DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2016/2017
05/07/2017 – **11:30**

Duração: 90 minutos **1º Teste C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Uma peça de certo tipo é classificada de acordo com a sua dimensão e porosidade. Num grande lote composto por peças deste tipo, verificaram-se as seguintes proporções: 1% têm dimensão inadequada e são porosas; 3% têm dimensão inadequada e não são porosas; 23% não têm dimensão inadequada e são porosas; 73% não são porosas nem têm dimensão inadequada.

(a) Escolhida ao acaso uma peça do lote, calcule a probabilidade de ela ser porosa, sabendo que tem dimensão inadequada. (2.0)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$D = \{$peça com dimensão inadequada$\}$	$P(D) = ?$
$P = \{$peça é porosa$\}$	$P(P) = ?$
$D \cap P = \{$peça tem dimensão inadequada e é porosa$\}$	$P(D \cap P) = 0.01$
$D \cap \overline{P} = \{$peça tem dimensão inadequada e não é porosa$\}$	$P(D \cap \overline{P}) = 0.03$
$\overline{D} \cap P = \{$peça não tem dimensão inadequada e é porosa$\}$	$P(\overline{D} \cap P) = 0.23$
$\overline{D} \cap \overline{P} = \{$peça não tem dimensão inadequada e não é porosa$\}$	$P(\overline{D} \cap \overline{P}) = 0.73$

- **Probabilidade pedida**

Uma vez que

$$\begin{aligned} P(D) &= P(P \cap D) + P(\overline{P} \cap D) \\ &= 0.01 + 0.03 \\ &= 0.04 \end{aligned}$$

segue-se

$$\begin{aligned} P(P \mid D) &= \frac{P(P \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{0.01}{0.04} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(b) A massa de uma peça do tipo referido (escolhida ao acaso) é descrita por uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado 100 g e desvio padrão 2 g. Calcule a probabilidade de a massa total de 25 peças desse tipo, escolhidas ao acaso, ser superior a 2 525 g. (3.0)

- **V.a.**

$X_i =$ massa peça i, $\quad i = 1, \ldots, n$
$n = 25$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**

$X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \ldots, n$
$E(X_i) = E(X) = \mu = 100, \quad i = 1, \ldots, n$
$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = 2^2, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i =$ massa total de n peças

- **Distribuição exacta de S_n**
  S_n é uma combinação linear de n v.a. com distribuição normal, logo S_n também é normalmente distribuída. Com efeito,

  $$S_n \sim \text{Normal}(E(S_n), V(S_n)),$$

  onde

  $$\begin{aligned} E(S_n) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,E(X) = n\,\mu = 25 \times 100 = 2\,500 \\ V(S_n) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} n\,V(X) = n\,\sigma^2 = 25 \times 2^2 = 100 \end{aligned}$$

- **Probabilidade pedida**

  $$\begin{aligned} P(S_n > 2\,525) &= 1 - P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq \frac{2\,525 - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{2\,525 - 2\,500}{\sqrt{100}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) \\ &\overset{tabela/calc}{=} 1 - 0.9938 \\ &= 0.0062. \end{aligned}$$

2. O número de veículos que passam diariamente por certo ponto de Lisboa até se observar o primeiro veículo de fabrico estrangeiro, X, é uma variável aleatória com variância igual a 20. Assuma independência entre as nacionalidades de fabrico dos diferentes veículos que passam nesse ponto.

(a) Justifique que a função de distribuição de X é dada por $P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x$, onde $x = 1, 2, \ldots$ e $p = 0.2$. (1.5)

- **V.a. de interesse**
  X = no. de veículos até se observar o 1o. de fabrico estrangeiro

- **[Hipóteses de trabalho**
  Admitiremos:
  - independência entre as nacionalidades de fabrico dos diferentes veículos que passam nesse ponto;
  - que a probabilidade de o veículo ser de fabrico estrangeiro se mantém constante e igual a p.]

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Geométrica}(p)$.

- **F.p. de X**
  $P(X = x) = (1-p)^{x-1} \times p, \quad x = 1, 2, \ldots$

- **Justificação da f.d. de X**
  Para $x = 1, 2, \ldots$, temos:

  $$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \sum_{m=1}^{x} (1-p)^{m-1} \times p \\ &= \frac{p}{1-p} \times \sum_{m=1}^{x} (1-p)^m \\ &= \frac{p}{1-p} \times (1-p)\,\frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)} \\ &= 1 - (1-p)^x. \end{aligned}$$

- **Valor de p**

$$\begin{aligned} p \in (0,1) \quad : \quad & V(X) = 20 \\ & \frac{1-p}{p^2} = 20 \\ & 20\,p^2 + p - 1 = 0 \\ & p = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 20 \times (-1)}}{2 \times 20} \\ & p = -\frac{1}{4} \text{ ou } p = \frac{1}{5} \\ & p = 0.2 \end{aligned}$$

(b) Qual é a probabilidade de passarem mais de 7 veículos naquele ponto da cidade até se observar o primeiro veículo de fabrico estrangeiro, sabendo que os três primeiros veículos que passaram naquele ponto eram de fabrico nacional? (1.5)

- **Prob. pedida**

Pela propriedade de falta de memória da distribuição geométrica segue-se

$$\begin{aligned} P(X > 7 \mid X > 3) &= P(X > 7-3) \\ &= 1 - P(X \leq 4) \\ &= 1 - F_X(4) \\ &\overset{(a)}{=} 1 - [1 - (1-0.2)^4] \\ &= (1-0.2)^4 \\ &= 0.4096. \end{aligned}$$

[Alternativamente,

$$\begin{aligned} P(X > 7 \mid X > 3) &= \frac{P(X > 7, X > 3)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{P(X > 7)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{1 - P(X \leq 7)}{1 - P(X \leq 3)} \\ &= \frac{1 - F_X(7)}{1 - F_X(3)} \\ &= \frac{1 - [1 - (1-0.2)^7]}{1 - [1 - (1-0.2)^3]} \\ &= (1-0.2)^{7-3} \\ &= P(X > 7-3) \\ &= \ldots \\ &= 0.4096.] \end{aligned}$$

(c) Suponha que, num dado período do dia, os veículos passam naquele ponto de Lisboa de acordo com um processo de Poisson de taxa 4 veículos por minuto. Calcule a probabilidade de, em 10 minutos desse período do dia, passarem mais de 60 veículos nesse ponto de Lisboa. (2.0)

- **V.a. de interesse**

X_t = no. de veículos que passam naquele ponto em t minutos desse período do dia $\quad (t > 0)$

- **Distribuição de X_t**

Dado que lidamos com um processo de Poisson com taxa igual a 4 veículos por minuto, temos $X_t \sim \text{Poisson}(4 \times t)$.

- **F.p. de X_{10}**

$P(X_{10} = x) = \frac{e^{-40}\,40^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X>60) &= 1-P(X\le 60) \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1-0.9988 \\ &\simeq 0.0012. \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. O diâmetro de certo tipo de eixo tem desvio, medido relativamente a uma norma, descrito por uma variável aleatória X com distribuição normal com valor esperado 0 e variância 0.64. Considera-se que um eixo deste tipo é não defeituoso se $-2 < X < 2$.

(a) Determine a probabilidade de um eixo produzido ser defeituoso. (2.0)

- **V.a. de interesse**
  $X =$ desvio medido relativamente a uma norma
- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Normal}(0, 0.64)$.
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} 1-P(-2<X<2) &= \left[\ 1-P\left[\frac{-2-E(X)}{\sqrt{V(X)}} \le \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}} \le \frac{2-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right]\ \right] \\ &= 1-\left[\Phi\left(\frac{2-0}{\sqrt{0.64}}\right)-\Phi\left(\frac{2-0}{\sqrt{0.64}}\right)\right] \\ &= 1-[\Phi(2.5)-\Phi(-2.5)] \\ &= 2\times[1-\Phi(2.5)] \\ &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 2\times(1-0.9938) \\ &\simeq 0.0124. \end{aligned}$$

(b) Num lote composto por 20 eixos deste tipo, escolhidos ao acaso, qual é a probabilidade de existirem no máximo 2 eixos defeituosos? Determine também o valor esperado do número de eixos defeituosos nesse lote. (2.5)

Nota: Se não resolveu a alínea a), considere que a probabilidade de um eixo ser defeituoso é igual a 0.0124.

- **V.a. de interesse Y**
  $Y =$ no. de eixos defeituosos em lote composto por 20 eixos escolhidos ao acaso
- **Distribuição de Y**
  $Y \sim \text{Binomial}(n,p)$ com $n=20$ e $p \overset{(a)}{=} 0.0124$.
- **F.p. de Y**
  $P(Y=y) = \binom{20}{y} \times 0.0124^y \times (1-0.0124)^{20-y}, \quad y=0,1,\ldots,20$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(Y\le 2) &= \sum_{y=0}^{2} P(Y=y) \\ &= (1-0.0124)^{20}+20\times 0.0124\times(1-0.0124)^{19}+190\times 0.0124^2\times(1-0.0124)^{18} \\ &\simeq 0.998144 \end{aligned}$$

- **Valor esperado pedido**

$$\begin{aligned} E(Y) &= np \\ &= 20\times 0.0124 \\ &= 0.248. \end{aligned}$$

2. Um sistema funciona com um par de lâmpadas, uma de tipo A e outra de tipo B. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que descrevem as durações (em milhares de horas) das lâmpadas do tipo A e B (respetivamente), quando instaladas nesse sistema. Sabe-se que X (respetivamente Y) tem distribuição exponencial de valor esperado 1 (respetivamente 0.5) e que X e Y são variáveis aleatórias independentes.

(a) Considere que uma lâmpada de tipo A e outra de tipo B são instaladas simultaneamente no sistema. Qual é a probabilidade de nenhuma destas lâmpadas falhar nas 1000 h iniciais? (2.5)

- **Par aleatório**
  (X, Y)
  X = duração (em milhares de horas) de lâmpada do tipo A
  Y = duração (em milhares de horas) de lâmpada do tipo B

- **Distribribuições**
  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda_X)$, onde $\lambda_X : E(X) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_X} = 1 \Leftrightarrow \lambda_X = 1$
  $Y \sim \text{Exponencial}(\lambda_Y)$, onde $\lambda_Y : E(Y) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda_Y} = 0.5 \Leftrightarrow \lambda_Y = 2$
  $X \perp\!\!\!\perp Y$

- **F.d.p. de X e Y**

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\,e^{-2y}, & y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y > 1) &\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} P(X > 1) \times P(Y > 1) \\
&= \left[\int_1^{+\infty} f_X(x)\,dx\right] \times \left[\int_1^{+\infty} f_Y(y)\,dy\right] \\
&= \left(-e^{-t}\Big|_1^{+\infty}\right) \times \left(-e^{-2t}\Big|_1^{+\infty}\right) \\
&= e^{-1} \times e^{-2} \\
&= e^{-3} \\
&\simeq 0.049787.
\end{aligned}$$

[Alternativamente, poderíamos tirar partido do facto da f.d.p. conjunta de X e Y ser igual a

$$f_{X,Y}(x,y) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} f_X(x) \times f_Y(y)$$

para de seguir calcular a prob. pedida:

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y > 1) &= \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} f_X(x) \times f_Y(y)\,dy\,dx \\
&= \left(\int_1^{+\infty} f_X(x)\,dx\right) \times \left(\int_1^{+\infty} f_Y(y)\,dy\right) \\
&= \left(-e^{-t}\Big|_1^{+\infty}\right) \times \left(-e^{-2t}\Big|_1^{+\infty}\right) \\
&= e^{-1} \times e^{-2} \\
&= e^{-3} \\
&\simeq 0.049787.
\end{aligned}$$

]

(b) Suponha que, ao falhar, uma lâmpada de tipo A é substituída instantaneamente por uma nova lâmpada do mesmo tipo. Calcule um valor aproximado da probabilidade de terem de ser usadas mais de 40 lâmpadas nas primeiras 40 000 h de funcionamento do sistema. (3.0)

- **[Nota**
  Serão usadas mais de 40 lâmpadas nas primeiras 40 000 h de funcionamento do sistema, caso a duração total de 40 lâmpadas seja inferior a 40 000 h.]

- **V.a.**
  X_i = duração da lâmpada i do tipo A, $\quad i = 1,\ldots,n$
  $n = 40$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1,\ldots,n$
  $E(X_i) = E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda_X} = 1, \quad i = 1,\ldots,n$
  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda_X^2} = 1, \quad i = 1,\ldots,n$

- **Nova v.a.**
  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ = duração total de n lâmpadas

- **Valor esperado e variância de S_n**
  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n\,E(X) = n\,\mu = n$
  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{X_i\, indep.}{=} \sum_{i=1}^n V(X_i) \stackrel{X_i \sim X}{=} n\,V(X) = n\,\sigma^2 = n$

- **Distribuição aproximada de S_n**
  Pelo teorema do limite central (TLC) podemos escrever:
  $$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \stackrel{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da prob. pedida**
  $$\begin{aligned} P(S_{40} < 40) &= P\left(\frac{S_{40} - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{40 - n\,\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) \\ &\stackrel{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{40-40}{\sqrt{40}}\right) \\ &= \Phi(0) \\ &= 0.5. \end{aligned}$$