Probabilidades e Estatística

LEE, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LERC, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

1º semestre – 2018/2019
17/11/2018 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Um robô emite um feixe radiante em direção a uma porta e classifica a porta ou como *aberta* ou como *fechada* em função da intensidade do feixe refletido. Na fase de treino do robô, constatou-se que este classifica a porta como aberta quando a porta está efetivamente aberta (respetivamente fechada) em 60% (respetivamente 30%) dos testes efetuados. Admita que a porta está aberta em 50% dos testes efetuados.

(a) Calcule a probabilidade de o robô classificar a porta como aberta num teste. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$A = \{\text{porta está efetivamente aberta}\}$	$P(A) = 0.5$
$F = \{\text{porta está efetivamente fechada}\}$	$P(F) = 1 - P(A) = 0.5$
$C = \{\text{robô classifica a porta como aberta}\}$	$P(C) = ?$
	$P(C \mid A) = 0.6$
	$P(C \mid F) = 0.3$

- **Probabilidade pedida**
  Pela lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \mid A) \times P(A) + P(C \mid F) \times P(F) \\ &= 0.6 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5 \\ &= 0.45. \end{aligned}$$

(b) Obtenha a probabilidade de a porta ter estado efetivamente fechada num teste em que o robô classificou a porta como aberta. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Invocando o teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(F \mid C) &= \frac{P(C \mid F) \times P(F)}{P(C)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.3 \times 0.5}{0.45} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2. Cada dose de um produto químico é submetida a uma operação de purificação num filtro composto por 5 grelhas reativas que actuam de modo independente. É sabido que a proporção de grelhas reativas defeituosas é de 2% e que a operação de purificação é mal sucedida caso o número de grelhas reativas defeituosas no filtro usado seja superior a um.

(a) Obtenha a probabilidade de uma operação de purificação ser bem sucedida e determine a moda do número de grelhas reativas defeituosas num filtro escolhido ao acaso. (3.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = no. de grelhas reativas defeituosas em filtro composto por 5 grelhas

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{binomial}(5, 0.02)$
- **F.p. de X**
  $P(X = x) = \binom{5}{x} \times 0.02^x \times (1-0.02)^{5-x}$, $x = 0, 1, \ldots, 5$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(\text{purificação bem sucedida}) &= P(X \leq 1) \\ &= \sum_{x=0}^{1} \binom{5}{x} \times 0.02^x \times (1-0.02)^{5-x} \\ &= F_{binomial(5,0.02)}(1) \\ &\overset{tabela/calc.}{=} 0.9962. \end{aligned}$$

- **Moda de X**
  Represente-se a moda de X por $mo(X)$. Então

$$mo(X) : P[X = mo(X)] = \max_{x=0,1,\ldots,5} P(X = x).$$

  Atendendo a que

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.98^5 \\ &= F_{binomial(5,0.02)}(0) \\ &\overset{tabela/calc.}{=} 0.9039 \quad > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  é seguramente superior a qualquer dos restantes valores da f.p. de X, temos $mo(X) = 0$.
  [**Alternativamente**,

$$mo = mo(X) \in \{0, 1, \ldots, 5\} \quad : \quad \begin{cases} P(X = mo) \geq P(X = mo - 1) \\ P(X = mo) \geq P(X = mo + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P(X=mo)}{P(X=mo-1)} \geq 1 \\ \frac{P(X=mo+1)}{P(X=mo)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{5!}{mo!(5-mo)!} 0.02^{mo} 0.98^{5-mo}}{\frac{5!}{(mo-1)!(5-mo+1)!} 0.02^{mo-1} 0.98^{5-mo+1}} \geq 1 \\ \dfrac{\frac{5!}{(mo+1)!(5-mo-1)!} 0.02^{mo+1} 0.98^{5-mo-1}}{\frac{5!}{mo!(5-mo)!} 0.02^{mo} 0.98^{5-mo}} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5-mo+1}{mo} \frac{0.02}{0.98} \geq 1 \\ \frac{5-mo}{mo+1} \frac{0.02}{0.98} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - mo + 1 \geq 49mo \\ 5 - mo \leq 49mo + 49, \end{cases}$$

$$\begin{cases} mo \leq \frac{6}{50} = 0.12 \\ mo \geq -\frac{44}{50} = -0.88, \end{cases}$$

  i.e., $mo = mo(X) = 0$.]

(b) Calcule a probabilidade exacta de o número total de grelhas reativas defeituosas em 4 filtros não exceder 2. (2.0)

- **V.a.**
  X_i = número de grelhas reativas defeituosas no filtro i, $\quad i = 1, \ldots, 4$

  $X_i \overset{indep.}{\sim} \text{binomial}(5, 0.02)$, $\quad i = 1, \ldots, 4$
- **V.a. de interesse**
  $S = \sum_{i=1}^{4} X_i$ = número total de grelhas reativas defeituosas em 4 filtros
- **Distribuição exacta de S**
  S é uma soma de 4 v.a. indep. com dist. binomial com prob. de sucesso comum, logo

$S \sim \text{binomial}(4\times 5,\ 0.02)$.

- **Prob. pedida**

$$P(S \le 2) \;=\; F_{binomial(20,0.02)}(2) \;\overset{tabela/calc}{=}\; 0.9929.$$

Grupo II	10 valores

1. O tempo de vida (em ano) de uma bomba de recirculação de um sistema de aquecimento central é uma variável aleatória X com função de distribuição dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - x\,e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

(a) Calcule a probabilidade de o tempo de vida de uma bomba de recirculação exceder 1 ano. (2.0)

- **V.a.**
  X = tempo de vida (em dias) de bomba de recirculação
- **F.d. de X**

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - x\,e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - F_X(1) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-1} - 1 \times e^{-1}\right) \\ &\simeq e^{-1}(1+1) \\ &\simeq 0.735759. \end{aligned}$$

[**Alternativamente...**
Importa notar que $F_X(x) = 1 - F_{Poisson(x)}(1)$, donde

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - F_X(1) \\ &= 1 - [1 - F_{Poisson(1)}(1)] \\ &= F_{Poisson(1)}(1) \\ &\overset{tabela/calc}{=} 0.7358.] \end{aligned}$$

(b) Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de a média das durações de vida de 100 bombas de recirculação exceder 2 anos, considerando as durações dessas bombas variáveis aleatórias independentes com valor esperado $E(X) = 2$ e variância $V(X) = 2$. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = duração de vida da bomba de recirculação i, $\quad i = 1,\ldots,n$
  $n = 100$
- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1,\ldots,n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = 2, \quad i = 1,\ldots,n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 2, \quad i = 1,\ldots,n$
- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = tempo de vida médio de n bombas de recirculação
- **Valor esperado e variância de $\bar{X}_n$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{(n)^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{(n)^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**

  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{\bar{X}-E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(\bar{X}>2) &= 1-P(\bar{X}\le 2)\\
&= 1-P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\overset{TLC}{\simeq} 1-\Phi\left(\frac{2-2}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}}}\right)\\
&= 1-\Phi(0)\\
&\overset{tabela/calc}{=} 1-0.5\\
&= 0.5.
\end{aligned}$$

2. Em certa loja de componentes para computadores, os números diários de discos rígidos vendidos das marcas A e B são representados pelas variáveis aleatórias X e Y (respectivamente) que possuem função de probabilidade conjunta dada pela tabela seguinte

	Y			
X	0	1	2	3
0	0	c	$2c$	$3c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$

(a) Obtenha a constante c e calcule a probabilidade de, num dia, a marca A ser a mais vendida. (1.5)

- **Par aleatório** (X,Y)

  $X =$ número diário de discos rígidos vendidos da marca A

  $Y =$ número diário de discos rígidos vendidos da marca B

- **Obtenção de** c

  Atendendo à tabela do enunciado, segue-se:

$$\begin{aligned}
c>0 \quad : \quad & \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} P(X=x,Y=y)=1\\
& 42c=1\\
& c=\frac{1}{42}.
\end{aligned}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X>Y) &= P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)\\
&= 2c+4c+5c\\
&= \frac{11}{42}.
\end{aligned}$$

(b) Determine o valor esperado de X condicional a $Y=2$, bem como $E(X)$. (2.5)

Nota: Caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere $c=\frac{1}{42}$.

- **F.p. conjunta e marginais de X e Y**

  $P(X=x,Y=y)$, $P(X=x)=\sum_{y=0}^{3}P(X=x,Y=y)$ e $P(Y=y)=\sum_{x=0}^{2}P(X=x,Y=y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y				$P(X=x)$
	0	1	2	3	
0	0	c	$2c$	$3c$	$6c$
1	$2c$	$3c$	$4c$	$5c$	$14c$
2	$4c$	$5c$	$6c$	$7c$	$22c$
$P(Y=y)$	$6c$	$9c$	$12c$	$15c$	$42c$

- **F.p. de** $X \mid Y=2$

$$\begin{aligned} P(X=x \mid Y=2) &= \frac{P(X=x, Y=2)}{P(Y=2)} \\ &= \begin{cases} \frac{2c}{12c} = \frac{1}{6}, & x=0 \\ \frac{4c}{12c} = \frac{1}{3}, & x=1 \\ \frac{6c}{12c} = \frac{1}{2}, & x=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** $X \mid Y=1$

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=2) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x \mid Y=2) \\ &= 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** X

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times 6c + 1 \times 14c + 2 \times 22c \\ &= 58c \\ &= \frac{29}{21}. \end{aligned}$$

(c) Averigúe se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (1.0)

- **Averiguação de independência**

X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=y, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=0, Y=0) = 0.$$

Por outro lado,

$$P(X=0) \times P(Y=0) \overset{(a)}{=} 6c \times 6c = 36c^2 = \frac{1}{49}.$$

Logo,

$$P(X=0, Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0),$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.

[Alternativamente...

Note-se que caso X e Y fossem v.a. independentes então $(X \mid Y=2)$ e X possuíriam a mesma distribuição e, consequentemente, $E(X \mid Y=2) = E(X)$. Ora,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=2) &= \frac{4}{3} \\ &\neq \\ E(X) &= \frac{29}{21}, \end{aligned}$$

logo X e Y são v.a. DEPENDENTES.]