

Tratamento Estatístico de Observações

João Matos

Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura

(Versão 0.0) – 3 Maio 2007

Motivação

Aplicações da topografia em obras de engenharia

- monitorização do comportamento geométrico da obra através de medições de alta precisão (matéria a abordar posteriormente).
- a alta precisão obtém-se com equipamento adequado e também com o processamento estatístico das observações.



INSTITUTO
SUPERIOR
TÉCNICO

Método dos Mínimos Quadrados

ERROS DE OBSERVAÇÃO

A relação entre o valor exacto de uma grandeza (μ) e o valor observado (y) pode ser expressa por:

$$y = \mu + \theta_i + \theta_a + \delta,$$

-onde

- θ_i - representa um erro devido ao equipamento de medição, designado por erro instrumental;

- θ_a - representa um erro devido às condições externas durante a medição, designado por erro ambiental;

- δ - erro accidental (aleatório).

Problema: Pretende-se determinar um conjunto de grandezas (parâmetros) que se relacionam linearmente com grandezas observadas (termos independentes) afectadas por erros de observação (resíduos)

Sistema de equações de observação

$$\begin{aligned}a_1A + b_1B + c_1C + \dots + n_1N &= l_1 + v_1 \\ a_2A + b_2B + c_2C + \dots + n_2N &= l_2 + v_2 \\ \vdots & \\ a_mA + b_mB + c_mC + \dots + n_mN &= l_m + v_m\end{aligned}$$

A, B, C, \dots, N – Parâmetros que se pretendem estimar
 $a_p, b_p, c_p, \dots, n_i$ – Coeficientes
 l_1, l_2, \dots, l_n – Termos independentes
(em geral valores observados)
 v_1, v_2, \dots, v_n - Resíduos

Objectivo: Determinar os valores para os parâmetros que minimizam o somatório dos quadrados dos resíduos

DEDUÇÃO

Quadrados dos resíduos

$$\begin{aligned}(a_1A+b_1B+c_1C+\dots+n_1N-l_1)^2 &= v_1^2 \\(a_2A+b_2B+c_2C+\dots+n_2N-l_2)^2 &= v_2^2 \\&\vdots \\(a_mA+b_mB+c_mC+\dots+n_mN-l_m)^2 &= v_m^2\end{aligned}$$

Somatório dos quadrados dos resíduos

$$\begin{aligned}\sum v_i^2 &= (a_1A+b_1B+c_1C+\dots+n_1N-l_1)^2 + \\&\quad (a_2A+b_2B+c_2C+\dots+n_2N-l_2)^2 + \\&\quad \vdots \\&\quad (a_mA+b_mB+c_mC+\dots+n_mN-l_m)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sum v^2}{\partial A} = 2(a_1A + b_1B + c_1C + \dots + n_1N - l_1)a_1 +$$

$$2(a_2A + b_2B + c_2C + \dots + n_2N - l_2)a_2 +$$

$$\vdots$$

$$2(a_mA + b_mB + c_mC + \dots + n_mN - l_m)a_m = 0$$

$$\frac{\partial \sum v^2}{\partial B} = 2(a_1A + b_1B + c_1C + \dots + n_1N - l_1)b_1 +$$

$$2(a_2A + b_2B + c_2C + \dots + n_2N - l_2)b_2 +$$

$$\vdots$$

$$2(a_mA + b_mB + c_mC + \dots + n_mN - l_m)b_m = 0$$

$$\frac{\partial \sum v^2}{\partial C} = 2(a_1A + b_1B + c_1C + \dots + n_1N - l_1)c_1 +$$

$$2(a_2A + b_2B + c_2C + \dots + n_2N - l_2)c_2 +$$

$$\vdots$$

$$2(a_mA + b_mB + c_mC + \dots + n_mN - l_m)c_m = 0$$



$$\frac{\partial \sum v^2}{\partial N} = 2(a_1A + b_1B + c_1C + \dots + n_1N - l_1)n_1 +$$

$$2(a_2A + b_2B + c_2C + \dots + n_2N - l_2)n_2 +$$

$$\vdots$$

$$2(a_mA + b_mB + c_mC + \dots + n_mN - l_m)n_m = 0$$

Minimização do somatório dos quadrados dos resíduos

□

Minimização do somatório dos quadrados dos resíduos

$$\begin{aligned} & [(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_m)^2]A + [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_mb_m]B \\ & + [a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_mc_m]C + \dots + [a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_mn_m]N \\ & - [a_1l_1 + a_2l_2 + \dots + a_ml_m] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [b_1a_1 + b_2a_2 + \dots + b_ma_m]A + [(b_1)^2 + (b_2)^2 + \dots + (b_m)^2]B \\ & + [b_1c_1 + b_2c_2 + \dots + b_mc_m]C + \dots + [b_1n_1 + b_2n_2 + \dots + b_mn_m]N \\ & - [b_1l_1 + b_2l_2 + \dots + b_ml_m] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ma_m]A + [c_1b_1 + c_2b_2 + \dots + c_mb_m]B \\ & + [(c_1)^2 + (c_2)^2 + \dots + (c_m)^2]C + \dots + [c_1n_1 + c_2n_2 + \dots + c_mn_m]N \\ & - [c_1l_1 + c_2l_2 + \dots + c_ml_m] = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & [n_1a_1 + n_2a_2 + \dots + n_ma_m]A + [n_1b_1 + n_2b_2 + \dots + n_mb_m]B \\ & + [n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_mc_m]C + \dots + [(n_1)^2 + (n_2)^2 + \dots + (n_m)^2]N \\ & - [n_1l_1 + n_2l_2 + \dots + n_ml_m] = 0 \end{aligned}$$

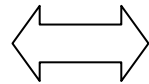
$$\begin{aligned}(\sum a^2)A + (\sum ab)B + (\sum ac)C + \dots + (\sum an)N &= (\sum al) \\(\sum ba)A + (\sum b^2)B + (\sum bc)C + \dots + (\sum bn)N &= (\sum bl) \\(\sum ca)A + (\sum cb)B + (\sum c^2)C + \dots + (\sum cn)N &= (\sum cl) \\ \vdots & \\(\sum na)A + (\sum nb)B + (\sum nc)C + \dots + (\sum n^2)N &= (\sum nl)\end{aligned}$$

Os valores para os parâmetros obtidos pela resolução deste sistema de equações (número de equações é igual ao número de incógnitas) são os que minimizam o somatório dos quadrados dos resíduos.

FORMALISMO MATRICIAL

Escrevendo o sistema de equações de observação na forma matricial

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots + n_1 N &= l_1 + v_1 \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \dots + n_2 N &= l_2 + v_2 \\ \vdots & \\ a_m A + b_m B + c_m C + \dots + n_m N &= l_m + v_m \end{aligned}$$



$$AX = L + V$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

A resolução do sistema de equações normal é dada por

$$A^T A X = A^T L$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

FORMALISMO MATRICIAL COM PESOS

$$WAX = WL + WV$$

$$A^T WAX = A^T WL$$

$$A^T WAX = A^T WL$$

$$X = (A^T WA)^{-1} A^T WL$$

Na generalidade dos casos as observações não têm igual precisão, daí que se introduza uma matriz de pesos W , geralmente uma matriz diagonal com o inverso da variância estimada para cada observação.

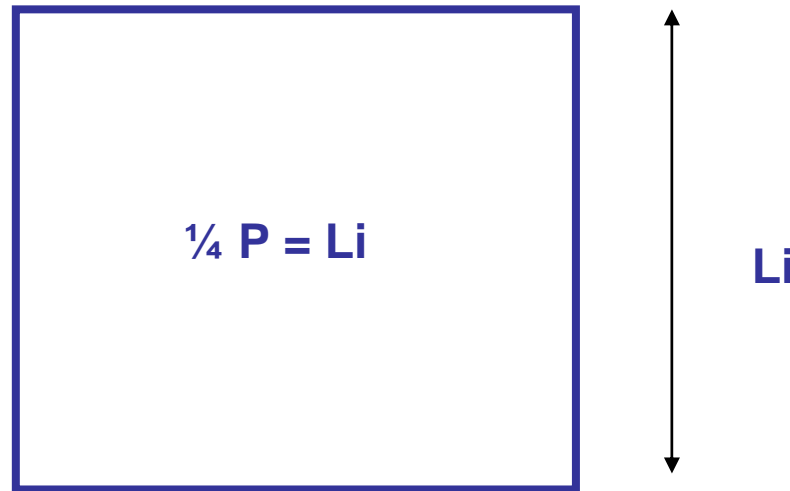
Exemplo : Determinação do perímetro de um quadrado

$$\frac{1}{4} P = L_1$$

$$\frac{1}{4} P = L_2$$

...

$$\frac{1}{4} P = L_n$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \dots \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} [P] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_n \end{bmatrix} + [V]$$

$$AX=L+V$$

Resolução

$$A^T AX = A^T L$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

Exemplo : Ajustamento de uma recta a um conjunto de pontos

Eq. da recta $y = mx + b$

Dados a:(3.00,4.50); b:(4.25,4.25); c:(5.50,5.50); d:(8.00,5.50)

$$AX = L + V \quad A = \begin{bmatrix} x_a & 1 \\ x_b & 1 \\ x_c & 1 \\ x_d & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \\ y_d \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_{y_a} \\ v_{y_b} \\ v_{y_c} \\ v_{y_d} \end{bmatrix}$$

Equações de Observação

Equações Normais

$$\begin{bmatrix} 3.001 \\ 4.251 \\ 5.501 \\ 8.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.50 \\ 4.25 \\ 5.50 \\ 5.50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 121.3125 & 20.75 \\ 20.7500 & 4.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105.8125 \\ 19.7500 \end{bmatrix}$$

Resolução

$$X = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121.3125 & 20.75 \\ 20.7500 & 4.00 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 105.8125 \\ 19.7500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.246 \\ 3.663 \end{bmatrix}$$

Resíduos

$$V = AX - L = \begin{bmatrix} 3.001 \\ 4.251 \\ 5.501 \\ 8.001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.246 \\ 3.663 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.50 \\ 4.25 \\ 5.50 \\ 5.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.10 \\ 0.46 \\ -0.48 \\ 0.13 \end{bmatrix}$$

Exemplo : Calibração de um distanciómetro

S – factor de escala do distanciómetro;

C – constante DEM-reflector;

D_A – Distância horizontal tida como correcta;

V_{DH} – resíduo para cada medição.

As incógnitas são S e C

$$SD_A + C = D_H - D_A + V_{DH}$$

$$AX = L + V$$

$$\begin{bmatrix} 149.9975 & 1 \\ 149.9975 & 1 \\ 430.0101 & 1 \\ 430.0101 & 1 \\ 1400.0030 & 1 \\ 1400.0030 & 1 \\ 280.0126 & 1 \\ 280.0126 & 1 \\ 1250.0055 & 1 \\ 1250.0055 & 1 \\ 969.9929 & 1 \\ 969.9929 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150.0175 - 149.9975 \\ 150.0174 - 149.9975 \\ 430.0302 - 430.0101 \\ 430.0304 - 430.0101 \\ 1400.0223 - 1400.0030 \\ 1400.0221 - 1400.0030 \\ 280.0327 - 280.0126 \\ 280.0331 - 280.0126 \\ 1250.0248 - 1250.0055 \\ 1250.0257 - 1250.0055 \\ 970.0119 - 969.9929 \\ 970.0125 - 969.9929 \end{bmatrix} + V$$

Resolução

$$A^T AX = A^T L$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

$$S = -0.0000007 \text{ (-0.7ppm)}; C = 0.0203\text{m}$$

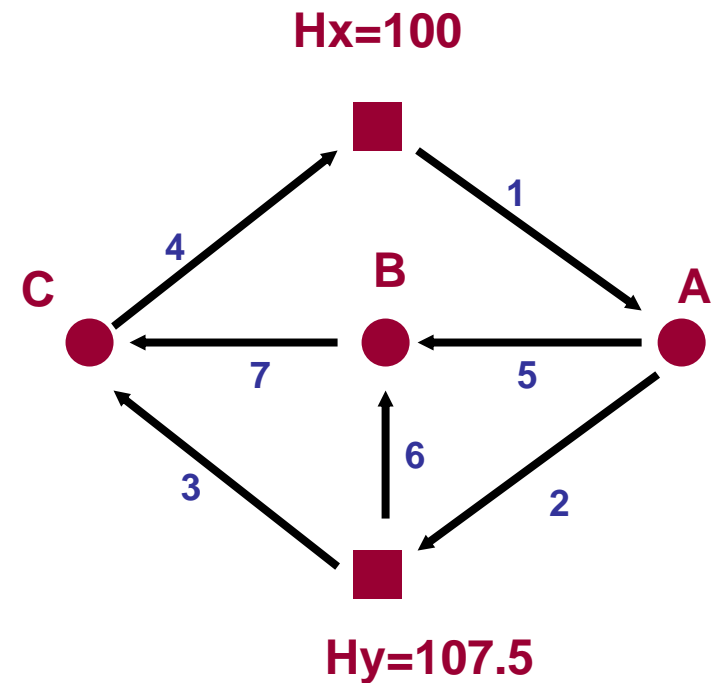
Exemplo : Ajustamento de uma rede de nivelamento geométrico

Linha	1	2	3	4	5	6	7
Desnível	5.1	2.34	-1.25	-6.13	-0.68	-3.00	1.70

$$\begin{aligned}
 h_A - h_x &= 5.10 + v_1 \\
 -h_A - h_y &= 2.34 + v_2 \\
 h_C - h_y &= -1.25 + v_3 \\
 -h_C - h_x &= -6.13 + v_4 \\
 -h_A - h_B &= -0.68 + v_5 \\
 h_B - h_y &= -3.00 + v_6 \\
 -h_B - h_C &= 1.70 + v_7
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 105.10 \\ -105.16 \\ 106.25 \\ -106.13 \\ -0.68 \\ 104.50 \\ 1.70 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 105.141 \\ 104.483 \\ 106.188 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0.041 \\ 0.019 \\ -0.062 \\ -0.058 \\ 0.022 \\ -0.017 \\ 0.005 \end{bmatrix}$$



Exemplo : Ajustamento de uma rede de nivelamento geométrico (idêntico a exemplo anterior mas com pesos)

Linha	Comprimento (km)	Peso
1	4	0.25
2	3	0.33
3	2	0.50
4	3	0.33
5	2	0.50
6	2	0.50
7	2	0.50

$$W = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$X = (A^T W A)^{-1} A^T W L$$

$$X = \begin{bmatrix} 105.150 \\ 104.489 \\ 106.197 \end{bmatrix}$$

CASOS NÃO LINEARES

Nos casos em que os parâmetros não se relacionam linearmente com os termos independentes procede-se a uma aproximação linear do sistema de equações de observação, utilizando valores aproximados para os parâmetros, seguindo-se uma resolução iterativa.

$$JX = K + V$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} l_1 - F_1(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ l_1 - F_2(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \\ \vdots \\ l_n - F_m(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$X = (J^T J)^{-1} J^T K = N^{-1} J^T K$$

$$X = (J^T W J)^{-1} J^T W K = N^{-1} J^T W K$$

Dedução de uma equação de observação de distância

$$l_{ij} + v_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

$$F(x_i, y_i, x_j, y_j) = F(x_{i_0}, y_{i_0}, x_{j_0}, y_{j_0}) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)_0 dy_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)_0 dy_j$$

$$\frac{x_{i_0} - x_{j_0}}{IJ_0} dx_i + \frac{y_{i_0} - y_{j_0}}{IJ_0} dy_i + \frac{x_{i_0} - x_{j_0}}{IJ_0} dx_j + \frac{y_{i_0} - y_{j_0}}{IJ_0} dy_j = k_{l_{ij}} + v_{ij}$$

com

$$k_{l_{ij}} = l_{ij} - IJ_0$$

$$IJ_0 = \sqrt{(x_{j_0} - x_{i_0})^2 + (y_{j_0} - y_{i_0})^2}$$

Equação de ângulo azimutal

$$\frac{y_{i_0} - y_{b_0}}{(IB_0)^2} dx_b + \frac{x_{b_0} - x_{i_0}}{(IB_0)^2} dy_b + \left(\frac{y_{b_0} - y_{i_0}}{(IB_0)^2} - \frac{y_{f_0} - y_{i_0}}{(IF_0)^2} \right) dx_i + \left(\frac{x_{i_0} - y_{b_0}}{(IB_0)^2} - \frac{x_{i_0} - x_{f_0}}{(IF_0)^2} \right) dy_i$$
$$+ \frac{y_{f_0} - y_{i_0}}{(IF_0)^2} dx_f + \frac{x_{i_0} - x_{f_0}}{(IF_0)^2} dy_f = k_{\theta_{bif}} + \nu_{\theta_{bif}}$$

com

$$k_{\theta_{bif}} = \theta_{bif} - \theta_{bif_0}$$

$$IB_0 = \sqrt{(x_{b_0} - x_{i_0})^2 + (y_{b_0} - y_{i_0})^2}$$

Equação de ângulo vertical

$$\begin{aligned}
 & - (x_{b_0} - x_{i_0})(z_{b_0} - z_{i_0})dx_b - (y_{b_0} - y_{i_0})(z_{b_0} - z_{i_0})dy_b + \frac{IB_0}{(S_{IB_0})^2} dz_b \\
 & - \left[(x_{b_0} - x_{i_0})(z_{b_0} - z_{i_0}) - (x_{f_0} - x_{i_0})(z_{f_0} - z_{i_0}) \right] dx_i + \left[(y_{b_0} - y_{i_0})(z_{b_0} - z_{i_0}) - (y_{f_0} - y_{i_0})(z_{f_0} - z_{i_0}) \right] dy_i \\
 & + \left[\frac{IF_0}{(S_{IF_0})^2} - \frac{IB_0}{(S_{IB_0})^2} \right] dz_i \\
 & (x_{f_0} - x_{i_0})(z_{f_0} - z_{i_0})dx_f - (y_{f_0} - y_{i_0})(z_{f_0} - z_{i_0})dy_f + \frac{IF_0}{(S_{IF_0})^2} dz_f = k_{\zeta_{bif}} + v_{\zeta_{bif}}
 \end{aligned}$$

com

$$k_{\zeta_{bif}} = \zeta_{bif} - \zeta_{bif_0}$$

$$IB_0 = \sqrt{(x_{b_0} - x_{i_0})^2 + (y_{b_0} - y_{i_0})^2}$$

$$IF_0 = \sqrt{(x_{f_0} - x_{i_0})^2 + (y_{f_0} - y_{i_0})^2}$$

$$S_{IB_0} = \sqrt{(x_{b_0} - x_{i_0})^2 + (y_{b_0} - y_{i_0})^2 + (z_{b_0} - z_{i_0})^2}$$

$$S_{IF_0} = \sqrt{(x_{f_0} - x_{i_0})^2 + (y_{f_0} - y_{i_0})^2 + (z_{f_0} - z_{i_0})^2}$$

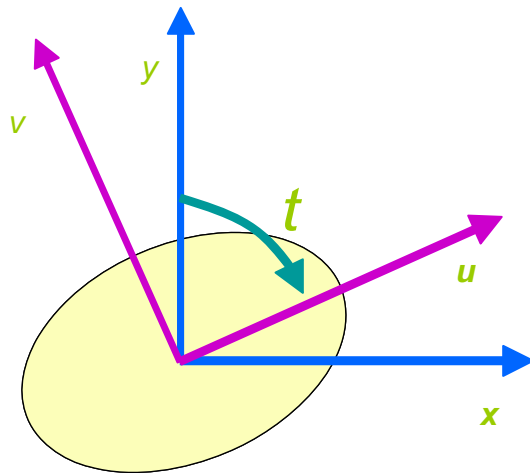
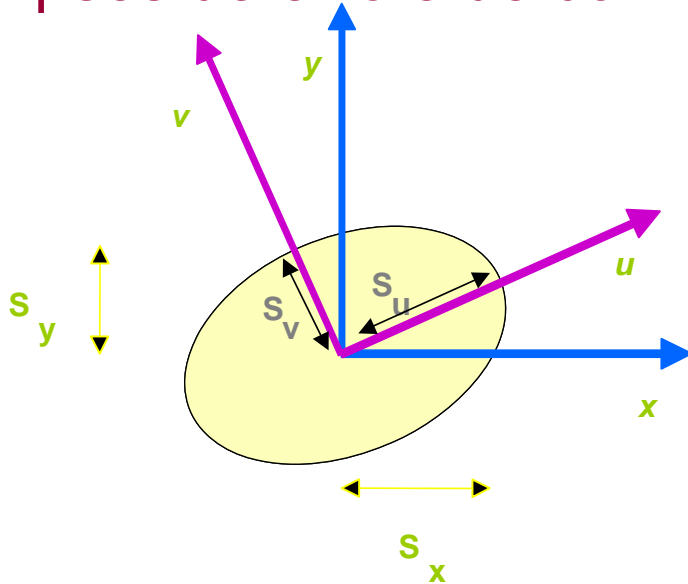
Equação de centro

$$dx_i = 0$$

$$dy_i = 0$$

$$dz_i = 0$$

Elipses de erro e de confiança



$$S_x^2 = S_0^2 (A^T W A)^{-1} = S_0^2 Q_{xx}$$

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum w v^2}{m-n}} = \sqrt{\frac{\sum w v^2}{r}} = \sqrt{\frac{\sum V^T W V}{r}}$$

$$\tan(2t) = \frac{2q_{xy}}{q_{yy} - q_{xx}}$$

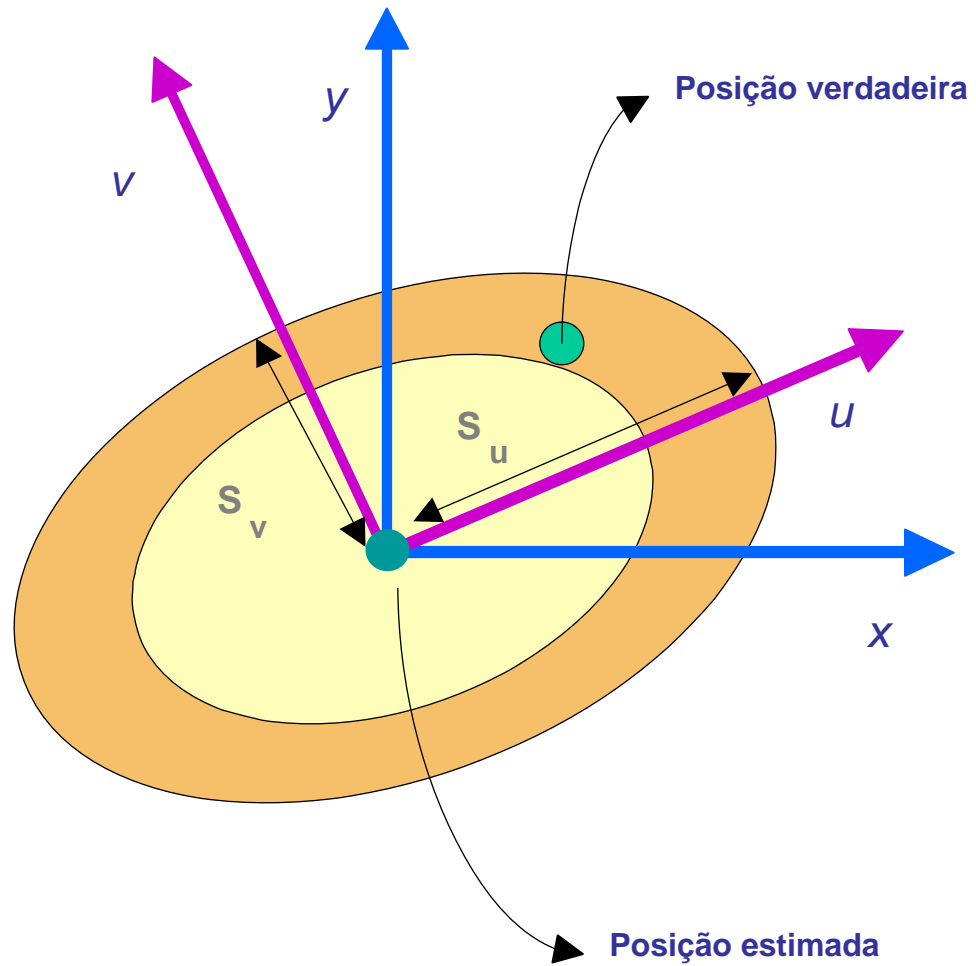
$$q_{uu} = q_{xx} \sin^2(t) + 2q_{xy} \cos(t) \sin(t) + q_{yy} \cos^2(t)$$

$$q_{vv} = q_{xx} \cos^2(t) + 2q_{xy} \cos(t) \sin(t) + q_{yy} \sin^2(t)$$

$$S_u = S_0 \sqrt{q_{uu}} \quad , \quad S_v = S_0 \sqrt{q_{vv}}$$

$$S_{u\%} = S_u \sqrt{2F_{(\alpha, 2, r)}}$$

$$S_{v\%} = S_v \sqrt{2F_{(\alpha, 2, r)}}$$



Planeamento, Observação e Apresentação de Resultados

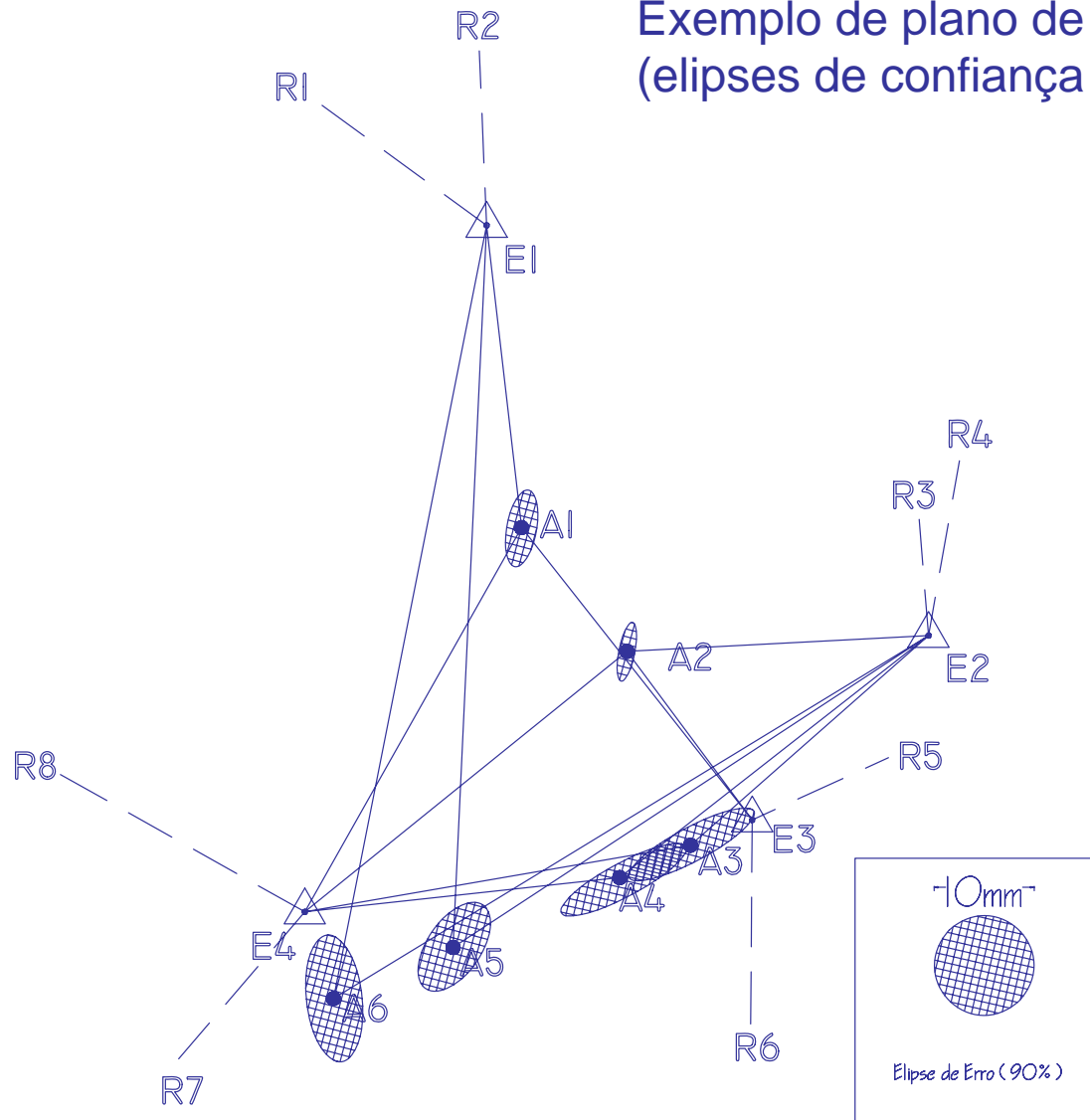
Um sistema de observação de uma obra por métodos topográficos deve oferecer:

- elevada precisão;
- elevada fiabilidade;
- estimativas de erro que permitam suportar decisões de actuação sobre a obra;
- apresentação de resultados em tempo útil.

A elevada exactidão obtém-se à custa de equipamento adequado mas, em igual medida, com adequado tratamento estatístico das observações.

A utilização de equipamento de alta precisão minimiza os erros decorrentes do equipamento de observação mas não resolve as causas de erro externas, sejam ambientais, de materialização e colocação do equipamento ou de natureza humana.

Exemplo de plano de observação (elipses de confiança estimadas)



PRECISÕES TÍPICAS DE EQUIPAMENTO DE MEDIÇÃO

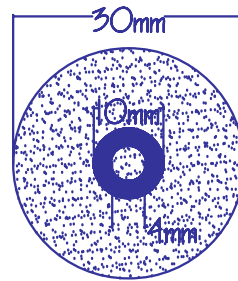
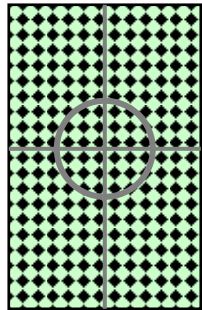
ESTAÇÃO TOTAL

- Ângulos : emq 3 dmgon
- Distâncias : emq 1mm + 1 ppm

NÍVEL

- Desnível: emq 1 mm por km

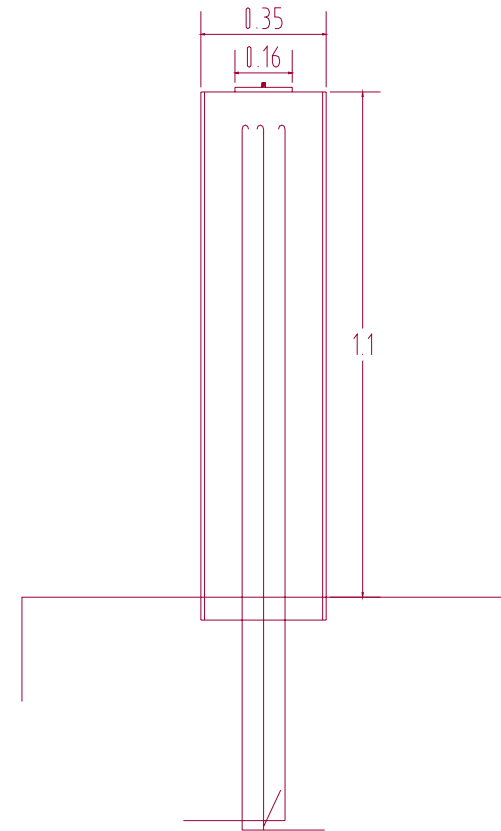
MATERIALIZAÇÃO



Alvos

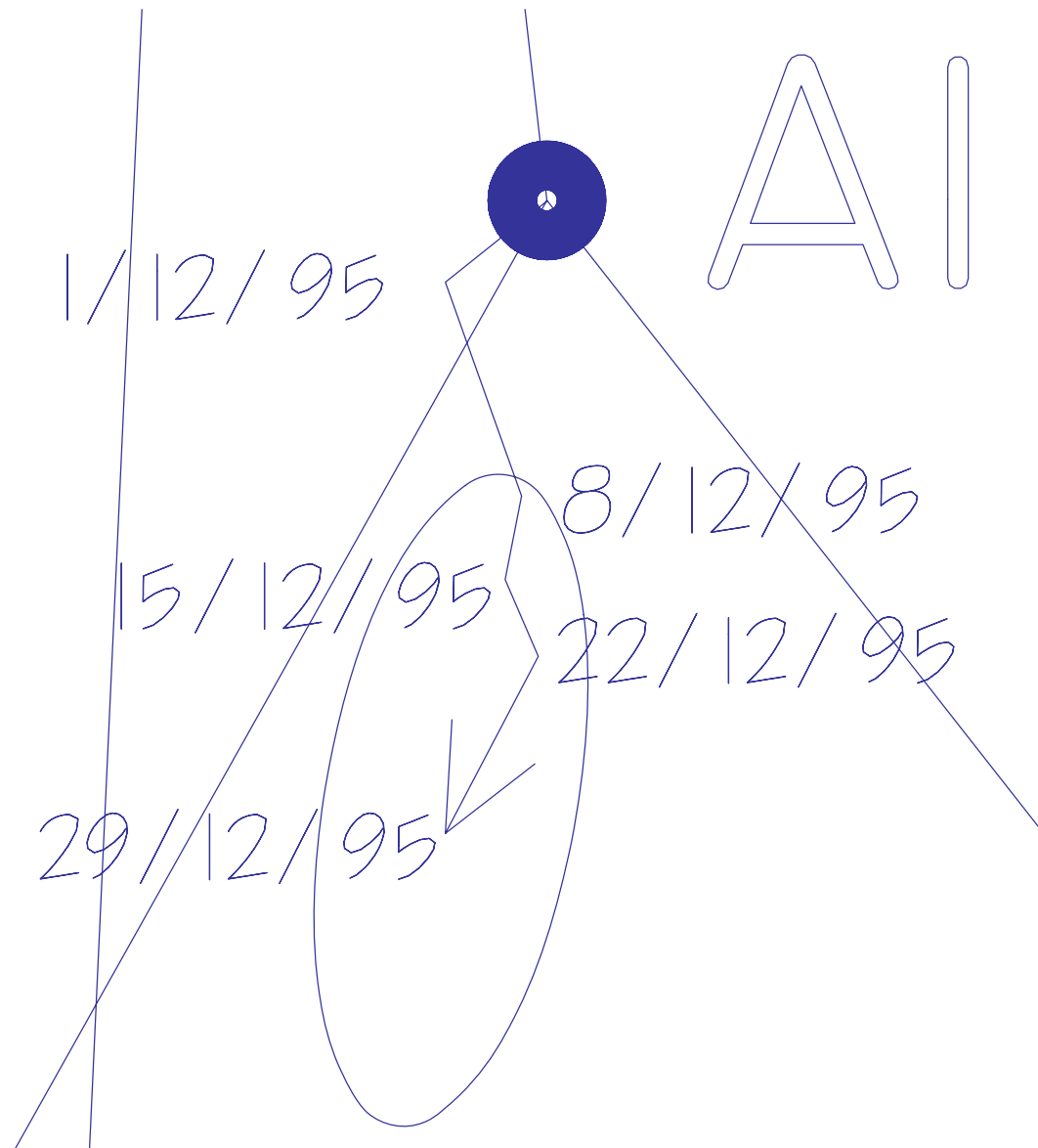


Marcas de nivelamento



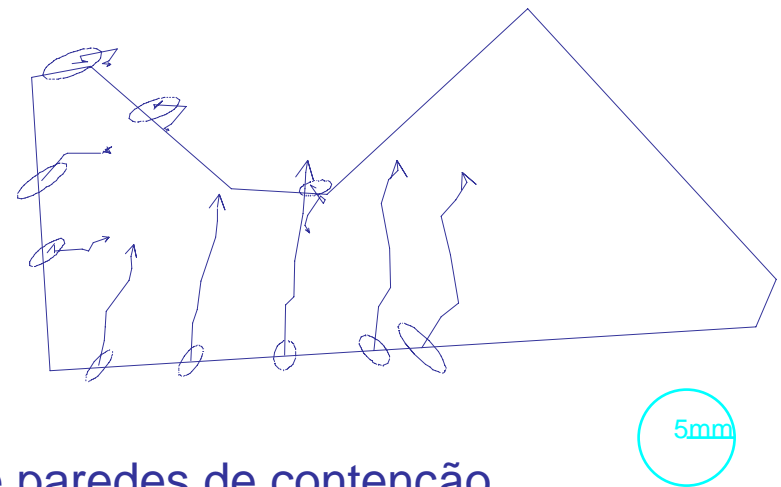
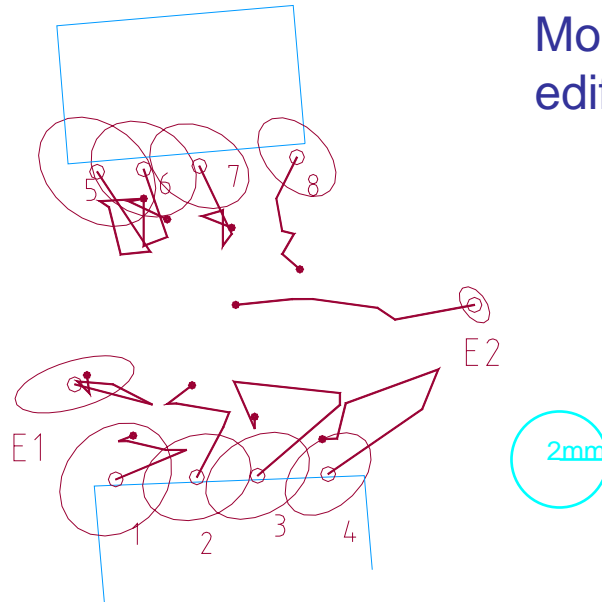
Pilar

Apresentação de resultados



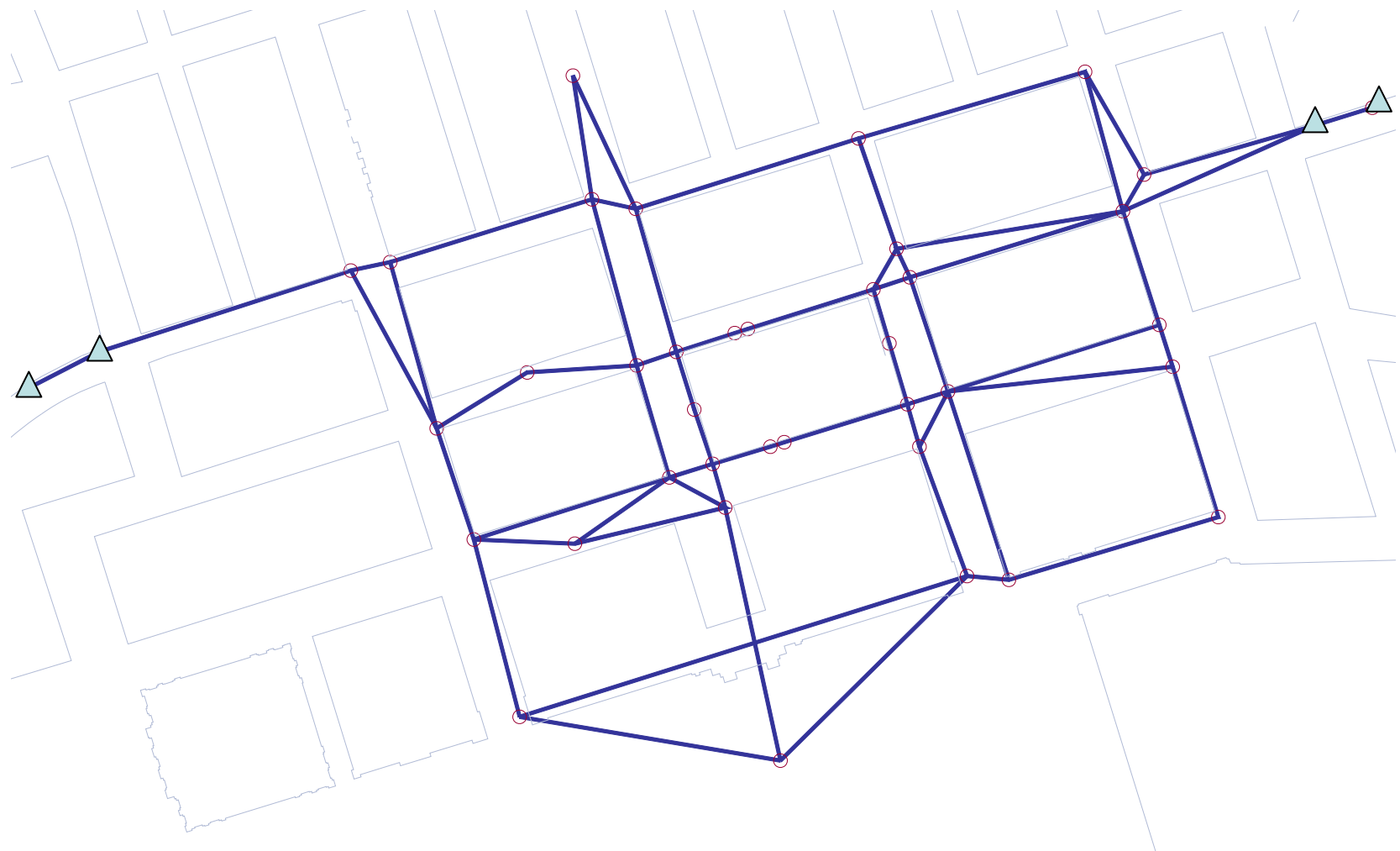
APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Monitorização dos alçados laterais de dois edifícios confinantes a obra de escavação.



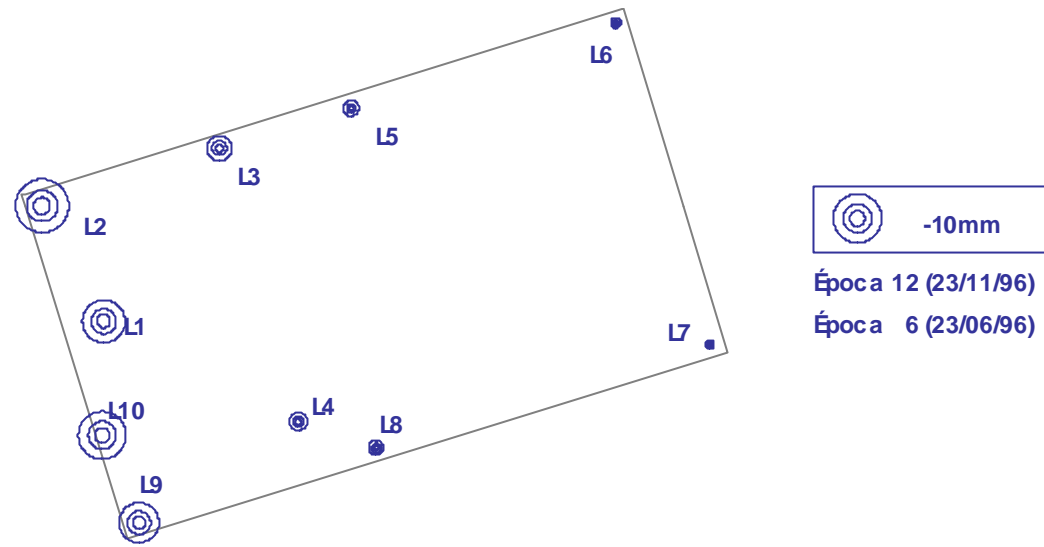
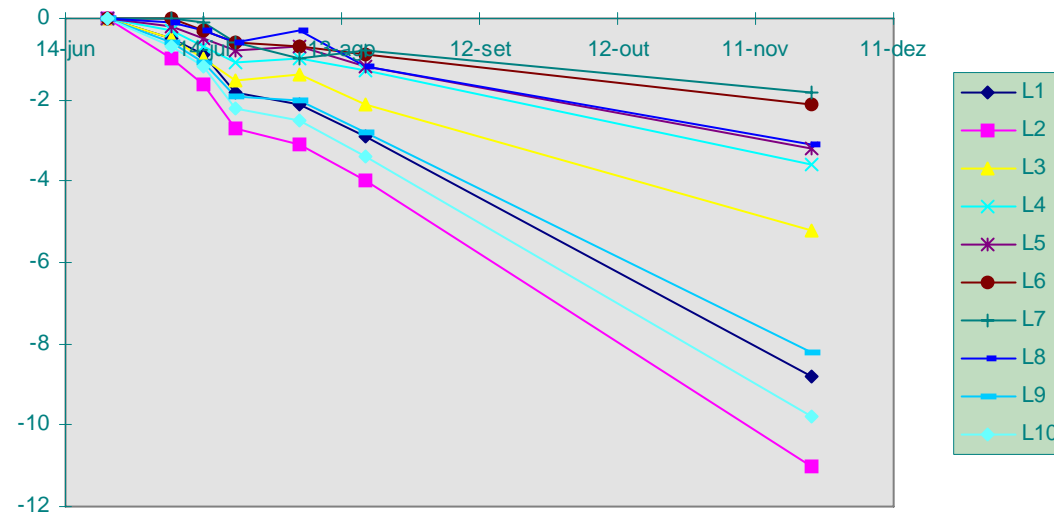
Monitorização de paredes de contenção (tipo Berlim) no decurso da escavação.

Rede de nivelamento



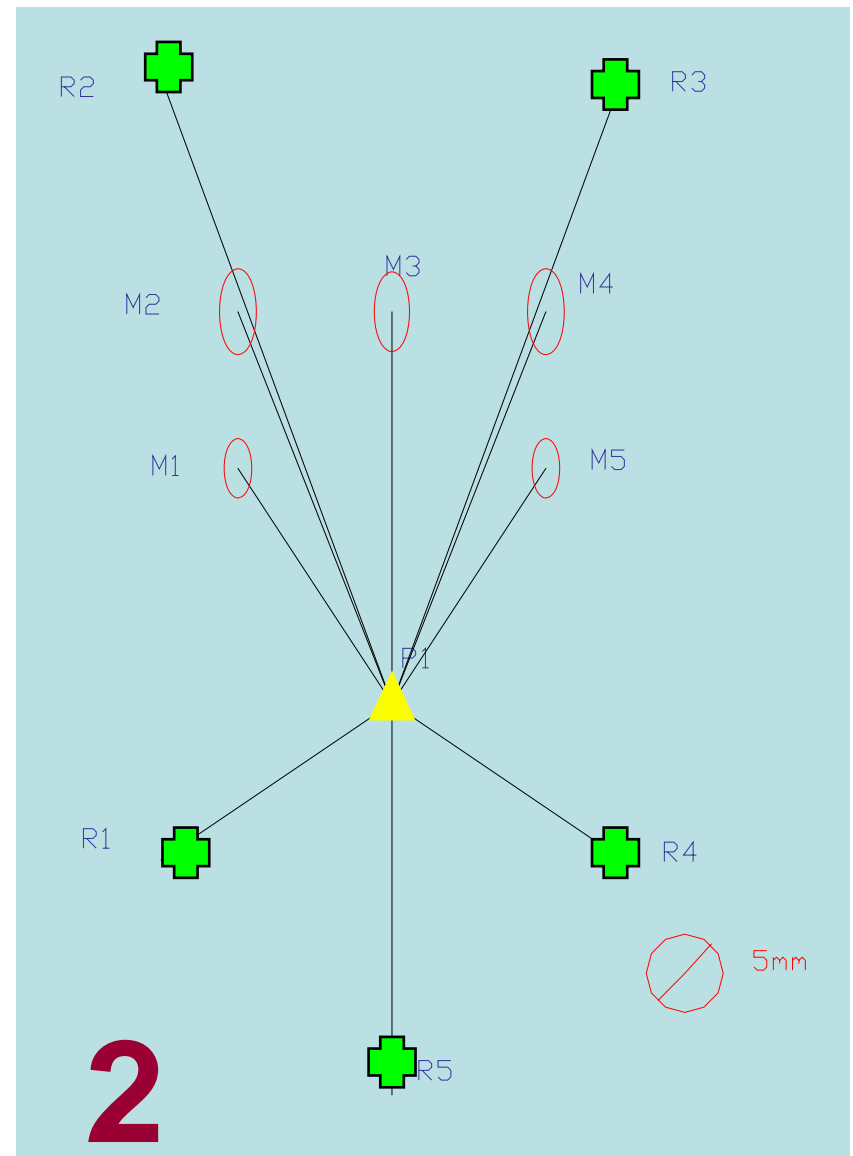
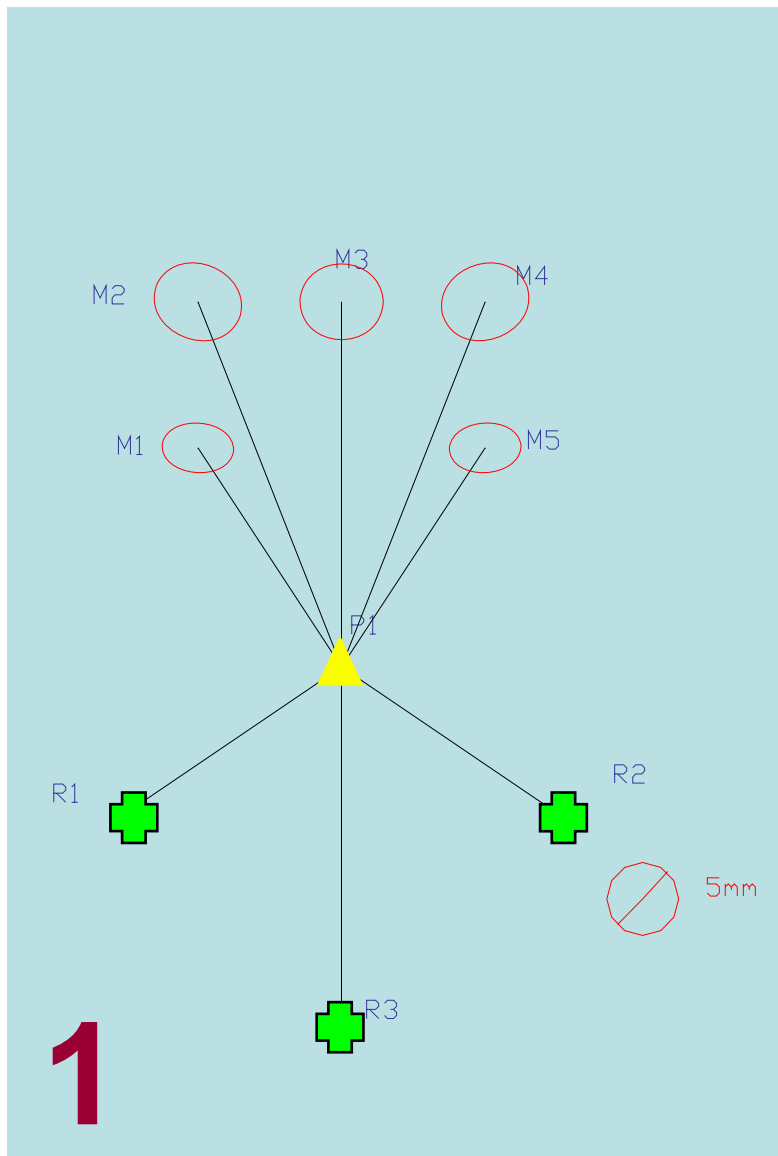
△ Pontos estáveis

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

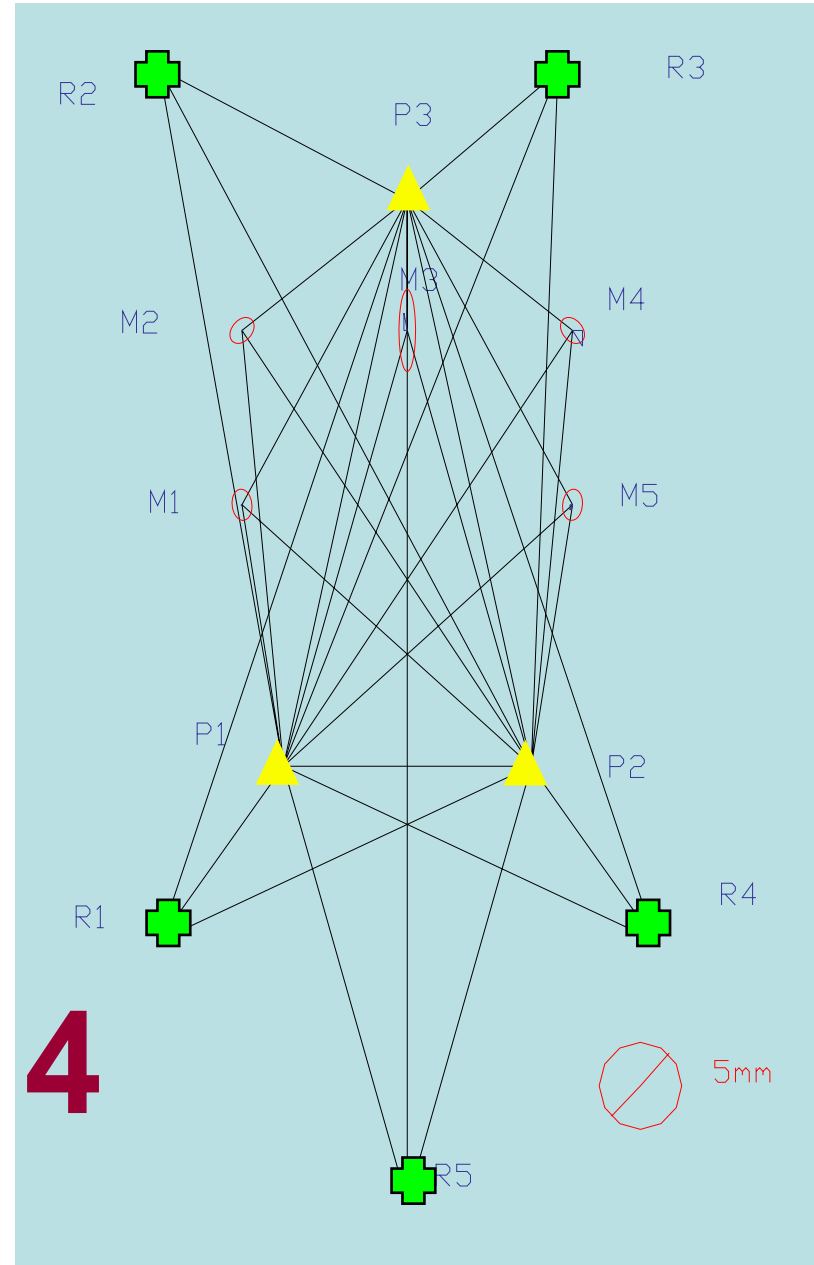
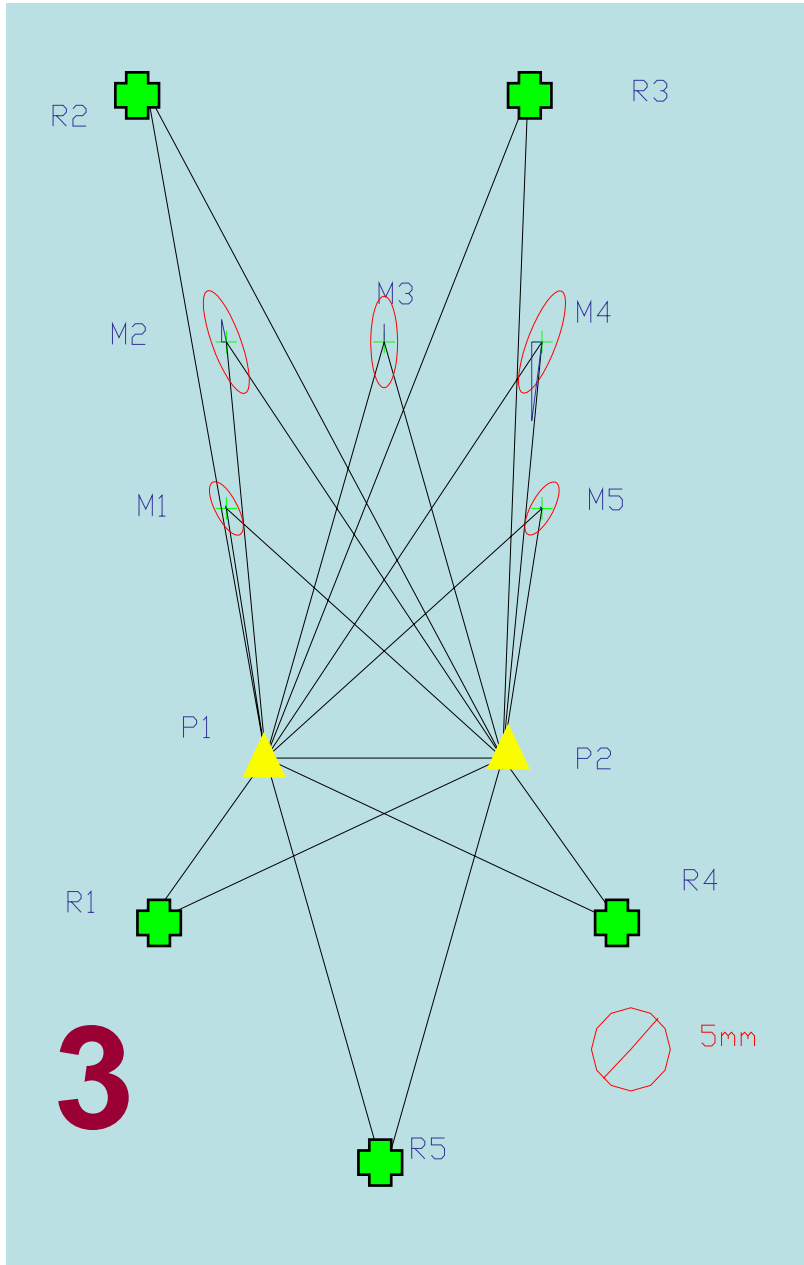


Parte de rede de nivelamento abrangendo as caves de um edifício em Lisboa.

Ilustração de Estudo para um Plano de Observação



Observando ângulos e distâncias



Observando ângulos

	DX	DY		DX	DY
P1	0.0	0.4	P1	-0.1	0.3
P2	-0.2	0.3	P2	0.0	0.2
P3	-0.4	-0.1	P3	-0.5	-0.1
M1	0.0	-0.3	M1	-0.1	-0.1
M2	0.1	0.1	M2	0.1	0.1
M3	-0.3	1.0	M3	-0.4	2.0
M4	-0.6	0.0	M4	1.2	-1.8
M5	-0.4	-0.6	M5	-0.3	-0.6

Erro introduzido
artificialmente em
R1,P1,M4

Resultados com o erro

Resultados sem o erro
(mm)

R1	P1	M1	4.6	6.5	1.9
R1	P1	M2	2.0	9.9	7.9
R1	P1	R2	3.0	8.4	5.4
R1	P1	P3	1.2	5.9	4.7
R1	P1	M3	2.3	-0.8	-3.1
R1	P1	R3	15.8	9.8	-6.0
R1	P1	M4	55.3	32.1	-23.2
R1	P1	M5	7.6	16.3	8.7
R1	P1	P2	1.5	10.6	9.1
R1	P1	R4	11.8	11.1	-0.7
R1	P1	R5	5.0	7.2	2.2

RESÍDUO

4

Erro reflectido nos resíduos (dmgon)

	DX	DY
P1	0.0	0.5
M1	-0.6	0.2
M2	-0.8	0.2
M3	-0.6	0.5
M4	-1.0	0.9
M5	-0.5	0.8

Resultados sem o erro
(mm)

	DX	DY
P1	-0.4	1.2
M1	-1.4	1.1
M2	-1.6	1.2
M3	-1.2	1.7
M4	13.1	-3.7
M5	-0.8	2.0

Resultados com o erro

Erro introduzido
artificialmente em
R1,P1,M4

RESÍDUO

R1	P1	M2	2.0	2.5	0.5
R1	P1	M3	3.0	3.5	0.5
R1	P1	M4	61.2	61.7	0.5
R1	P1	M5	1.8	2.3	0.5
R1	P1	R2	12.3	11.3	-1.0

Erro reflectido nos resíduos (dmgon)

(Neste caso o erro traduz-se em
deslocamento e não é detectado)

1

Questões de consolidação e revisão de conhecimentos

Em que circunstâncias um erro de observação não é detectável por análise dos resíduos ?

Quais os factores que podem ser objecto de ensaio na elaboração de um plano de observação e quais as formas de apreciação do resultado desses ensaios ?

Qual a vantagem de utilizar equações de centro para os pontos de referência em vez de os excluir dos parâmetros a estimar ?

Porque se pode fazer o planeamento de uma rede sem recorrer a observações ?

Sugestões de Pesquisa

Adjustment Computations – Spatial Data Analysis

Charles Ghilani, Paul Wolf. Ed. John Wiley & Sons. 4ª Edição, 2006

Exercícios

1. Numa operação de nivelamento geométrico com vista à determinação das altitudes dos pontos 2, 3 e 4 dispõe dos seguintes dados:

$$h_1 = 100,000\text{m}$$

$$h_{12} = 1,003\text{m} \quad h_{23} = 2,456\text{m} \quad h_{34} = -1,050 \quad h_{41} = -2,417\text{m} \quad h_{24} = 1,415\text{m}$$

Determine as altitudes dos pontos 2, 3 e 4.