# Introdução à Teoria de Grafos e Topologia em SIG

João Matos
Departamento de Engenharia Civil e Arquitectura

(Versão 1.0) – 22 Outubro 2007

# Motivação

A teoria de grafos no contexto dos sistemas de informação geográfica intervém a dois níveis:

-Nas estruturas de dados, nomeadamente na optimização do acesso e da operação com ficheiros gráficos e na construção de topologia de polígonos e de arcos

-Na modelação e na análise de fenómenos com natureza de rede, como redes viárias e redes hidrgráficas.

# Conceitos Fundamentais

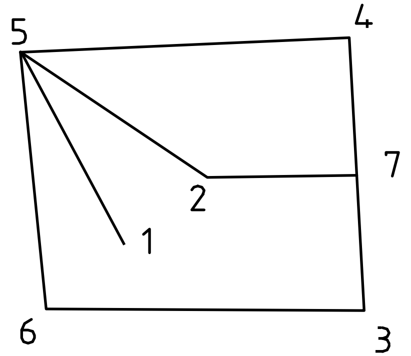
**Um grafo G=(N,A) consiste num conjunto finito N de nós e num conjunto A de arcos.**

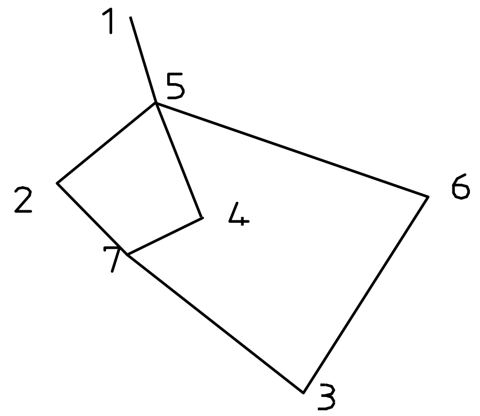
**Os nós representam-se por pontos e os arcos por linhas unindo os nós.**

Diz-se que um nó a é ADJACENTE de b quando existe um arco de a para b.

Um CAMINHO é uma sequência de nós (x1,x2,...,xn) tal que xi é adjacente a xi+1.
Um CIRCUITO é um caminho em que xn=x1.

**Dois grafos dizem-se isomorfos se for possível estabelecer uma correspondência unívoca de tal modo que um par de nós seja adjacente num dos grafos sse o for no outro grafo.**



O grau de um nó é o número de arcos nele incidentes.

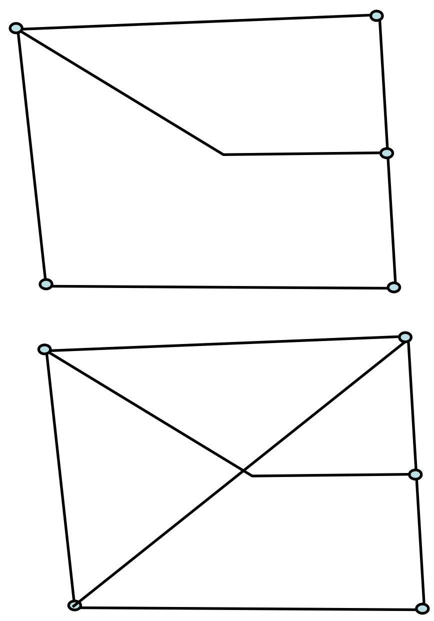
Um sub-grafo é um grafo formado por um subconjunto de arcos e nós de um grafo maior.

Se dois grafos forem isomorfos os sub-grafos correspondentes também o são.

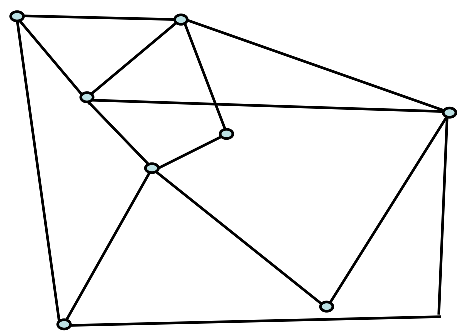
O grau mantém-se no isomorfismo.

**Um grafo diz-se topológico planar se pode ser representado num plano sem que os arcos se intersectem.**

**planar**



**não planar**



**Define-se grafo dual de um grafo planar como o grafo obtido por colocação de um nó em cada face e um arco unindo duas faces adjacentes.**

**Todos os grafos planares podem ser coloridos com quatro cores sem que a mesma cor surja em faces adjacentes.**

**Um grafo planar diz-se conexo se existir um caminho de ligação entre todos os nós.**

**Fórmula de Euler**

**Num grafo planar conexo, para qualquer representação plana**

$$f = a - n + 2$$

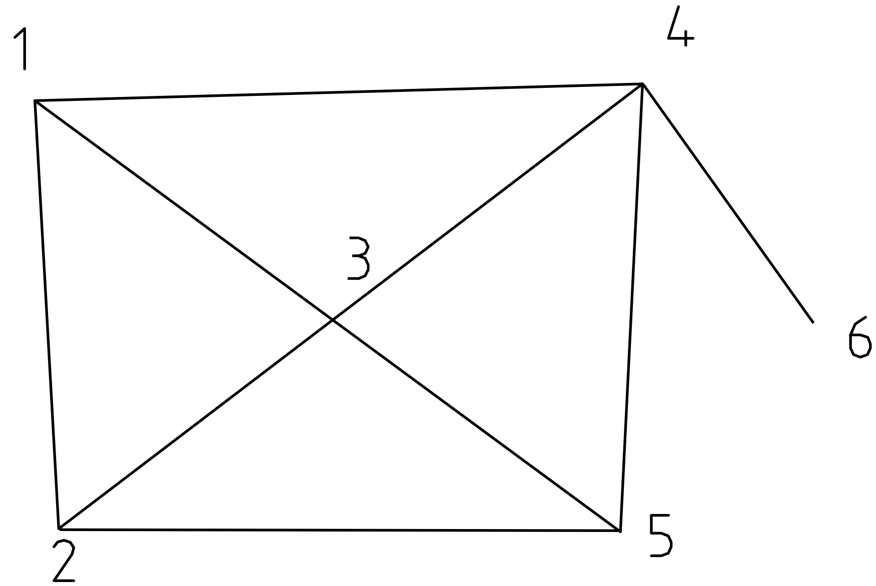
**em que *f* é o número de faces, *a* o número de arcos e *n* o número de nós.**

**Corolário**

**Num grafo planar conexo com $a > 1$ então $a <= 3n - 6$**

## Matriz de Adjacência

**Uma matriz de adjacência tem uma linha e uma coluna para cada vértice. O elemento (i,j)=1 sse o nó $x_i$ for adjacente ao nó $x_k$, tomando o valor 0 no caso contrário.**



| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | 3 |
| 1 | 4 |
| 2 | 1 |
| 2 | 3 |
| 2 | 5 |
| 3 | 1 |
| 3 | 2 |
| 3 | 4 |
| 3 | 5 |
| 4 | 1 |
| 4 | 3 |
| 4 | 5 |
| 4 | 6 |
| 5 | 2 |
| 5 | 3 |
| 5 | 4 |
| 6 | 4 |

**Lista de Adjacência**

Só os nós adjacentes.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 4 |
| 4 | 1 |
| 5 | 3 |
| 6 | 5 |
| 7 | 1 |
| 8 | 2 |
| 9 | 4 |
| 10 | 5 |
| 11 | 1 |
| 12 | 3 |
| 13 | 5 |
| 14 | 6 |
| 15 | 2 |
| 16 | 3 |
| 17 | 4 |
| 18 | 4 |

**Conjunto de Listas de Adjacência**

Listas de adjacências para cada vértice e uma lista de índices.

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 7 |
| 4 | 11 |
| 5 | 15 |
| 6 | 18 |
| 7 | 19 |

## Circuitos de Euler

**Um circuito de Euler é um circuito que percorre todos os arcos de um grafo uma vez e todos os nós pelo menos uma vez.**

**Em aplicações de circuitos de Euler surgem arcos distintos partilhando os mesmos dois nós. Estes grafos designam-se por MULTIGRAFOS.**

**Um multigrafo possui um circuito de Euler sse for conexo e tiver todos os nós de grau par.**

## Circuitos e Caminhos de Hamilton

Circuitos e caminhos que passam em todos os nós uma vez.

Se um nó x tiver grau 2, ambos os arcos incidentes fazem parte de um circuito de Hamilton.
Nenhum subcircuito (que não contenha todos os nós) pode ser formado durante a construção de um circuito de Hamilton.
Uma vez que o circuito de Hamilton passe num nó x, todos os arcos incidentes em x e não utilizados podem ser apagados.

## Árvores

Uma árvore é um grafo com um vértice designado por raiz e em que existe um caminho único da raiz para qualquer outro vértice.

O pai de x é o único nó y com arco para x no caminho da raiz para x.
Inversamente x é filho de y.

Nós sem filhos designam-se por folhas os outros designam-se por nós internos.
Se cada nó interno tiver m-filhos a árvore designa-se por “m-tree”. Se m=2 é uma “binary tree”.

Se uma “m-tree” tiver i nós tem mi+1 nós no total.

# Redes e Algoritmos sobre Redes

**Por rede entende-se um grafo com um número inteiro k(a) associado a cada arco.**

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

## Spannning Tree

**Uma "spanning tree" de um grafo é um subgrafo que contem todos os vértices.**

**Uma spanning tree pode ser construída com prioridade à profundidade ou prioridade à dispersão.**

**Se for possível construir uma spanning tree então o grafo é conexo.**

## Algoritmo de Prim

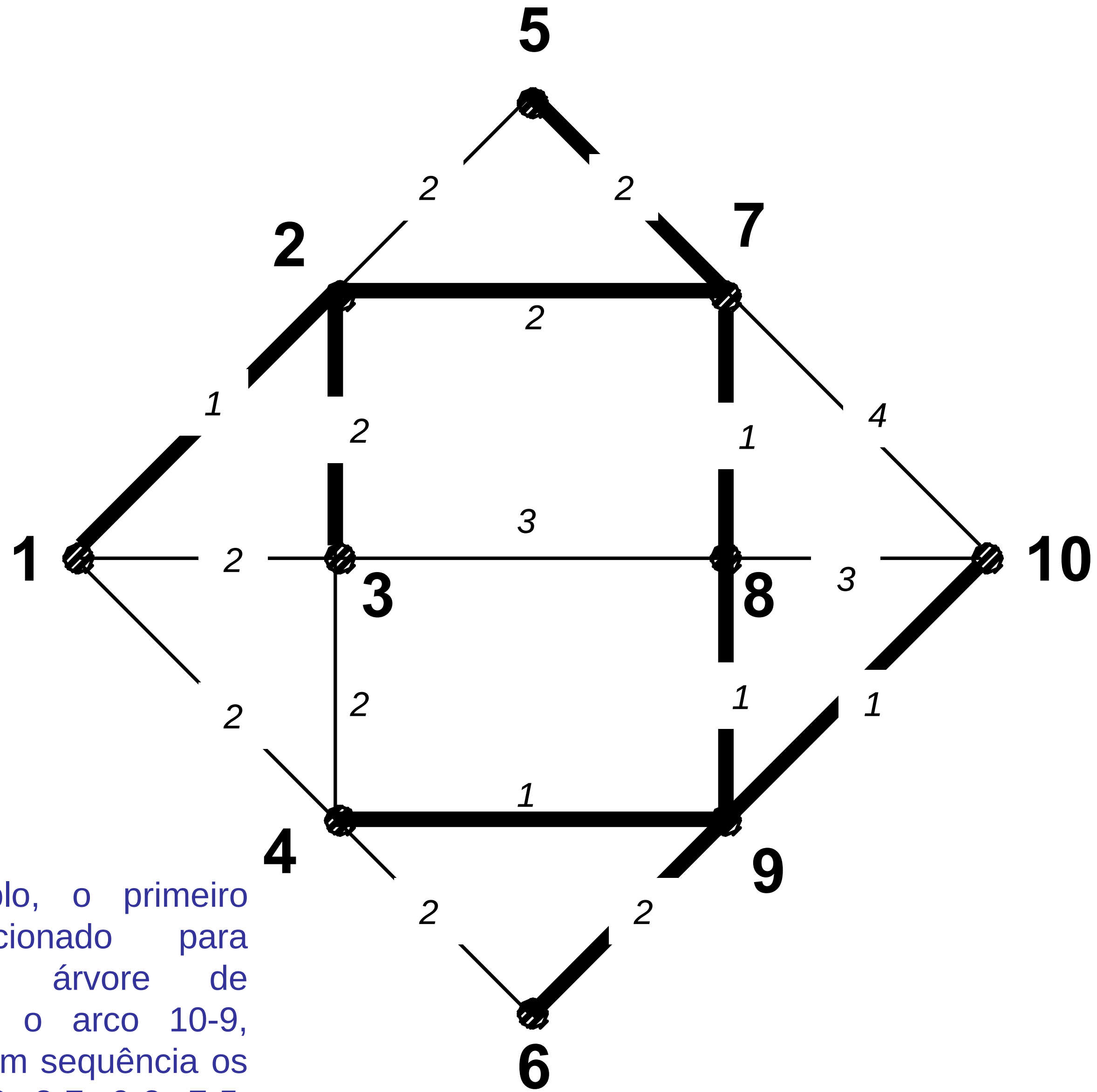
Seja n o número de nós de uma árvore T.

1 - escolha-se qualquer um dos arcos de menor comprimento de T

2 - Repita-se o seguinte passo até que a árvore T tenha n-1 arcos:

juntar a T o arco mais curto entre um vértice de T e um vértice não pertencente a T.

O resultado é uma “spanning tree” de comprimento mínimo.




Neste exemplo, o primeiro arco seleccionado para constituir a árvore de dispersão foi o arco 10-9, seguiram-se em sequência os arcos 9-4, 9-8, 8-7, 9-2, 7-5, 7-2, 2-1 e 2-3.

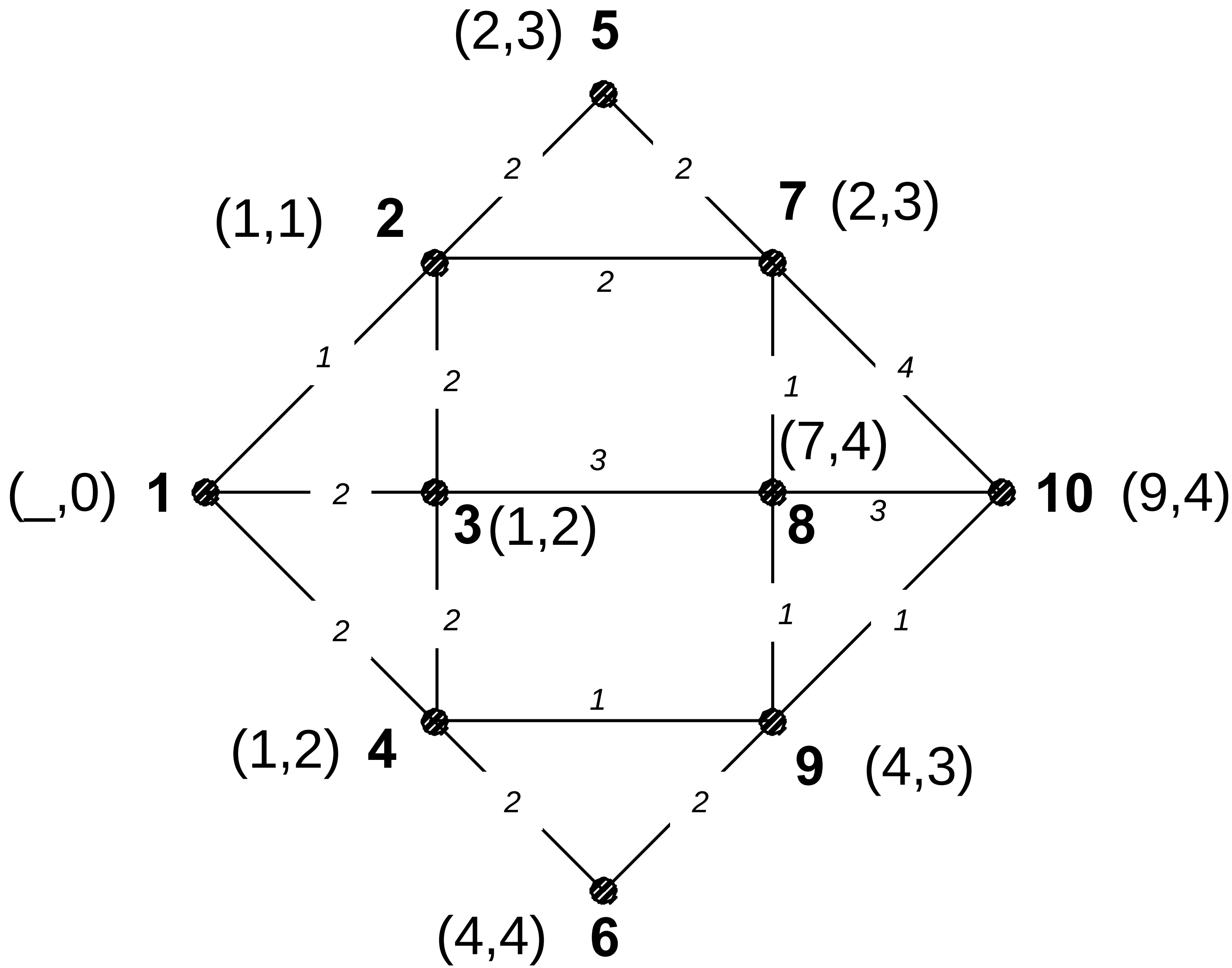
## Algoritmo de Dijkstra

1- Faça-se m=1 e rotule-se um nó i com (_,0).

2 - verifique-se cada arco a=(p,q) sendo p um nó rotulado com (r,d(p)) e q um nó não rotulado. Se d(p)+k(a)=m então rotule q com (p,m).

3 - Se ainda houver nós por rotular voltar ao passo dois, caso contrário passar ao passo 4.

4 - Para qualquer nó y, o caminho mais curto de i para y tem comprimento d(y). O caminho pode determinar-se recuando utilizado a primeira parte do rótulo.


(2,3) 5
2
2
(1,1) 2
7 (2,3)
2
1
2
1
4
(7,4)
3
(_,0) 1
2
3 (1,2)
8
3
10 (9,4)
2
2
1
1
1
(1,2) 4
9 (4,3)
2
2
(4,4) 6

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

## Algoritmo de Floyd

Para obter as distâncias entre quaisquer dois vértices i e j.

$d_{ij}$= "infinito"

Para k de 1 a n
  Para i de 1 a n
    Para j de 1 a n
      Se $d_{ik}+d_{kj}<d_{ij}$ então $d_{ij} = d_{ik}+d_{kj}$

no fim, $d_{ij}$ será a distância mais curta de i para j.

**Fluxo**

**Sejam In(x) e Out(x) os conjuntos de arcos orientadas respectivamente para e de um nó x. Define-se fluxo Φ"a-z" na rede orientada N uma função inteira definida para cada arco i - Φ(i) é o fluxo no arco i - juntamente com uma fonte *a* e um escoadouro *z, satisfazendo as seguintes três condições:***

$$0 \leq \phi(i) \leq k(i)$$

$$\phi(i) = 0 \ se \ i \in In(a) \ ou \ i \in Out(z)$$

$$Para \ x \neq a, z \quad \sum_{i \in In(x)} \phi(i) = \sum_{i \in Out(x)} \phi(i)$$

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

## Fluxo máximo numa rede

**1 - Rotule-se o nó *a* com (_, $\infty$ ) e seja *a* o primeiro nó a processar.**

**2 - Seja p o nó em processamento, rotulado com D(*p*).**

**2.A - Verificar cada arco "in" i=(*q*,*p*). Se Φ (i)>0 e *q* não está rotulado então rotular *q* com (*p*-,D(*q*)), em que D(*q*) é o mínimo de D(*p*) e f(i).**

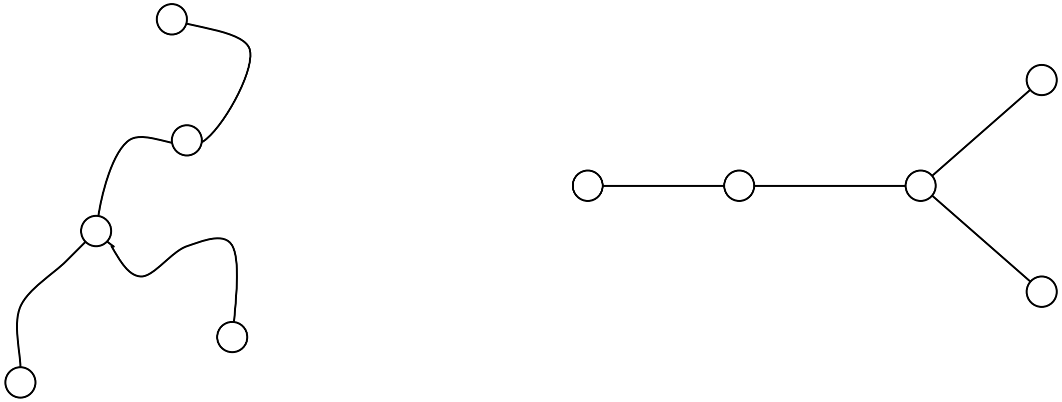
**2.B - Verificar cada arco "out" i=(*p*,*q*), se s(i)=k(i)- Φ(i) >0 e q não está rotulado, então rotular q com (p+,D(q)), em que D(*q*) é o mínimo de D(*p*) e s(i).**

**3 - Se *z* foi rotulado prosseguir para 4. Caso contrário voltar para 2 escolhendo um nó rotulado e não processado. Se não houver mais nós rotulados a processar terminar.**

**4 - Determine-se uma cadeia K retrocedendo de *z* para *a*. Aumentar o fluxo em K de D(*z*) (diminuido no caso de o arco estar orientado negativamente em K).**

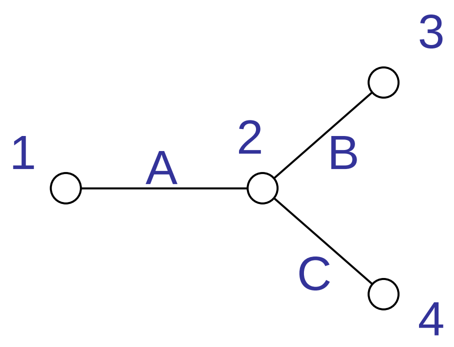
# Topologia em SIG

**Em SIG utiliza-se a representação em grafo associada à representação espacial**

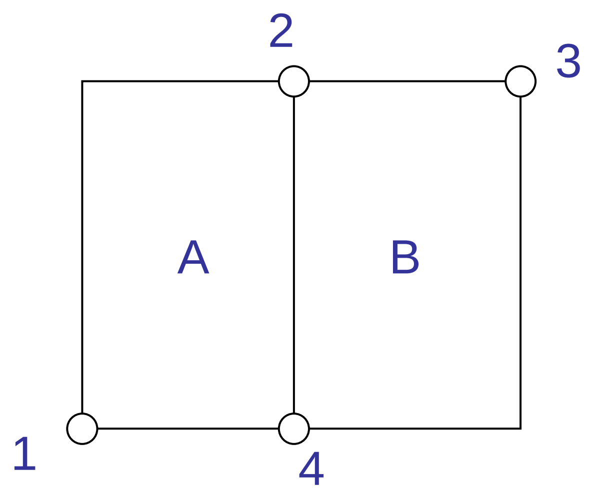


## O grafo associado aos dados espaciais permite armazenar a informação sobre:

- Conectividade
- Adjacência




O arco A está ligado aos arcos B e C através do nó 2.

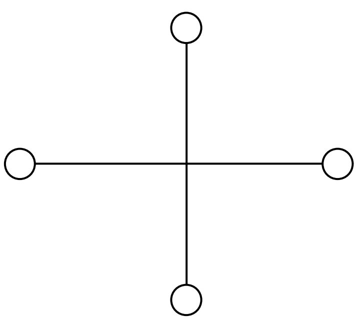



O polígono A é adjacente ao polígono B, partilham o mesmo arco (2,4). O polígono A está à direita do arco (2,4) e o polígono B à esquerda. Ambos os polígonos partilham arcos com o polígono universo.

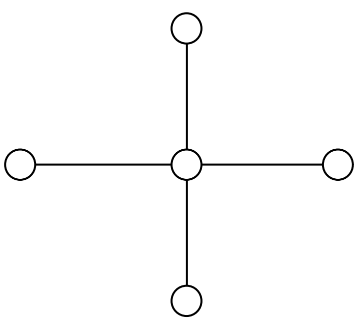
A topologia de arcos é construída associando cada elemento gráfico espacial a um arco, sendo os seus extremos associados a nós.

Os elementos gráficos podem sobrepor-se sem que existam nós.

A conectividade existe unicamente quando um mesmo nó é partilhado por dois arcos

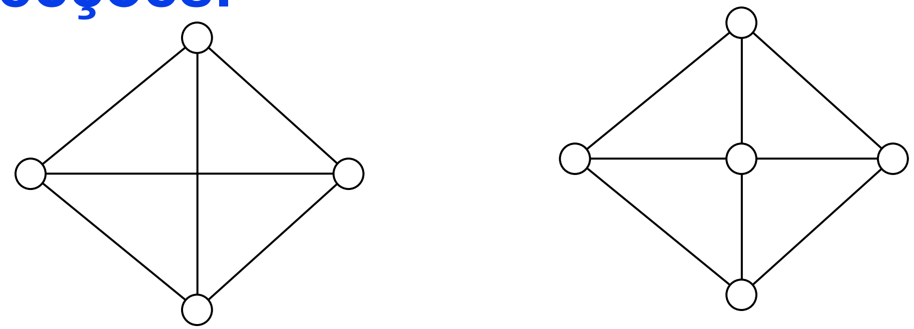


Os dois arcos não estão conectados



A introdução de um nó na intersecção gera 4 arcos conectados

# A construção de uma topologia de polígonos requer que a quebra de todos os elementos gráficos espaciais nas intersecções.



A sobreposição de arcos sem a existência de um nó não permite a criação da topologia de polígonos

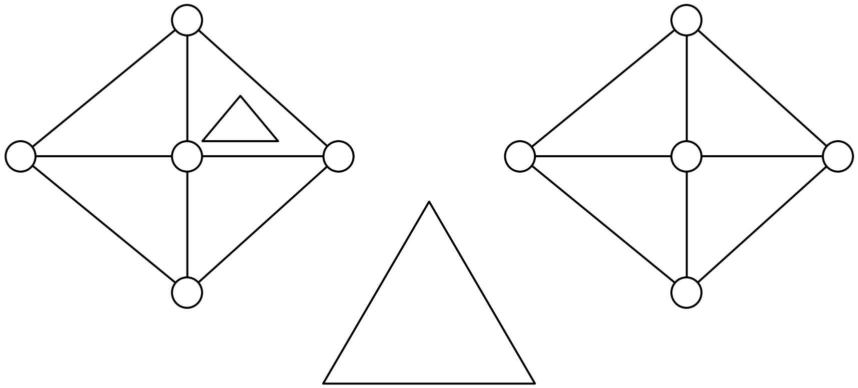
A introdução de um nó na intersecção permita a criação de topologia.

Os nós de grau 2 podem ser eliminados e os arcos correspondentes unidos num só

Os arcos ligados a nós de grau 1 não farão parte de qualquer polígono e podem ser removidos

Um arco é obrigatoriamente partilhado por dois, e só dois, polígonos

Para a determinação de polígonos podem ser retirados do grafo os arcos ligados a nós de grau 1 que não farão parte de qualquer polígono (com excepção de arcos que terminem no nó de partida, que constituem automaticamente um polígono). O algoritmo inicia-se pela pesquisa de sub-grafos conexos, de onde resulta a identificação de polígonos-ilha e de zonas completamente disjuntas. Para cada sub-grafo são determinados os invólucros exteriores, fronteira exterior de cada sub-grafo conexo.



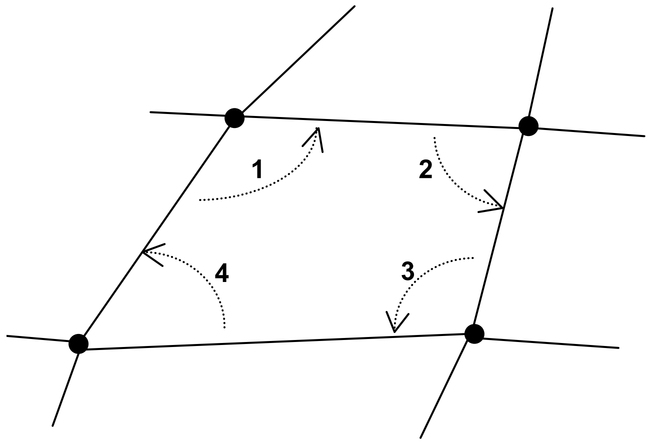
O processo de obtenção de cada polígono é realizado para cada invólucro exterior. A ideia base do algoritmo consiste no progressivo “descasque” de cada invólucro exterior, por remoção de polígonos.

Cada arco só pode fazer parte de, no máximo, dois polígonos e como foram previamente retirados os arcos ligados a nós de grau 1, todos os arcos remanescentes farão parte de dois polígonos.

Assim, os arcos são rotulados com o número de polígonos a que pertencem, começando por rotular com o valor 1 todos os que pertencem a um invólucro exterior.

Para cada invólucro exterior, o processo tem os seguintes passos:

1. inicia-se o processamento num dos nós pertencentes ao invólucro exterior e selecciona-se o arco que dele sai, também pertencente ao invólucro exterior, e identifica-se o segundo nó desse arco;
2. a partir desse segundo nó, identifica-se por varrimento angular qual o arco que dele sai e que perfaz o menor ângulo interior com o arco anterior (com prioridade a arcos que não pertençam ao invólucro exterior);
3. procede-se para o segundo arco e restantes da mesma maneira que para o primeiro, até retornar ao nó inicial (os arcos assim encontrados definem um polígono e os rótulos são incrementados de uma unidade);
4. os arcos com rótulo 2 são retirados do processamento e reinicia-se o processo no primeiro nó, até que não existam mais arcos a si ligados e que permaneçam disponíveis;
5. passa-se então a outro nó do novo invólucro exterior (resultante da remoção de um polígono);
6. o processo termina, para um dado invólucro exterior, quando todos os nós tiverem sido processados. Após todos os invólucros terem sido processados, o seu relacionamento espacial é testado por forma a determinar as situações de inclusão.



# Considerações Gerais

Os valores dos parâmetros de transformação entre data dependem do conjunto de pontos (cujas coordenadas têm uma incerteza associada) utilizados na sua estimativa.

A transformação de Bursa-Wolf é a que pressupõe menos simplificações e, portanto, se existirem disponíveis pontos de coordenadas conhecidas em ambos os sistemas em quantidade suficiente, é a transformação mais exacta.

As transformações polinomiais são mais adequadas a sistemas locais ou aplicadas a pequenas áreas, uma vez que nã oreflectem toda a complexidade da mudança de datum e da distorsão associada a uma projecção cartográfica. São também adequadas à transformação directa de representações geográficas das quais não se conhece o datum ou que apresentam erros geométricos não atribuíveis a uma diferença no sistema de referência.

# Questões de consolidação e revisão de conhecimentos

Porque razão os arcos têm que ser quebrados nas intersecções para a criação de uma topologia de polígonos ?

Que vantagens existem na utilização de uma estrutura de dados geométrica associada a uma estrutura topológica ?

# Sugestões de Pesquisa

Wilson,R. – Introduction to Graph Theory. Ed. Prentice Hall, 1996 (4ª ed.)

# Exercícios

No grafo indicado determine:

-A árvore de dispersão de comprimento mínimo;
-O trajecto mais curto de 1 para 6;
-O conjunto de nós que podem ser acedidos com custo igual ou inferior a 5 .