\,.$$

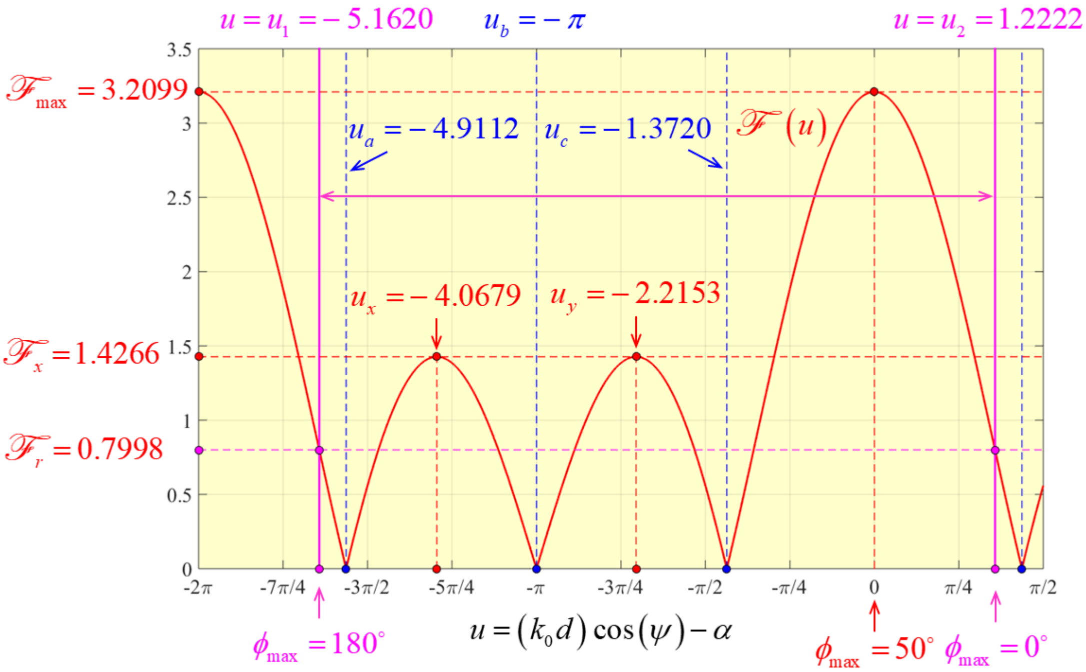
$$P(\xi) = (\xi + 2)(\xi + c_0)^2$$

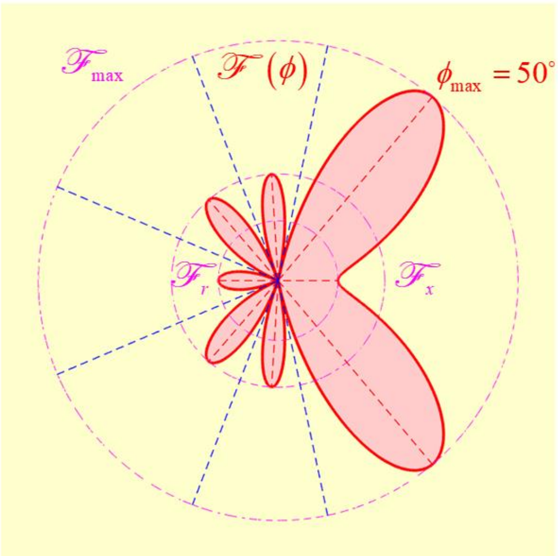
A relação frente-trás é

$$\boxed{\frac{\mathscr{F}_{\text{front}}}{\mathscr{F}_{\text{rear}}} = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{20\log_{10}\left(\frac{\mathscr{F}_{\text{front}}}{\mathscr{F}_{\text{rear}}}\right) = 0 \text{ dB}}\,.$$


$P_{\max} = 10.3037$
$\xi = -c_0 = 0.3950$
$P(\xi)$
$P_x = 2.0353$
$\xi_x = -1.2017$
$\xi = 2\cos(u)$


$u = u_2 = 1.2222$
$u_c = -1.3720$
$u_y = -2.2153$
$\xi = -c_0 = 0.3950$
$u_b = -\pi$
$u_x = -4.0679$
$u_a = -4.9112$
$u = u_1 = -5.1620$
u
$\xi_x = -1.2017$
$\xi = 2\cos(u)$
$\xi_r = 0.8674$


$u = u_1 = -5.1620$
$u_b = -\pi$
$u = u_2 = 1.2222$
$\mathscr{F}_{max} = 3.2099$
$u_a = -4.9112$
$u_c = -1.3720$
$\mathscr{F}(u)$
$u_x = -4.0679$
$u_y = -2.2153$
$\mathscr{F}_x = 1.4266$
$\mathscr{F}_r = 0.7998$
$\phi_{max} = 180^\circ$
$u = (k_0 d)\cos(\psi) - \alpha$
$\phi_{max} = 50^\circ$
$\phi_{max} = 0^\circ$


$\mathscr{F}_{max}$
$\mathscr{F}(\phi)$
$\phi_{max} = 50^\circ$
$\mathscr{F}_r$
$\mathscr{F}_x$

4. No diagrama de radiação obtido na alínea anterior é possível que exista um lobo secundário mais pequeno que os restantes lobos secundários principais. A este lobo secundário mais pequeno corresponde um $\mathsf{SLL}_2 = -20\log_{10}(R_2)$. Caso este lobo mais pequeno exista, calcule $\mathsf{SLL}_2[\mathrm{dB}]$. Em que direcção é que este lobo radia?

Solução

Existe, com efeito, um tal lobo mais pequeno – tal como se indicou no diagrama de radiação. O máximo deste lobo mais pequeno está orientado para trás, i.e., com

$$\boxed{\phi = 180^\circ}\,.$$

Enquanto, em relação aos lobos secundários principais, se tem

$$R = 2.25 = \frac{\mathscr{F}_{\max}}{\mathscr{F}_x} = \frac{3.2099}{1.4266} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathsf{SLL}_1 = -\,20\log_{10}(R) = -\,7.0437\ \mathrm{dB}}\,,$$

em relação a este lobo mais pequeno, tem-se

$$\frac{\mathscr{F}_{\max}}{\mathscr{F}_r} = \frac{3.2099}{0.7998} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathsf{SLL}_2 = -\,20\log_{10}\left(\frac{\mathscr{F}_{\max}}{\mathscr{F}_r}\right) = -\,12.0699\ \mathrm{dB}}\,.$$

---

5. O diagrama de radiação obtido em **3.** tem um conjunto de nulos ϕ_i, com $0 \le \phi_1 < \phi_2 < \cdots < \phi_{n-1} < \phi_n \le \pi$, i.e., com $i \in [1, 2, \ldots, n]$. Determine explicitamente (em graus) todos os n nulos.

Solução

$$\textbf{Nulos} \quad \rightarrow \quad \left\| \begin{array}{lll} \bullet\ u_c = -1.3720 & \mapsto & \phi_1 = 78.1076^\circ \\ \bullet\ u_b = -\,\pi & \mapsto & \phi_2 = 110.9291^\circ \\ \bullet\ u_a = -\,4.9112 & \mapsto & \phi_3 = 156.9992^\circ \end{array} \right.$$

---

6. Os lobos secundários principais, calculados em **3**., emitem radiação máxima nas direcções ϕ_j, com $0 \le \phi_1' < \phi_2' < \cdots < \phi_{m-1}' < \phi_m' \le \pi$, i.e., com $j \in [1, 2, \ldots, m]$. Determine explicitamente (em graus) todos esses m máximos locais.

Solução

$$\textbf{Lobos secundários} \quad \rightarrow \quad \left[\!\left[\begin{array}{l} \bullet \;\; u_y = -1.3720 \quad \mapsto \quad \phi_1' = 93.5761^\circ \\ \bullet \;\; u_x = -4.0679 \quad \mapsto \quad \phi_1' = 130.6963^\circ \end{array} \right.\right.$$

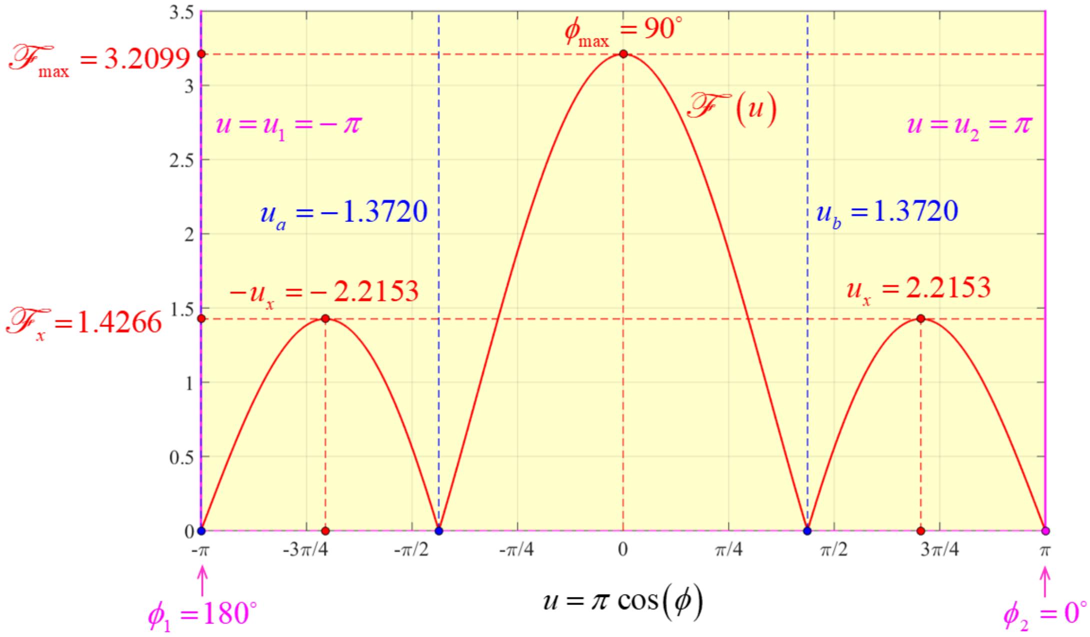
---

7. Admita, agora, que pretende alterar o diagrama de radiação obtido em **3.** para reduzir o valor $\mathsf{SLL}_2 = -20 \log_{10}(R_2)$, obtido em **4.**, para $\mathsf{SLL}_2 = -\infty$ dB. Isso poderá ser feito mantendo o valor $d = \lambda/2$, mas alterando quer a desfasagem α quer o valor de $\phi_{\max}$. Deve, no entanto, manter o valor do nível de lobos secundários, com $R = 2.25$ (i.e., deve também manter os valores anteriores para c_0 e A). Determine, então, os novos valores de α e de $\phi_{\max}$ e represente graficamente, em coordenadas polares, o diagrama de radiação $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\phi)$.

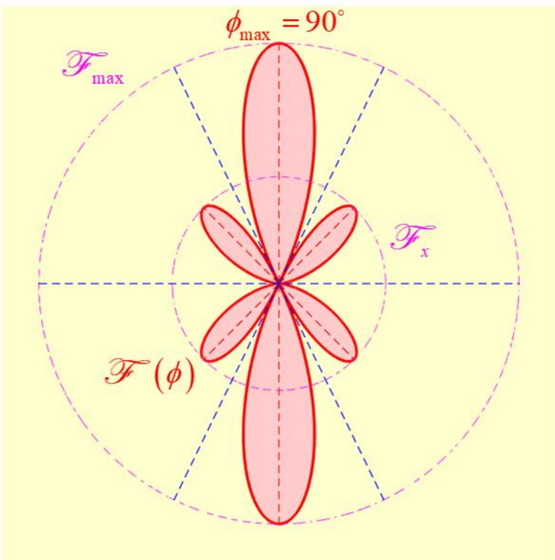
Solução

A principal alteração é a desfasagem α. É possível obter um «broadside array» desde que se faça

$$\boxed{\alpha = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = \pi \cos(\phi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = 0 \quad \leftrightarrow \quad \phi_{\max} = 90^\circ}.$$



$\mathscr{F}_{\max} = 3.2099$
$\phi_{\max} = 90^\circ$
$\mathscr{F}(u)$
$u = u_1 = -\pi$
$u = u_2 = \pi$
$u_a = -1.3720$
$u_b = 1.3720$
$-u_x = -2.2153$
$u_x = 2.2153$
$\mathscr{F}_x = 1.4266$
$u = \pi \cos(\phi)$
$\phi_1 = 180^\circ$
$\phi_2 = 0^\circ$



$\phi_{\max} = 90^\circ$
$\mathscr{F}_{\max}$
$\mathscr{F}_x$
$\mathscr{F}(\phi)$