# Supremo

## Majorantes, máximo e supremo

**Definição. Dado um conjunto $A$,**

- $m$ é um majorante de $A$ se $x \leqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \max A$ se $m \in A$ e $m$ é um majorante

Exemplo. $A = [-1, 3]$

- Conjunto dos majorantes de $A$: $[3, +\infty[$.
- $\max A = 3$.

# Majorantes, máximo e supremo

**Definição. Dado um conjunto $A$,**

- $m$ é um majorante de $A$ se $x \leqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \max A$ se $m \in A$ e $m$ é um majorante
- O *supremo* de $A$ é o menor dos majorantes de $A$.

Exemplo. $A = ]-\infty, 1[$.

- $A$ não tem máximo:
  - $m < 1 \qquad x = (m+1)/2 \qquad m < x < 1.$
- Conjunto dos majorantes de $A$: $[1, +\infty[$
- $\sup A = 1$

# Majorantes, máximo e supremo

**Definição.** Dado um conjunto $A$,

- $m$ é um majorante de $A$ se $x \leqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \max A$ se $m \in A$ e $m$ é um majorante
- O *supremo* de $A$ é o menor dos majorantes de $A$.
- Um conjunto sem majorantes tem supremo $+\infty$.

Exemplo. $A = ]-\infty, 1[$.

- $A$ não tem máximo:
  - $m < 1 \qquad x = (m+1)/2 \qquad m < x < 1.$
- Conjunto dos majorantes de $A$: $[1, +\infty[$
- $\sup A = 1$
- $\sup \mathbb{R} = +\infty.$

# Minorantes, mínimo e ínfimo

**Definição. Dado um conjunto $A$,**

- $m$ é um *minorante* de $A$ se $x \geqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \min A$ se $m \in A$ e $m$ é um minorante
- O *ínfimo* de $A$ é o maior dos minorantes de $A$.
- Um conjunto sem minorantes tem ínfimo $-\infty$.

Exemplo. $A = ]0,1[ \cup \{2\}$

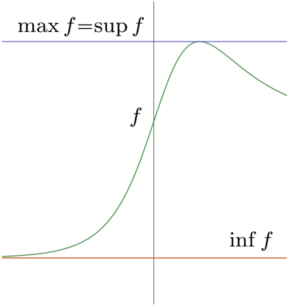
- Majorantes: $[2,+\infty[$. Minorantes: $]-\infty,0]$
- $\max A = \sup A = 2$. $\inf A = 0$. $A$ não tem mínimo.

# Algumas observações

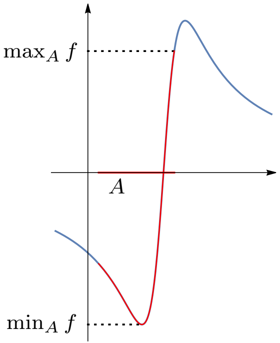
- Se $\sup A \in A$ então $\sup A = \max A$.
- Se $\inf A \in A$ então $\inf A = \min A$.
- Se $\sup A \notin A$ então $A$ não tem máximo.
- Se $\inf A \notin A$ então $A$ não tem mínimo.

# Supremo e Ínfimo duma Função

$$\sup f = \sup D'_f \qquad \inf f = \inf D'_f$$
$$\max f = \max D'_f \qquad \min f = \min D'_f$$



# Valores Máximo e Mínimo duma Função




- $c \in D'_f$ diz-se o valor máximo de $f$ se:
$$\underset{x \in D_f}{\forall} \; f(x) \leqslant c$$
Escrevemos $c = \max f$
- $c \in D'_f$ diz-se o valor mínimo de $f$ se
$$\underset{x \in D_f}{\forall} \; f(x) \geqslant c$$
Escrevemos $c = \min f$
- Dado um conjunto $A \subset D_f$,
$\max_A f = \max f|_A$ e $\min_A f = \min f|_A$.

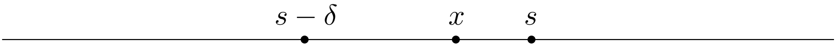
# O supremo e o ínfimo são aderentes

Para qualquer $\delta > 0$ temos

$$X \cap V_\delta(\sup X) \neq \varnothing \quad \text{e} \quad X \cap V_\delta(\sup X) \neq \varnothing$$

Demonstração. Se $s = \sup X$

- $\underset{\delta>0}{\forall}\ s - \delta$ não é um majorante
- É falso que $x \leqslant s - \delta$ para todo o $x \in X$
- Existe um $x \in X$ tal que $x > s - \delta$
- $|s - x| = s - x < \delta$ logo $x \in X \cap V_\delta(s)$



# Exercício 7

Dados conjuntos $A$ e $B$ tais que $\sup A = 0$ e $\inf B = 1$ decida se as seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras ou se podem ser falsas:

1. Existem pontos $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x = 1$.
2. Existem pontos $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < 1{,}01$.

# Dízimas Infinitas

- $\sqrt{2} = 1{,}414213562373\ldots$ quer dizer o quê?
- Aproximações:
  $1\ ,\ 1{,}4\ ,\ 1{,}41\ ,\ 1{,}414\ ,\ 1{,}4142\ ,\ 1{,}41421\ ,\ \ldots$
- A sucessão converge?
- $\sqrt{2} = \sup\{1\ ,\ 1{,}4\ ,\ 1{,}41\ ,\ 1{,}414\ ,\ 1{,}4142\ ,\ 1{,}41421\ ,\ \ldots\}$
- Supremo existe?

### Axioma do Supremo

Um conjunto não vazio e majorado tem supremo.

Definimos:

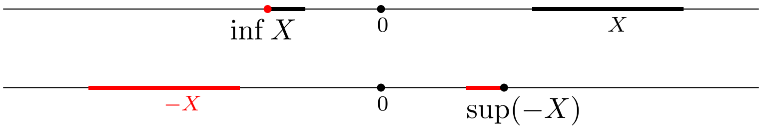
$$a_0{,}a_1a_2a_3\ldots = \sup\{a_0\ ,\ a_0{,}a_1\ ,\ a_0{,}a_1a_2\ ,\ a_0{,}a_1a_2a_3\ ,\ \ldots\}$$

# Consequências do Axioma do Supremo

Teorema. Qualquer conjunto $X$ minorado tem ínfimo.

Demonstração. $-X = \{-a : a \in X\}$.

Então $\sup(-X) = -\inf X$.



# Consequências do Axioma do Supremo

Teorema. O conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado.

Demonstração. Provamos por contradição.

- Assumimos que $\mathbb{N}$ é majorado.
- Então existe $s = \sup \mathbb{N}$.
- $s - 1$ não é majorante de $\mathbb{N}$.
- Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > s - 1$.
- $n + 1 > s$ logo $s$ não é um majorante: contradição.

# Funções monótonas têm limites laterais

## Teorema

Seja $f$ é uma função monótona.

- Seja $a$ um ponto de acumulação de $D_f \cap \left]-\infty, a\right[$. Então

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x < a\}, & \text{se } f \text{ for crescente;} \\ \inf\{f(x) : x < a\}, & \text{se } f \text{ for decrescente.} \end{cases}$$

- Seja $a$ um ponto de acumulação de $D_f \cap \left]a, +\infty\right[$. Então

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x < a\}, & \text{se } f \text{ for crescente;} \\ \sup\{f(x) : x < a\}, & \text{se } f \text{ for decrescente.} \end{cases}$$

# Demonstração

Vamos ver o caso do limite à esquerda num ponto $a \in \mathbb{R}$ duma função $f$ crescente. Seja

$$\ell = \sup\{f(x) : x < a\}$$

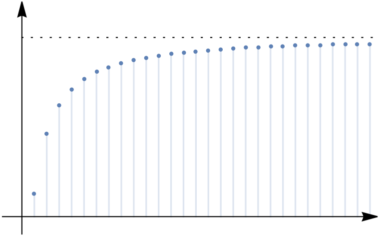
Queremos mostrar que

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ x \in \left]a-\delta, a\right[ \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(\ell) \quad (x \in D_f)$$

- $\ell$ é aderente a $\{f(x) : x < a\}$
- Existe $x_0 < a$ tal que $f(x_0) \in V_\varepsilon(\ell)$
- $x > x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \geqslant f(x_0) > \ell - \varepsilon \quad$ (assumindo $\ell \in \mathbb{R}$)
- $x \in \left]x_0, a\right[ \ \Rightarrow \ f(x) > \ell - \varepsilon \quad$ e $\quad f(x) \leqslant \ell$
- $\delta = a - x_0$: $\quad x \in \left]a-\delta, a\right[ \ \Rightarrow \ f(x) \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[ = V_\varepsilon(\ell)$

# Sucessões Monótonas Limitadas

Uma sucessão $(x_n)$ monótona e limitada converge.



Exemplo. Dízimas Infinitas

$$x_0 = a_0 \quad x_1 = a_0{,}a_1 \quad x_2 = a_0{,}a_1a_2 \quad x_3 = a_0{,}a_1a_2a_3 \quad \ldots$$

então $\lim x_n = a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$

# Exercício 17

Considere os conjuntos

$$A = \left]-\infty, -1\right[ \cup \left]1, +\infty\right[\,, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right[\,.$$

Dê um exemplo ou justifique a não existência duma sucessão:

(a) em $A$, monótona e divergente;

(b) em $B$, crescente e divergente;

(c) em $B$, com limite em $\mathbb{R}\backslash B$;

(d) em $\mathbb{R}\backslash B$, com limite em $B$;

(e) em $B$, tal que $\lim u_n \geqslant 2$.

# Exercício 19

Considere a sucessão $(x_n)$ definida por recorrência por

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(a) Mostre por indução que $1 < x_n < 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que a sucessão $(x_n)$ é decrescente.

(c) Mostre que a sucessão $(x_n)$ é convergente e calcule o seu limite.

# Subsucessões

Dada uma sucessão $(x_n)$ e números naturais

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

chamamos à sucessão

$$x_{n_1}, \quad x_{n_2}, \quad x_{n_3}, \quad \ldots, \quad x_{n_k}, \quad \ldots$$

uma subsucessão de $(x_n)$.

Exemplos

- Se $n_k = 2k - 1$ obtemos a subsucessão:

$$x_1, \quad x_3, \quad x_5, \quad x_7, \quad \ldots$$

- Se $n_k = 2k$ obtemos a subsucessão:

$$x_2, \quad x_4, \quad x_6, \quad x_8, \quad \ldots$$

# Limites de Subsucessões

Se $(x_{n_k})$ é uma subsucessão de $(x_n)$ então

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = b \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = b$$

Demonstração. Mudança de variável $j = n_k$:

- Se $k \to +\infty$ então $j = n_k \to +\infty$
- $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{j\to+\infty} x_j = b$

# Teorema de Bolzano-Weierstrass

Qualquer sucessão $(x_n)$ tem subsucessões com limite.

Demonstração. Basta mostrar que qualquer sucessão tem subsucessões monótonas. Dizemos que $k \in \mathbb{N}$ é um miradouro se $\forall_{n>k}\ x_n < x_k$. Temos 2 casos:

1. Há um número infinito de miradouros $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$. Então a subsucessão $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots$ é decrescente.
2. Há um número finito de miradouros. Seja $k$ o maior miradouro e seja $n_1 > k$. Então:
   - Existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \geqslant x_{n_1}$
   - Existe $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \geqslant x_{n_2}$ $\quad \ldots$

   e assim sucessivamente, pelo que obtemos uma subsucessão crescente: $x_{n_1} \leqslant x_{n_2} \leqslant x_{n_3} \leqslant \cdots$

# Funções Contínuas em Intervalos

# Teorema de Weierstrass

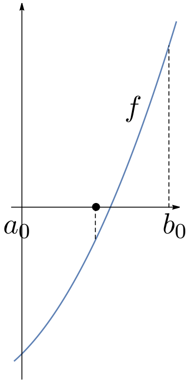
Se $f$ é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ então $f$ tem máximo e mínimo em $[a,b]$.

Demonstração. Seja $s = \sup f$. Vamos construir uma sucessão $f(x_n)$ com limite $s$.

- $s$ é aderente a $D'_f$ logo:
- para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos $V_{1/n}(s) \cap D'_f \neq \varnothing$
- Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $f(x_n) \in V_{1/n}(s)$
- $|f(x_n) - s| < 1/n \quad (s \in \mathbb{R})$ ou $f(x_n) > 1/n \quad (s = +\infty)$
- Em ambos os casos $f(x_n) \to s$
- A sucessão $(x_n)$ pode não convergir,
- mas existe uma subsucessão convergente: $x_{n_k} \to c$
- $f(c) = \lim f(x_{n_k}) = s$ logo $f(c) = \max f = \sup f$.

# Teorema de Bolzano

Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.
Então existe um ponto $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

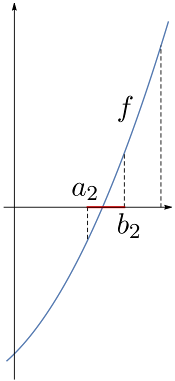



Demonstração. Caso $f(a) < 0 < f(b)$.
Definimos intervalos
$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$ tais que

- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

# Teorema de Bolzano

Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.
Então existe um ponto $c \in ]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

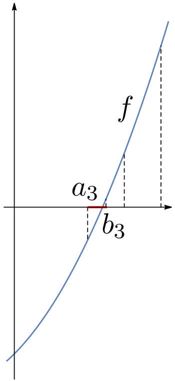



Demonstração. Caso $f(a) < 0 < f(b)$.
Definimos intervalos
$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$ tais que

- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

# Teorema de Bolzano

Seja $f$ uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.
Então existe um ponto $c \in \, ]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.




*Demonstração.* Caso $f(a) < 0 < f(b)$.
Definimos intervalos
$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$ tais que

- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

$c = \lim b_n = \lim a_n + \lim \frac{b-a}{2^n} = \lim a_n$

- $\lim f(b_n) = \lim f(a_n) = f(c)$
- $\lim f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim f(b_n)$
- $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$ logo $f(c) = 0$.

# Exercício 28b

Esboce os gráficos das funções $g(x) = x - 2$ e $h(x) = 1 - x^4$. e mostre que a equação $g(x) = h(x)$ tem pelo menos 2 soluções.

# Exercício 30

Seja $f : [0, 1[ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(1^-) = +\infty$ e $f(0) < 0$.

1. Mostre que existe um $c \in [0, 1[$ tal que $f(c) > 0$.
2. Prove que $f$ tem um zero no intervalo $]0, 1[$.

# Contradomínio

**Teorema**

Se $f$ é contínua num intervalo $I$ então $f\big(I\big)$ é um intervalo com extremos $\inf_I f$ e $\sup_I f$.

Ou seja, $f(I)$ só pode ser um dos 4 intervalos:
$]\inf f, \sup f[\ , \quad ]\inf f, \max f]\ , \quad [\min f, \sup f[\ , \quad [\min f, \max f]$

Demonstração. Seja $y \in\ ]\inf f, \sup f[$. Então $y$ não é nem majorante nem minorante de $f$.

- $y$ não é um majorante: existem valores da função $f(b) > y$
- $y$ não é um minorante: existem valores da função $f(a) < y$
- Como $f(a) < y < f(b)$, existe um $c$ entre $a$ e $b$ tal que $f(c) = y$

Portanto $y \in f(I)$. Portanto $]\inf f, \sup f[\ \subset f(I)$.

# Exemplo: Domínio das Raízes

Seja $f$ a restrição de $x^2$ a $[0, +\infty[$.

- $f$ toma todos os valores entre $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $D'_f = [0, +\infty[$.
- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $D_{f^{-1}} = D'_f = [0, +\infty[$.

O mesmo argumento mostra que o domínio de $\sqrt[n]{x}$ é $[0, +\infty[$ para $n$ par e $\mathbb{R}$ para $n$ ímpar.

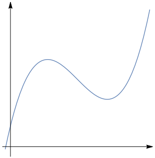
# Exercício

Determine o contradomínio da função $f\colon [0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3 + x + 1}$$

Sugestão: A função é decrescente.

# Funções Contínuas e Injectivas



Uma função contínua e injectiva num intervalo $I$ é estritamente monótona em $I$.

Exemplo. A função $f(x) = 1/x$ é contínua e injectiva mas não é monótona.

Demonstração. Primeiro observamos o seguinte:

- Dados 4 pontos $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

  ou $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$,

  ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$.

Escolhemos 2 pontos de teste $a, b \in I$ com $a < b$.

- Se $f(a) < f(b)$ então $f$ é crescente em $I$: para quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$, aplicando a observação aos 4 pontos $a, b, x, y$ vemos que $f(x) < f(y)$.
- De igual modo, se $f(a) > f(b)$ então $f$ é decrescente em $I$.

# Continuidade da Função Inversa

## Teorema

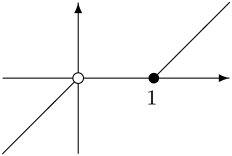
- Se $f$ é contínua e injetiva, e
- $D_f = I$ é um intervalo,

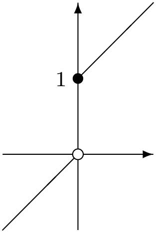
Então $f^{-1}$ é também contínua.

Demonstração.

- $f$ é injectiva e contínua em $I$, logo é monótona.
- $f$ é monótona logo $f^{-1}$ é monótona.
- $D'_{f^{-1}} = D_f = I$ é um intervalo,
- logo $f^{-1}$ é contínua.

# Exemplo




Consideremos a função $f$ de domínio

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0; \\ x - 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

$f$ é contínua e injectiva, $D'_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ mas

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y < 0; \\ y + 1, & \text{se } y \geqslant 0. \end{cases}$$

não é contínua.