Probabilidades e Estatística

LEAN, LEE, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LETI, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ

DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

1º semestre – 2016/2017
19/11/2016 – **11:00**

Duração: 90 minutos **1º teste**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Considere um dado equilibrado e outro dado viciado em que a probabilidade de sair a face 1 é 1/2 e as restantes faces (2 a 6) têm igual probabilidade de ocorrerem.

(a) Admita que é selecionado ao acaso um dos dois dados referidos. Sabendo que a soma de pontos obtidos em 3 lançamentos do dado selecionado é igual a 18, determine a probabilidade de ter sido selecionado o dado viciado. (2.5)

Considerem-se o acontecimento V =“o dado viciado é selecionado” e as variáveis aleatórias X_i, $i = 1,2,3$, que representam o número de pontos obtidos no i-ésimo lançamento de um dado. Tem-se que $P(V) = 1/2$, $P(X_i = j \mid \bar{V}) = 1/6$, para $i = 1,2,3$ e $j = 1,\ldots,6$, $P(X_i = 1 \mid V) = 1/2$ e $P(X_i = j \mid V) = k$, para $i = 1,2,3$ e $j = 2,\ldots,6$.
Como $1 = P(X \in \{1,\ldots,6\} \mid V) = 1/2 + 5k$ tem-se ainda que $k = 1/10$.

$$P(V \mid X_1+X_2+X_3=18) \overset{\text{Teo. de Bayes}}{=} \frac{P(X_1+X_2+X_3=18 \mid V)P(V)}{P(X_1+X_2+X_3=18 \mid V)P(V)+P(X_1+X_2+X_3=18 \mid \bar{V})P(\bar{V})} =$$

$$= \frac{P(X_1=6,X_2=6,X_3=6 \mid V)}{P(X_1=6,X_2=6,X_3=6 \mid V)+P(X_1=6,X_2=6,X_3=6 \mid \bar{V})} \overset{\text{indep.}}{=}$$

$$\overset{\text{indep.}}{=} \frac{\prod_{i=1}^{3} P(X_i=6 \mid V)}{\prod_{i=1}^{3} P(X_i=6 \mid V)+\prod_{i=1}^{3} P(X_i=6 \mid \bar{V})} = \frac{(1/10)^3}{(1/10)^3+(1/6)^3} = \frac{27}{152} \approx 0.1776.$$

(b) Qual é a probabilidade de serem necessários pelo menos 4 lançamentos do dado viciado para obter a face 1? (2.5)

Seja Y =“nº de lançamentos do dado viciado até se obter a face 1”. Uma vez que Y representa o número de realizações independentes de uma prova de Bernoulli até ocorrer o primeiro sucesso, tem-se que $Y \sim Geo(p = 1/2)$.
$P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - F_Y(3) = 1/8$.

2. Um fabricante de computadores compra chips a um fornecedor externo que os disponibiliza em lotes de 100 unidades. O controlo de qualidade é feito examinando ao acaso e sem reposição alguns dos chips de cada lote.

(a) Admita que, para avaliar a qualidade de um lote, o fabricante examina 10 chips e rejeita esse lote se for encontrado pelo menos um chip defeituoso entre os chips examinados. Qual é a probabilidade de um lote contendo 5 chips defeituosos ser rejeitado? (2.5)

Seja X =“nº de chips defeituosos entre os 10 examinados”. Como X representa o número de sucessos em 10 tiragens sem reposição então $X \sim H(N = 100, M = 5, n = 10)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0.4162.$$

(b) Admita que a proporção de chips defeituosos produzidos pelo fornecedor é 0.05. Sabendo que o fornecedor vendeu 36 lotes de 100 chips cada, calcule a probabilidade aproximada de o número médio de chips defeituosos por lote (no conjunto de 36 lotes vendidos) ser quanto muito um. (2.5)

Seja Y_i =“nº de chips defeituosos no lote i”, com $i = 1,\ldots,36$ e $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{36} Y_i/36$. Tem-se que $Y_i \sim Bi\left(n = 100, p = 0.05\right)$.
$P(\bar{Y} \leq 1) = P\left(\sum_{i=1}^{36} Y_i \leq 36\right) = F_{Bi(3600,0.05)}(36) \approx 0$, uma vez que $\sum_{i=1}^{36} Y_i$ é a soma de variáveis aleatórias binomiais que se admite que são independentes.
Nota: também é possível recorrer ao teorema do limite central.

Grupo II	10 valores

1. Admita que o tempo de atendimento de clientes num dado supermercado é uma variável aleatória X com distribuição exponencial de valor esperado igual a 2 min.

(a) Qual é a probabilidade de um cliente do supermercado demorar entre 1 e 3 minutos a ser atendido? (1.0)

Como $X \sim Exp(\lambda)$ e $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 2$ tem-se $\lambda = \frac{1}{2}$.
$P(1 < X < 3) = \int_1^3 \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0.3834$.

(b) Supondo que um cliente do supermercado já está a ser atendido há 1 min, determine a probabilidade de o seu tempo (total) de atendimento ser superior a 3 min? (1.5)

$P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > 2)$, pela amnésia da distribuição exponencial.
$P(X > 2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = e^{-1} \approx 0.3679$.

(c) Calcule a probabilidade de, num conjunto de 10 compras no supermercado, haver pelo menos 2 compras com tempo de atendimento do cliente associado compreendido entre 1 e 3 minutos. (2.5)

Seja Y ="nº de compras com tempo de atendimento do cliente associado compreendido entre 1 e 3 minutos, num conjunto de 10 compras". Uma vez que Y representa o número de sucessos em 10 repetições de uma prova de Bernoulli, que admitimos que são independentes, então $Y \sim Bi(n = 10, p)$ com $p = P(1 < X < 3) = 0.3834$.
$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) \approx 0.9427$.

2. Considere o par aleatório discreto (X, Y) com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.2	0.0	0.1
1	0.2	0.0	0.1
2	0.0	0.3	0.1

(a) Determine a função de probabilidade marginal da variável aleatória X. (1.0)

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0.3, & x = 0,\ 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b) Determine a moda e a mediana de X. (1.5)

$\text{Moda}(X) = \arg\max_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) = 2$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \text{ e Mediana}(X) = Q_{0.5} : \begin{cases} P(X \leq Q_{0.5}) \geq 0.5 \\ P(X \geq Q_{0.5}) \geq 0.5 \end{cases} \iff \begin{cases} F_X(Q_{0.5}) \geq 0.5 \\ P(X < Q_{0.5}) \leq 0.5 \end{cases}$$

$\text{Mediana}(X) = 1$ porque $F_X(1) = 0.6$, $P(X < 1) = 0.3$, $\forall x < 1 : F_X(x) < 0.5$ e $\forall x > 1 : P(X < x) > 0.5$.

(c) Calcule $P(Y > 1 \mid X = 2)$. Usando a probabilidade calculada diga, justificando, se X e Y são variáveis aleatórias independentes. (2.5)

$P(Y > 1 \mid X = 2) = P(Y = 2 \mid X = 2) = \frac{P(Y=2, X=2)}{P(X=2)} = \frac{0.1}{0.4} = 1/4$.
$P(Y > 1) = P(Y = 2) = f_Y(2) = \sum_x P(X = x, Y = 2) = 0.3$.
Como $P(Y > 1 \mid X = 2) \neq P(Y > 1)$ conclui-se que as variáveis não são independentes.