



Duração: 90 minutos

2º teste

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I

10 valores

1. Um fabricante garante que o desvio (em milímetros), em relação à norma, das peças que produz é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor esperado μ e variância unitária. Ao analisar uma amostra aleatória de 10 peças por ele fornecidas, verificou-se que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 0.2$ onde x_i designa o desvio (em milímetros) da peça $i = 1, \dots, 10$.

- (a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança de μ .

(3.0)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_{10}) &\stackrel{iid}{=} \prod_{i=1}^{10} f_X(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^{10} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}} = (2\pi)^{-10/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \mu)^2} \\ \log \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_{10}) &= -5 \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \mu)^2 \text{ (diferenciável em ordem a } \mu \text{ em } \mathbb{R}) \\ \frac{d \log \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_{10})}{d\mu} &= 0 \iff \sum_{i=1}^{10} (x_i - \mu) = 0 \iff \sum_{i=1}^{10} x_i - 10\mu \iff \mu = \bar{x} \\ \frac{d^2 \log \mathcal{L}(\mu; x_1, \dots, x_{10})}{d\mu^2} &= -10 < 0, \forall \mu \in \mathbb{R}. \\ \therefore \hat{\mu}_{MV} &= \bar{X}. \end{aligned}$$

Com a amostra observada temos a estimativa $\hat{\mu}_{MV} = 0.02$.

- (b) Determine o erro quadrático médio do estimador \bar{X} do parâmetro μ .

(2.0)

$$\begin{aligned} E[\bar{X}] &= E\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n E[X_i]}{n} = E[X] = \mu \\ \text{Var}[\bar{X}] &= \text{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]}{n^2} = \frac{\text{Var}[X]}{n} = \frac{1}{n} \\ \text{EQM}[\bar{X}] &= \text{Var}[\bar{X}] + (E[\bar{X}] - \mu)^2 = \frac{1}{n} = 0.1. \end{aligned}$$

2. Para comparar dois tipos de materiais cerâmicos usados em pavimentos, instalaram-se mosaicos do tipo I e do tipo II, num corredor de uma universidade. Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que medem (numa escala conveniente) os desgastes ao fim de dois anos em mosaicos dos tipos I e II, respetivamente. Tendo sido selecionados ao acaso 81 mosaicos do tipo I e 71 do tipo II e medidos os respetivos desgastes ao fim de 2 anos, obteve-se: $\bar{x}_1 = 290$, $\bar{x}_2 = 321$, $s_1 = 12$ e $s_2 = 14$. Assuma que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias com distribuição normal.

- (a) Construa um intervalo de confiança a 90% para o desgaste médio de mosaicos do tipo I.

(2.5)

$$\begin{aligned} \text{Seja } T &= \frac{\bar{X}_1 - \mu_1}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n}}} \sim t_{(n-1)}. \\ \text{e } a &= F_{t(80)}^{-1}(0.95) = 1.664 \\ P(-a \leq T \leq a) &= 0.95 \iff P\left(\bar{X}_1 - a\sqrt{\frac{S_1^2}{80}} \leq \mu_1 \leq \bar{X}_1 + a\sqrt{\frac{S_1^2}{80}}\right) = 0.90 \\ \text{IAC}_{0.90}(\mu_1) &= \left[\bar{X}_1 - a\sqrt{\frac{S_1^2}{80}}, \bar{X}_1 + a\sqrt{\frac{S_1^2}{80}}\right] \\ \text{IC}_{0.90}(\mu_1) &= [287.78, 292.22] \end{aligned}$$

- (b) Teste, ao nível de significância de 1%, a hipótese de igualdade entre os desgastes médios dos dois tipos de pavimento. Admita que as variâncias dos desgastes em ambos os casos são iguais.

(2.5)

$$\begin{aligned} \text{Pretende-se testar } H_0 : \mu_1 - \mu_2 &= 0 \text{ contra } H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \\ \text{Seja } Z &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}. \text{ Sob } H_0 \text{ obtemos a estatística do teste,} \\ Z_0 &= \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}. \\ \text{Para } \alpha &= 0.01 \text{ deve rejeitar-se } H_0 \text{ se } |Z_0| > F_{t(150)}^{-1}(0.995) = 2.609. \\ \text{Com } z_0 &\approx -14.7 \text{ pertence à região de rejeição então } H_0 \text{ é rejeitada para } \alpha = 0.01. \end{aligned}$$

1. Um processo de laboração contínua causa interrupções na produção. A observação do número de interrupções por semana, X , durante o último ano (52 semanas) conduziu aos seguintes resultados:

Nº interrupções	0	1	2	3
Nº semanas	12	13	14	13

Teste a hipótese de X ter uma distribuição uniforme discreta entre 0 e 3. Decida com base no valor- p . (4.0)

Pretende-se testar $H_0 : X \sim U(\{0, \dots, 3\})$ contra $H_1 : X \not\sim U(\{0, \dots, 3\})$.

Seja $p_i^0 = P(X = i | H_0) = 1/4, i = 0, \dots, 3$.

i	o_i	p_i^0	$e_i = np_i^0$
0	12	0.25	13
1	13	0.25	13
2	14	0.25	13
3	13	0.25	13
$n = 52$			

Como todas as classes têm uma frequência esperada superior a 5 não é necessário agrupar classes ($k = 4$) e, não havendo qualquer parâmetro estimado ($\beta = 0$), a estatística de teste é $Q_0 = \sum_{i=0}^3 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \underset{H_0}{\sim} \chi_{(3)}^2$. Tem-se $q_0 \approx 0.154$ e valor- $p = P(Q_0 > q_0 | H_0) = 1 - F_{\chi_{(3)}^2}(0.154) \approx 0.985$. Deve-se rejeitar H_0 para níveis de significância ≥ 0.985 e não rejeitar no caso contrário. Para os níveis de significância usuais os dados não fornecem evidência para a rejeição de H_0 .

2. Num ensaio clínico aplicaram-se a 10 pacientes determinadas doses de medicação antialérgica. O registo do tempo de ação do fármaco, Y , em função da dose de medicação, x , conduziu aos seguintes resultados:

x_i (em mg)	3.0	3.0	4.0	5.0	6.0	6.0	7.0	8.0	8.0	9.0
y_i (em horas)	9.1	5.5	12.3	9.2	14.2	16.8	22.0	18.3	24.5	22.7

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 59.0, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 389.00, \sum_{i=1}^{10} y_i = 154.0, \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 2767.30, \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 1025.70.$$

- (a) Obtenha as estimativas dos mínimos quadrados dos coeficientes da reta de regressão. (2.0)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = 2.8632 \text{ e } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -1.4923$$

- (b) Após ter enunciado as hipóteses de trabalho que entender mais convenientes, construa um intervalo de confiança a 95% para o declive da recta de regressão. (3.0)

Admite-se que as variáveis $Y_i = Y | x = x_i$ são não correlacionadas e que $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$ para $i = 1, \dots, 10$.

Sejam $T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 10 \bar{x}^2}}} \sim t_{(8)}$ e $a = F_{t_{(8)}}^{-1}(0.975) = 2.306$

$$P(-a \leq T \leq a) = 0.95 \iff P\left(\hat{\beta}_1 - a \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 10 \bar{x}^2}} \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + a \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 10 \bar{x}^2}}\right) = 0.95$$

$$\text{IAC}_{0.95}(\beta_1) = \left[\hat{\beta}_1 - 2.306 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 10 \bar{x}^2}}, \hat{\beta}_1 + 2.306 \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 10 \bar{x}^2}} \right]$$

$$\text{IC}_{0.95}(\beta_1) = [1.8721, 3.8541]$$

- (c) Estime o valor esperado do tempo de ação do fármaco para uma dose de 7.0 mg. (1.0)

Pretende-se estimar $E[Y|x = 7.0] = \beta_0 + 7.0\beta_1$.

$$\hat{E}[Y|x = 7.0] = \hat{\beta}_0 + 7\hat{\beta}_1 = 18.554$$