DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEGI, LEGM, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEC

1º semestre – 2018/2019
17/11/2018 – **09:00**

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. As unidades de sangue para transfusão são recolhidas de dadores regulares e de dadores pontuais nas proporções de 75% e 25%, respetivamente. Sabe-se que, após a recolha, uma unidade de sangue é rejeitada com probabilidade 0.002 quando é recolhida de um dador regular e que a rejeição é cinco vezes mais provável no caso de a unidade de sangue ser proveniente de um dador pontual.

(a) Calcule a probabilidade de uma unidade de sangue, selecionada ao acaso, ser rejeitada. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$D = \{$unidade de sangue de dador regular$\}$	$P(D) = 0.75$
$\overline{D} = \{$unidade de sangue de dador pontual$\}$	$P(\overline{D}) = 1 - P(V) = 0.25$
$R = \{$unidade de sangue ser rejeitada$\}$	$P(R) = ?$
	$P(R \mid D) = 0.002$
	$P(R \mid \overline{D}) = 5 \times 0.002 = 0.01$

- **Probabilidade pedida**
  Pela lei da probabilidade total, tem-se

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R \mid D) \times P(D) + P(R \mid \overline{D}) \times P(\overline{D}) \\ &= 0.002 \times 0.75 + 0.01 \times 0.25 \\ &= 0.004. \end{aligned}$$

(b) Calcule a probabilidade de uma unidade de sangue que foi rejeitada ter sido recolhida de um dador pontual. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Invocando o teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(\overline{D} \mid R) &= \frac{P(R \mid \overline{D}) \times P(\overline{D})}{P(R)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.01 \times 0.25}{0.004} \\ &= 0.625. \end{aligned}$$

2. Na inspeção com reposição de peças provenientes de uma linha de produção é sabido que, em média, é necessário inspecionar 20 peças para se detetar uma com defeito.

(a) Determine o número mínimo de inspeções necessárias para que a probabilidade de se detetar uma peça com defeito seja maior que 0.75. (2.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = no. de peças inspecionadas até surgir a primeira com algum defeito

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Geométrica}(p)$

- **Obtenção de p**
  Como $X \sim \text{Geométrica}(p)$ temos

$$p \quad : \quad E(X) \stackrel{form.}{=} \frac{1}{p}$$
$$20 = \frac{1}{p}$$
$$p = 0.05$$

- **F.p. de X**
  $P(X=x) = (1-0.05)^{x-1} \times 0.05,\ x = 1,2,\ldots$

- **No. mínimo pedido**
  $$k \in \mathbb{N} \quad : \quad P(X \le k) > 0.75$$
  $$\sum_{x=1}^{k} 0.95^{x-1} \times 0.05 > 0.75$$
  $$0.05 \times \frac{1-0.95^k}{1-0.95} > 0.75$$
  $$1 - 0.95^k > 0.75$$
  $$0.95^k < 0.25$$
  $$k > \frac{\ln 0.25}{\ln 0.95} \simeq 27.026815.$$
  Logo o no. mínimo pedido é $\min\{k \in \mathbb{N} : k > 27.0268\} = 28.$

(b) Tendo sido já realizadas 4 inspeções sem ter sido detetada qualquer peça com defeito, qual é a probabilidade de serem necessárias exactamente 3 inspeções adicionais para que surja a primeira peça com defeito? (2.5)

- **Prob. pedida**
  Pela propriedade de falta de memória da distribuição geométrica segue-se
  $$\begin{aligned} P(X = 4+3 \mid X > 4) &= P(X=3) \\ &= 0.95^{3-1} \times 0.05 \\ &= 0.045125. \end{aligned}$$
  [Alternativamente,
  $$\begin{aligned} P(X = 4+3 \mid X > 4) &= \frac{P(X = 4+3, X > 4)}{P(X>4)} \\ &= \frac{P(X=4+3)}{1-P(X \le 4)} \\ &= \frac{0.95^{4+3-1} \times 0.05}{0.95^4} \\ &= 0.95^{3-1} \times 0.05 \\ &= 0.045125 \\ [&\equiv P(X=3).] \end{aligned}$$

Grupo II — 10 valores

1. Num processo de fabrico de parafusos para madeira, a massa dos mesmos possui distribuição uniforme no intervalo [2g, 2.5g]. Os parafusos são vendidos em caixas com 30 unidades.

(a) Calcule a probabilidade de a massa de um parafuso, selecionado ao acaso, ser superior a 2.3g. (1.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = massa (em g) de um parafuso

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Uniforme}(2, 2.5)$

- **F.d.p. de X**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2.5-2} = 2, & 2 < x < 2.5 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X > 2.3) &= \int_{2.3}^{+\infty} f_X(x)\,dx \\ &= \int_{2.3}^{2.5} 2\,dx \\ &= 2x|_{2.3}^{2.5} \\ &= 2 \times (2.5 - 2.3) \\ &= 0.4. \end{aligned}$$

(b) Considerando as massas de diferentes parafusos variáveis aleatórias independentes, calcule a probabilidade aproximada de uma caixa de parafusos pesar menos de 70g. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = massa (em g) do parafuso i, $\quad i = 1,\dots,n$
  $n = 30$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1,\dots,n$
  $E(X_i) = E(X) \overset{form.}{=} \frac{2+2.5}{2} = 2.25, \quad i = 1,\dots,n$
  $V(X_i) = V(X) \overset{form.}{=} \frac{(2.5-2)^2}{12} = \frac{1}{48} = 0.0208(3), \quad i = 1,\dots,n$

- **V.a. de interesse**
  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ = massa total (em g) de n parafusos

- **Valor esperado e variância de S_n**
  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,E(X) = 30 \times 2.25 = 67.5$
  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{X_i\, indep.}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,V(X) = 30 \times \frac{1}{48} = 0.625$

- **Distribuição aproximada de S_n**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(S_n < 70) &= P\left(\frac{S_n - n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}} \le \frac{70 - n\,E(X)}{\sqrt{n\,V(X)}}\right) \\ &\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{70-67.5}{\sqrt{0.625}}\right) \\ &\simeq \Phi(3.16) \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 0.999211. \end{aligned}$$

2. Considere que as variáveis aleatórias X e Y representam o número de *drives* óticas da marca A e da marca B respetivamente, vendidas diariamente em determinado estabelecimento. Admita que a função de probabilidade conjunta de X e Y se representa incompleta e abreviadamente na tabela seguinte:

	Y		
X	0	1	2
0	0.1	0.1	0.2
1	a	0	b

(a) Sabendo que $P(Y = 2 \mid X = 1) = \frac{1}{3}$ mostre que $a = 0.4$ e $b = 0.2$. (1.5)

- **Par aleatório** (X,Y)
  X = número diário de *drives* óticas vendidas da marca A
  Y = número diário de *drives* óticas vendidas da marca B
- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X=x,Y=y)$, $P(X=x)=\sum_{y=0}^{2}P(X=x,Y=y)$ e $P(Y=y)=\sum_{x=0}^{1}P(X=x,Y=y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

X	Y: 0	1	2	$P(X=x)$
0	0.1	0.1	0.2	0.4
1	a	0	b	$a+b$
$P(Y=y)$	$0.1+a$	0.1	$0.2+b$	1

- **Obtenção de** a **e** b

$$(a,b)\quad:\quad \begin{cases} 0.4+a+b=1 \\ P(Y=2\mid X=1)=\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a+b=P(X=1)=1-0.4 \\ \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a+b=0.6 \\ \frac{b}{a+b}=\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=0.6-b \\ \frac{b}{0.6}=\frac{1}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} a=0.6-0.2=0.4 \\ b=0.6\times\frac{1}{3}=0.2 \end{cases}$$

(b) Determine o valor esperado de Y condicional a $X=1$. (1.5)

- **F.p. de** $Y\mid X=1$

$$\begin{aligned} P(Y=y\mid X=1) &= \frac{P(X=1,Y=y)}{P(X=1)} \\ &= \begin{cases} \frac{a}{a+b} \overset{(a)}{=} \frac{0.4}{0.6}=\frac{2}{3}, & y=0 \\ \frac{b}{a+b} \overset{(a)}{=} \frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}, & y=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de** $Y\mid X=1$

$$\begin{aligned} E(Y\mid X=1) &= \sum_{y=0}^{2} y\times P(Y=y\mid X=1) \\ &= 0\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(c) Calcule a variância do número total de *drives* óticas das marcas A e B vendidas diariamente no estabelecimento. (2.5)

- **Variância pedida**
  Uma vez que se pretende calcular

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X)+V(Y)+2\times cov(X,Y) \\ &= V(X)+V(Y)+2\times[E(XY)-E(X)\times E(Y)], \end{aligned}$$

serão necessários alguns cálculos auxiliares que envolverão as f.p. conjunta de (X,Y) e marginais de X e Y obtidas na alínea (a).

- **Valor esperado e variância de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{1} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times 0.4 + 1 \times 0.6 \\ &= 0.6 \\ V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \sum_{x=0}^{1} x^2 \times P(X=x) - E^2(X) \\ &= \left(0^2 \times 0.4 + 1^2 \times 0.6\right) - 0.6^2 \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

[Alternativamente, $X \sim$ Bernoulli(0.6) logo $E(X) \stackrel{form}{=} 0.6$ e $V(X) \stackrel{form}{=} 0.6 \times (1-0.6) = 0.24$.]

- **Valor esperado e variância de Y**

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{2} y \times P(Y=y) \\ &= 0 \times 0.5 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 \\ &= 0.9 \\ V(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= \sum_{y=1}^{2} y^2 \times P(Y=y) - E^2(Y) \\ &= \left(0^2 \times 0.5 + 1^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.4\right) - 0.9^2 \\ &= 1.7 - 0.9^2 \\ &= 0.89 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de XY**

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{2} x\,y \times P(X=x, Y=y) \\ &= 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 2 \times 0.2 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

- **Covariância**

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) \\ &= 0.4 - 0.6 \times 0.9 \\ &= -0.14 \end{aligned}$$

- **Variância pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \times cov(X,Y) \\ &= 0.24 + 0.89 + 2 \times (-0.14) \\ &= 0.85. \end{aligned}$$