Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1º semestre
2019/2020

REPESCAGEM DO 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEIC-Taguspark
15 de janeiro de 2020 (11:30)

Teste R3.1

Nome:
Número:

Para o teste que vai realizar dispõe de **90 minutos** e o teste consiste na resolução de **sete problemas**. Os quatro primeiros são de escolha ou resposta múltipla; cada resposta em branco vale 0 valores, **e cada resposta errada desconta da respetiva classificação**, com as fórmulas do Fenix. Os três últimos problemas são de resposta aberta, devendo por isso **apresentar os cálculos** efetuados e/ou **justificar** cuidadosamente as suas respostas. Agradeço ainda que responda a uma questão inicial e final para o nosso estudo. Boa sorte!

NOTA FINAL:

Questão inicial

O meu nível de confiança para realizar o teste, a que vou responder de seguida é

- ☐ de 0% a 20%
- ☐ de 20% a 40%
- ☐ de 40% a 60%
- ☐ de 60% a 80%
- ☐ de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!

Problema 1 (1 valor)

Considere uma equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, em que A é 20×17, e a solução geral tem 3 incógnitas livres. Selecione **todas** as afirmações **verdadeiras** sobre os espaços matriciais de A ou de A^T.

- [ ] o espaço das colunas de A tem dimensão 17;
- [ ] o espaço nulo de A tem dimensão 3;
- [ ] o espaço das linhas de A tem dimensão 14;
- [ ] o espaço das colunas de A^T tem dimensão 14;
- [ ] o espaço nulo de A^T tem dimensão 6;
- [ ] o espaço das linhas de A^T tem dimensão 17;
- [ ] o espaço das colunas de A é um subespaço de $\mathbb{R}^{20}$;
- [ ] o espaço nulo de A é um subespaço de $\mathbb{R}^{17}$;
- [ ] o espaço das colunas de A^T é um subespaço de $\mathbb{R}^{20}$;
- [ ] o espaço nulo de A^T é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Problema 2 (0.6 valores)

Considere o sistema dinâmico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $k \geq 0$, em que A é uma matriz 2×2 com valores próprios 2 e 1/2 e os correspondentes vetores próprios $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Selecione a **única** afirmação **verdadeira** sobre este sistema dinâmico.

- ☐ para $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, temos $\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$;
- ☐ a sucessão de estados descreve no espaço de fase uma espiral a enrolar para a origem;
- ☐ para $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a sucessão de estados converge para a origem.
- ☐ a origem é um repulsor deste sistema dinâmico.

Problema 3 (0.6 valores)

Considere a forma quadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = -3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$. Selecione a **única** afirmação **verdadeira** relativamente a esta forma quadrática.

- ☐ a forma quadrática é indefinida;
- ☐ mediante uma mudança de variável $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, a forma quadrática é equivalente a $5y_1^2 + 5y_2^2$;
- ☐ a matriz da forma quadrática é $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;
- ☐ os eixos principais são as retas $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$.

Problema 4 (1.2 valores)
Considere a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com A e $\mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) **(0.6 val.)** Selecione a **única** afirmação verdadeira.

- ☐ A equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível;
- ☐ $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é uma solução de mínimos quadrados;
- ☐ A solução de mínimos quadrados é única;
- ☐ O vetor $\hat{\mathbf{b}} \in \mathrm{Col}A$ que melhor aproxima $\mathbf{b}$ é $\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) **(0.6 val.)** Indique a **distância** de $\mathbf{b}$ ao espaço das colunas de A, $\mathrm{Col}A$.

- ☐ $\sqrt{5}$;
- ☐ $3\sqrt{2}$;
- ☐ $\sqrt{10}$;
- ☐ 5.

Problema 5 (2.3 valores)
Considere a matriz de Markov

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (1.0 val.) Deduza o vetor estacionário $\mathbf{q}$ da matriz M.

(b) (0.5 val.) O que acontece ao estado $\mathbf{x}_k$ da cadeia de Markov $\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, quando $k \to \infty$?

(c) (0.8 val.) Mostre que M^2, M^3, ..., M^k são matrizes de Markov com o mesmo vetor estacionário de M.

Problema 6 (2.5 valores)
Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -2 \\ -8 & 8 & \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) (0.5 val.) Sabendo que (1, 0, 2) é vetor próprio de A. Calcule o valor da entrada α na última linha de A.

(b) (1.0 val.) Sabendo que $\lambda = 4$ é um dos valores próprios de A, indique os restantes valores próprios desta matriz e escreva a equação característica.

(c) (1.0 val.) Escreva explicitamente os fatores da fatorização $A = PDP^{-1}$ com uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P (não necessita de escrever explicitamente P^{-1}).

Problema 7 (1.8 valores)

Seja B uma matriz simétrica $n \times n$ tal que $B^2 = B$. Para qualquer vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, considere $\hat{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ e $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

(a) (0.9 val.) Mostre que $\mathbf{z}$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{y}}$.

(b) (0.9 val.) Seja $W = \mathrm{Col}B$. Justifique a decomposição ortogonal de $\mathbf{y}$ na soma de um vetor em W e um vetor em $W^\perp$.

Questão final Ao responder às perguntas deste teste, o meu nível de confiança geral foi

- ☐ de 0% a 20%
- ☐ de 20% a 40%
- ☐ de 40% a 60%
- ☐ de 60% a 80%
- ☐ de 80% a 100%

Obrigada por responder a esta questão!