DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

LEAN, LEGM, LEIC-A, LEIC-T, MA, MEMec

2º semestre – 2016/2017
06/05/2017 – **09:00**

Duração: 90 minutos **1º teste A**

Justifique convenientemente todas as respostas

Grupo I	10 valores

1. Para se averiguar a contaminação de água por iões de chumbo, utiliza-se um dado teste. Se iões de chumbo estiverem presentes na água, o teste deteta a presença dos mesmos com probabilidade 0.98. Se iões não estiverem presentes, o teste indica a sua presença com probabilidade 0.01. Admita que a probabilidade de uma amostra de água estar contaminada por iões de chumbo é 0.05.

(a) Determine a probabilidade de uma amostra de água estar contaminada por iões de chumbo, sabendo que o teste referido acusa a presença dos mesmos. (2.5)

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	**Probabilidade**
$C = \{$contaminação da água por iões de chumbo$\}$	$P(C) = 0.05$
$T = \{$teste acusa a presença de iões de chumbo$\}$	$P(T) = ?$
	$P(T \mid C) = 0.98$
	$P(T \mid \overline{C}) = 0.01$

- **Probabilidade pedida**

Tirando partido do teorema de Bayes, segue-se

$$\begin{aligned} P(C \mid T) &= \frac{P(T \mid C) \times P(C)}{P(T)} \\ &= \frac{P(T \mid C) \times P(C)}{P(T \mid C) \times P(C) + P(T \mid \overline{C}) P(\overline{C})} \\ &= \frac{0.98 \times 0.05}{0.98 \times 0.05 + 0.01 \times (1-0.05)} \\ &\simeq 0.8376. \end{aligned}$$

(b) Qual é a probabilidade de, numa única aplicação do teste, se obter um resultado que reflita corretamente o estado de contaminação da água ? (2.5)

- **Probabilidade pedida**

Como $(T \cap C)$ e $(\overline{T} \cap \overline{C})$ são acontecimentos disjuntos temos

$$\begin{aligned} P[(T \cap C) \cup (\overline{T} \cap \overline{C})] &= P(T \cap C) + P(\overline{T} \cap \overline{C}) \\ &\overset{lei\,prob.comp.}{=} P(T \mid C) \times P(C) + P(\overline{T} \mid \overline{C}) \times P(\overline{C}) \\ &= P(T \mid C) \times P(C) + [1 - P(T \mid \overline{C})] \times [1 - P(C)] \\ &= 0.98 \times 0.05 + (1-0.01) \times (1-0.05) \\ &= 0.9895. \end{aligned}$$

2. Suponha que o número de acessos a um servidor, por minuto, é descrito pela variável aleatória X, com distribuição Poisson(2).

(a) Determine a probabilidade de o número de acessos, num dado minuto, ser superior a 2, sabendo que houve efetivamente acessos nesse minuto. (2.0)

- **Variável aleatória de interesse**
  X = número de acessos a um servidor num dado minuto

- **Distribuição de X**
  $X \sim \text{Poisson}(2)$

- **F.p. de X**
  $P(X=x) = \frac{e^{-2}\,2^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X>2 \mid X>0) &= \frac{P(X>2, X>0)}{P(X>0)} \\
&= \frac{P(X>2)}{P(X>0)} \\
&= \frac{1-P(X\leq 2)}{1-P(X=0)} \\
&= \frac{1-\sum_{x=0}^{2}\frac{e^{-2}\,2^x}{x!}}{1-\frac{e^{-2}\,2^0}{0!}} \quad \text{ou} \quad \frac{1-F_{\text{Poisson}(2)}(2)}{1-F_{\text{Poisson}(2)}(0)} \\
&\overset{tabela/calc.}{=} \frac{1-0.6767}{1-0.1353} \\
&\simeq 0.3739.
\end{aligned}$$

(b) Calcule um valor aproximado para a probabilidade de o número total de acessos ao servidor em uma hora exceder 150. Admita que o número de acessos em minutos distintos são independentes entre si. (3.0)

- **V.a.**
  X_i = número de acessos ao servidor no minuto i, $\quad i = 1,\ldots,n$
  $n = 60$

- **Distribuição, valor esperado e variância comuns**
  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X, \quad i=1,\ldots,n$
  $E(X_i) = E(X) = \lambda = 2, \quad i = 1,\ldots,n$
  $V(X_i) = V(X) = \lambda = 2, \quad i = 1,\ldots,n$

- **V.a. de interesse**
  $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = número total de acessos ao servidor em n minutos

- **Valor esperado e variância de S_n**
  $E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \overset{X_i\sim X}{=} n\,E(X) = n\lambda = 60\times 2 = 120$
  $V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{X_i\ indep.}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \overset{X_i\sim X}{=} n\,V(X) = n\lambda = 120$

- **Distribuição aproximada de S_n**
  Pelo teorema do limite central (TLC) pode escrever-se

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \overset{a}{\sim} \text{Normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da probabilidade pedida**

$$\begin{aligned}
P(S_n > 150) &= 1 - P(S_n \leq 150) \\
&= 1 - P\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq \frac{150 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{150-120}{\sqrt{120}}\right) \\
&\simeq 1 - \Phi(2.74) \\
&\overset{tabela/calc.}{\simeq} 1 - 0.9969 \\
&= 0.0031.
\end{aligned}$$

- **[Resolução também aceite**
  V.a.
  X_i = número de acessos ao servidor no minuto i, $\quad i = 1,\ldots,60$

  Distribuição, valor esperado e variância comuns
  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X, \quad i = 1,\ldots,60$

  V.a. de interesse
  $S = \sum_{i=1}^{60} X_i$ = número total de acessos ao servidor em 60 minutos

  Distribuição EXACTA de S
  Por lidarmos com a soma de 60 v.a. i.i.d. com distribuição de Poisson(2), temos $S \sim \text{Poisson}\,(60 \times 2)$.

  Valor EXACTO da probabilidade pedida

  $$\begin{aligned} P(S > 150) &= 1 - P(S \leq 150) \\ &= 1 - F_{\text{Poisson}(120)}(150) \\ &\stackrel{calc.}{\simeq} 1 - 0.9964 \\ &= 0.0036.] \end{aligned}$$

Grupo II	10 valores

1. Certo navio executa uma manobra, num dado porto. Sabe-se que: a profundidade mínima de água, para esta manobra, é descrita pela variável aleatória X, com distribuição normal com valor esperado igual a $30m$ e desvio padrão de $2m$; o calado do navio é descrito pela variável aleatória Y, com distribuição normal com valor esperado igual a $25m$ e desvio padrão de $1m$; X é independente de Y.

(a) Sabendo que uma manobra náutica é segura se a profundidade mínima de água for superior ao calado do navio, calcule a probabilidade de o navio realizar a manobra em segurança. (3.0)

- **V.a.**
  X = profundidade mínima de água em que se manobra o navio
  Y = calado do navio

- **Distribuições de X e Y**
  $X \sim \text{Normal}(30, 2^2)$
  $\perp\!\!\!\perp$
  $Y \sim \text{Normal}(25, 1^2)$

- **Probabilidade pedida**
  Importa notar que uma manobra náutica só será segura se a profundidade da água (X) em que se manobra o navio for superior ao respectivo calado (Y). Logo a probabilidade pedida é

  $$P(X > Y) = P(X - Y > 0),$$

  pelo que é conveniente lidar com a v.a. $X - Y$.

- **V.a. de interesse e sua distribuição**
  $W = X - Y$
  W é uma combinação linear de duas v.a. independentes com distribuição normal logo também normalmente distribuída. Com efeito,

  $$W = X - Y \sim \text{Normal}(E(W), V(W)),$$

  onde

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X-Y) \\ &= E(X)-E(Y) \\ &= 30-25 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(W) &= V(X-Y) \\ &\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} V(X)+V(Y) \\ &= 2^2+1^2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

- **Probabilidade pedida (cont.)**

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= P(X-Y>0) \\ &= P(W>0) \\ &= 1-P(W \leq 0) \\ &= 1-P\left[\frac{W-E(W)}{\sqrt{V(W)}} \leq \frac{0-E(W)}{\sqrt{V(W)}}\right] \\ &= 1-\Phi\left(\frac{0-5}{\sqrt{5}}\right) \\ &\simeq 1-\Phi(-2.24) \\ &= \Phi(2.24) \\ &\overset{tabela/calc}{=} 0.9875. \end{aligned}$$

(b) Determine a probabilidade de o navio executar pelo menos 3 manobras seguras até que ocorra a primeira manobra insegura. Admita que o navio realiza todas as manobras de forma independente. (2.0)

Nota: Caso não tenha resolvido (a), considere que a probabilidade de o navio executar uma manobra segura é igual a 0.9875.

- **V.a. de interesse**
  M = no. de manobras efectuadas até que ocorra a 1a. manobra insegura

- **[Hipóteses de trabalho**
  Admitiremos que: as manobras são efectuadas de modo independente; a probabilidade de a manobra ser segura se mantém constante.]

- **Distribuição de M**
  $M \sim \text{Geométrica}(p)$, com $p = 1-0.9875$.

- **F.p. de M**
  $P(M=m) = 0.9875^{m-1} \times (1-0.9875), \quad m = 1,2,\ldots$

- **Prob. pedida**
  O navio executa pelo menos 3 manobras seguras até que ocorra a primeira manobra insegura se e só se executar pelo menos 3+1 manobras até à ocorrência da primeira manobra insegura. Consequentemente, a probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(M \geq 3+1) &= 1-P(M<3+1) \\ &= 1-P(M \leq 3) \\ &= 1-\sum_{m=1}^{3} P(M=m) \\ &= 1-\sum_{m=1}^{3} 0.9875^{m-1} \times (1-0.9875) \quad \left[= 1-(1-0.9875) \times \frac{1-0.9875^3}{1-0.9875}\right] \\ &= 0.9875^3 \\ &\overset{calc}{\simeq} 0.962967. \end{aligned}$$

2. Seja X (respetivamente Y) a variável aleatória que descreve a pressão do pneu dianteiro (respetivamente traseiro) de um motociclo, quando cheio, na unidade psi. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	10	12	14
10	$\frac{10}{108}$	$\frac{11}{108}$	$\frac{12}{108}$
12	$\frac{11}{108}$	$\frac{12}{108}$	$\frac{13}{108}$
14	$\frac{12}{108}$	$\frac{13}{108}$	$\frac{14}{108}$

(a) Obtenha a probabilidade de as pressões dos dois pneus, quando cheios, serem distintas. (1.5)

- **Par aleatório** (X, Y)
  $X =$ pressão do pneu dianteiro
  $Y =$ pressão do pneu traseiro

- **F.p. conjunta**
  Dada pela tabela do enunciado.

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) \\ &= 1 - [P(X = 10, Y = 10) + P(X = 12, Y = 12) + P(X = 14, Y = 14)] \\ &= 1 - \left(\frac{10}{108} + \frac{12}{108} + \frac{14}{108}\right) \\ &= \frac{72}{108} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(b) Calcule o valor esperado de Y condicional a $X = 10$. (2.5)

- **V.a.**
  $Y \mid X = 10$

- **F.p. de** $Y \mid X = 10$
  Atendendo a que

$$\begin{aligned} P(X = 10) &= P(X = 10, Y = 10) + P(X = 10, Y = 12) + P(X = 10, Y = 14) \\ &= \frac{10}{108} + \frac{11}{108} + \frac{12}{108} \\ &= \frac{33}{108} \\ &= \frac{11}{36}, \end{aligned}$$

  temos

$$P(Y = y \mid X = 10) = \frac{P(X = 10, Y = y)}{P(X = 10)}$$

$$P(Y=y \mid X=10) \quad = \quad \begin{cases} \frac{\frac{10}{108}}{\frac{33}{108}} = \frac{10}{33}, & y=10 \\ \frac{\frac{11}{108}}{\frac{33}{108}} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}, & y=12 \\ \frac{\frac{12}{108}}{\frac{33}{108}} = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}, & y=14 \\ 0, & \text{restantes valores de } y \end{cases}$$

- **Valor esperado de** $Y \mid X=10$

$$\begin{aligned} E(Y \mid X=10) &= 10 \times P(Y=10 \mid X=10) + 12 \times P(Y=12 \mid X=10) + 14 \times P(Y=14 \mid X=10) \\ &= 10 \times \frac{10}{33} + 12 \times \frac{11}{33} + 14 \times \frac{12}{33} \\ &= \frac{400}{33} \\ &= 12.(12) \end{aligned}$$

(c) Averigúe se as variáveis aleatórias X e Y são independentes. (1.0)

- **Averiguação de independência**

X e Y são v.a. INDEPENDENTES sse

$$P(X=y, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Por um lado, temos

$$P(X=10, Y=10) = \frac{10}{108}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} P(X=10) \times P(Y=10) &\overset{(a)}{=} \frac{33}{108} \times [P(X=10, Y=10) + P(X=12, Y=10) + P(X=14, Y=10)] \\ &= \frac{33}{108} \times \left(\frac{10}{108} + \frac{11}{108} + \frac{12}{108} \right) \\ &= \frac{33}{108} \times \frac{33}{108} \\ &= \frac{121}{1296}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$P(X=10, Y=10) \neq P(X=10) \times P(Y=10),$$

e, como tal, X e Y são v.a. DEPENDENTES.