DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA	**Probabilidades e Estatística** **LEE, LEGI, LEMat, LERC/LETI, LMAC, MEAer, MEAmb, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEQ**	2º semestre – 2016/2017 06/05/2017 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º teste B**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I 10 valores

1. A Luísa e o Fernando executam todo o trabalho de processamento de texto num escritório. A probabilidade de um trabalho deste tipo ser atribuído à Luísa (respetivamente ao Fernando) é de 0.7 (respetivamente de 0.3). Admita que um texto, que resulta do trabalho da Luísa (respetivamente do Fernando), possui erros de processamento com probabilidade 0.27 (respetivamente 0.15). Suponha que se selecionou um texto ao acaso entre todos os que são processados neste escritório.

(a) Calcule a probabilidade de esse texto possuir erros de processamento. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$L = \{$trabalho atribuído à Luísa$\}$	$P(L) = 0.7$
$F = \{$trabalho atribuído ao Fernando$\}$	$P(F) = 0.3$
$E = \{$texto possui erros de processamento$\}$	$P(E) = ?$
	$P(E \mid L) = 0.27$
	$P(E \mid F) = 0.15$

- **Probabilidade pedida**
  Ao invocar-se a lei da probabilidade total, temos

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \mid L) \times P(L) + P(E \mid F) \times P(F) \\ &= 0.27 \times 0.7 + 0.15 \times 0.3 \\ &= 0.234. \end{aligned}$$

(b) Determine a probabilidade de esse texto ter sido processado pelo Fernando, sabendo que possui erros de processamento. (2.5)

- **Probabilidade pedida**
  Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(F \mid E) &= \frac{P(E \mid F) \times P(F)}{P(E)} \\ &\overset{(a)}{=} \frac{0.15 \times 0.3}{0.234} \\ &\simeq 0.1923. \end{aligned}$$

2. Certo tipo de componente está sujeito a choques elétricos. Enquanto uma componente desse tipo estiver operacional, a probabilidade de um choque causar a sua falha é de 0.15.

(a) Suponha que o número de choques que uma componente sofre num dado período é descrito por uma variável aleatória Poisson de valor esperado 3. Sabendo que a componente sofreu choques elétricos, qual é a probabilidade de ter sofrido mais do que dois choques elétricos? (2.5)

- **Variável aleatória de interesse**
  $X =$ número de choques elétricos num dado período

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Poisson}(3)$

- **F.p. de X**
  $P(X=x) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X > 2 \mid X > 0) &= \frac{P(X > 2, X > 0)}{P(X > 0)} \\
&= \frac{P(X > 2)}{P(X > 0)} \\
&= \frac{1 - P(X \leq 2)}{1 - P(X = 0)} \\
&= \frac{1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-3}3^x}{x!}}{1 - \frac{e^{-3}3^0}{0!}} \quad \text{ou} \quad \frac{1 - F_{Poi(3)}(2)}{1 - F_{Poi(3)}(0)} \\
&\stackrel{tabela/calc.}{=} \frac{1 - 0.4232}{1 - 0.0498} \\
&\simeq 0.6070.
\end{aligned}$$

(b) Um sistema é composto por 10 componentes do tipo referido. Admita que: todas estas componentes estão operacionais inicialmente e falham de modo independente; o sistema falha se pelo menos 2 das suas componentes deixarem de funcionar. Determine a probabilidade de o sistema falhar aquando da ocorrência do primeiro choque elétrico. (2.5)

- **V.a. de interesse**
  Y = no. de componentes que deixam de funcionar, em 10 que constituem o sistema
- **[Hipóteses de trabalho**
  Admitiremos que:
  - todas as componentes estão operacionais e falham de modo independente;
  - a probabilidade de falha é a mesma para as 10 componentes.]
- **Distribuição de Y**

$$Y \sim \text{Binomial}(n, p)$$

  onde

$$\begin{aligned}
n &= 10 \\
p &= 0.15.
\end{aligned}$$

- **F.p. de Y**
  $P(Y=y) = \binom{10}{y} 0.15^y (1-0.15)^{10-y}, \; y = 0, 1, \dots, 10$
- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(\text{sistema falhar}) &= P(Y \geq 2) \\
&= 1 - P(Y < 2) \\
&= 1 - P(Y \leq 1) \\
&= 1 - \sum_{y=0}^{1} P(Y = y) \\
&= [1 - \sum_{y=0}^{1} \binom{10}{y} 0.15^y (1-0.15)^{10-y} \\
&= 1 - 0.85^{10} - 10 \times 0.15 \times 0.85^9] \\
&\simeq 1 - F_{\text{Binomial}(10,0.15)}(1) \\
&\stackrel{tabela/calc}{=} 1 - 0.5443 \\
&= 0.4557.
\end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. A medição experimental de uma dada grandeza, expressa em mm, está sujeita a erro. O valor do erro é descrito por uma variável aleatória X com valor esperado nulo e variância σ^2.

(a) Admita que se efectuaram 36 medições independentes da grandeza em causa e que $\bar{X}$ representa a média dos erros dessas 36 medições. Calcule $P(|\bar{X}| \leq 1/2)$, com $\sigma = 1$. (3.0)

- **V.a.**
  X = erro da medição experimental
  X_i = erro da medição experimental i, $\quad i = 1, \ldots, n$
  $n = 36$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  X com distribuição arbitrária, valor esperado $E(X) = \mu = 0$ e variância $V(X) = \sigma^2 = 1$.
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1, \ldots, n$
  $E(X_i) = E(X) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$
  $V(X_i) = V(X) = 1, \quad i = 1, \ldots, n$

- **V.a. de interesse**
  $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ = média dos erros de n medições experimentais

- **Valor esperado e variância de $\bar{X}$**
  $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X) = \mu$
  $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \frac{1}{n^2} \times \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i \sim X}{=} \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição aproximada de $\bar{X}$**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se
  $$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0, 1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**
  $$\begin{aligned}
  P\left(|\bar{X}| \leq \frac{1}{2}\right) &= P\left(-\frac{1}{2} \leq \bar{X} \leq \frac{1}{2}\right) \\
  &= P\left(\frac{-\frac{1}{2} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{1}{2} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
  &\overset{TLC}{\simeq} \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{\sqrt{36}}}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{\sqrt{36}}}\right) \\
  &= \Phi(3) - \Phi(-3) \\
  &= \Phi(3) - [1 - \Phi(3)] \\
  &= 2 \times \Phi(3) - 1 \\
  &\overset{tabela/calc.}{\simeq} 2 \times 0.998650 - 1 \\
  &= 0.9973.
  \end{aligned}$$

(b) Suponha que X tem distribuição normal. Determine o valor máximo que a variância de X pode tomar de modo a que pelo menos 80% das medições experimentais não se afastem mais do que $1\,mm$ do valor da grandeza referida. (2.0)

- **V.a.**
  X = valor do erro da medição experimental

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$

- **Valor máximo pedido para a variância**
  Dado que $E(X) = \mu = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 \quad : \quad & P(-1 \le X \le 1) \ge 0.8 \\
& P\left(\frac{-1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1-\mu}{\sigma}\right) \ge 0.8 \\
& \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \ge 0.8 \\
& 2 \times \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.8 \\
& \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ge \frac{1+0.8}{2} \\
& \frac{1}{\sigma} \ge \Phi^{-1}(0.9) \\
& \sigma^2 \le \frac{1}{1.2816^2} \simeq 0.6089,
\end{aligned}
$$

  logo o valor máximo pedido para a variância é aproximadamente 0.6089.

2. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam, respetivamente, o número de defeitos do tipo A e do tipo B por peça produzida por uma máquina. Admita que este par aleatório possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y	
X	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

(a) Calcule a probabilidade de o número de defeitos do tipo A ser superior ao número de defeitos do tipo B. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  X = número de defeitos do tipo A
  Y = número de defeitos do tipo B

- **F.p. conjunta**
  Dada pela tabela do enunciado.

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X > Y) &= [P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1)] \\
&= \frac{2}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{8+9+3}{36} \\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}
$$

(b) Determine o valor esperado de X condicional a $Y = 1$, bem como $E(X)$. (2.5)

- **F.p. conjunta e f.p. marginais**
  $P(X=x,Y=y)$, $P(X=x)=\sum_{y=0}^{1} P(X=x,Y=y)$ e $P(Y=y)=\sum_{x=0}^{2} P(X=x,Y=y)$ encontram-se sumariadas na tabela seguinte:

	Y		
X	0	1	$P(X=x)$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
$P(Y=y)$	$\frac{23}{36}$	$\frac{13}{36}$	1

- **F.p. de $X \mid Y=1$**

$$\begin{aligned} P(X=x \mid Y=1) &= \frac{P(X=x,Y=1)}{P(Y=1)} \\ &= \begin{cases} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{36}} = \frac{6}{13}, & x=0 \\ \frac{\frac{1}{9}}{\frac{13}{36}} = \frac{4}{13}, & x=1 \\ \frac{\frac{1}{12}}{\frac{13}{36}} = \frac{3}{13}, & x=2 \\ 0, & \text{restantes valores de } x \end{cases} \end{aligned}$$

- **Valor esperado de $X \mid Y=1$**

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=1) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x \mid Y=1) \\ &= 0 \times \frac{6}{13} + 1 \times \frac{4}{13} + 2 \times \frac{3}{13} \\ &= \frac{10}{13} \\ &\simeq 0.7692 \end{aligned}$$

- **Valor esperado de X**

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) \\ &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(c) Averigúe se as variáveis aleatórias X e Y são independentes. (1.0)

- **Averiguação de independência**
  X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=y,Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=0,Y=0) = \frac{1}{6}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(X=0) \times P(Y=0) &\overset{(a)}{=} \frac{1}{3} \times \frac{23}{36} \\ &= \frac{23}{108}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$P(X=0,Y=0) \neq P(X=0) \times P(Y=0),$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.

[Alternativamente...

Note-se que caso X e Y fossem v.a. independentes então $(X \mid Y=1)$ e X possuíriam a mesma distribuição e, consequentemente, $E(X \mid Y=1) = E(X)$. Ora,

$$\begin{aligned} E(X \mid Y=1) &= \frac{10}{13} \\ &\neq \\ E(X) &= 1, \end{aligned}$$

logo X e Y são v.a. DEPENDENTES.]