Probabilidades e Estatística

LEGI, LEGM, LMAC, MEAmbi, MEAer, MEC

1º semestre – 2016/2017
19/11/2016 – **9:00**

Duração: 90 minutos **1º teste**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Uma empresa compra um lote de 100 peças. No contrato de compra está estabelecido que são testadas 10 peças do lote, escolhidas ao acaso e sem reposição, e que o lote só é aceite se pelo menos 9 das 10 peças testadas não apresentam defeitos. Sabendo que o lote contém 10 peças com defeitos, calcule:

(a) A probabilidade de o lote ser aceite. (2.5)

Seja X =“nº de peças sem defeitos entre as 10 peças testadas”. Como X representa o número de sucessos em 10 tiragens sem reposição então $X \sim H(N=100, M=90, n=10)$.
$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10) = \frac{\binom{90}{9}\binom{10}{1}}{\binom{100}{10}} + \frac{\binom{90}{10}\binom{10}{0}}{\binom{100}{10}} \approx 0.7385.$

(b) Se o lote é rejeitado o vendedor tem uma perda de 150€. Se o lote é aceite o vendedor tem um ganho de 3€ por peça. Qual é o valor esperado do lucro do vendedor com este lote? (2.5)

Seja L =“lucro na venda de um lote de 100 peças, em €”.

$$P(L=l) = \begin{cases} P(X<9) = 0.2615, & l = -150 \\ P(X \geq 9) = 0.7385, & l = 300 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$E[L] = \sum_l l P(L=l) \approx 182.33$€.

2. Admita que o tempo que um passageiro espera, na plataforma, pelo comboio é uma variável aleatória X com distribuição exponencial com desvio padrão igual a 10 min.

(a) Qual é a probabilidade de um passageiro ter que esperar na plataforma pelo comboio entre 10 a 20 minutos? (1.0)

Como $X \sim Exp(\lambda)$ e $\sqrt{Var[X]} = \frac{1}{\lambda} = 10$ tem-se $\lambda = \frac{1}{10}$.
$P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\, dx = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.2325.$

(b) Suponha que um passageiro já esperou na plataforma pelo comboio 5 min. Qual é a probabilidade de o mesmo passageiro ter de esperar ainda mais 10 min pela chegada do comboio? (1.5)

$P(X > 15 \mid X > 5) = P(X > 10)$, pela amnésia da distribuição exponencial.
$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\, dx = e^{-1} \approx 0.3679.$

(c) Um passageiro chega atrasado ao seu emprego se nesse dia tiver de esperar mais de 10 min pelo comboio na plataforma. Qual é a probabilidade de, devido à espera na plataforma pelo comboio, o passageiro chegar atrasado ao emprego em pelo menos 2 dias de um conjunto de 5 dias distintos. (2.5)

Seja Y =“nº de dias em que o passageiro chega atrasado ao emprego, num conjunto de 5 dias”. Uma vez que Y representa o número de sucessos em 5 repetições de uma prova de Bernoulli, que admitimos que são independentes, então $Y \sim Bi(n=5, p)$ com $p = P(X > 10) = e^{-1}$.
$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1) \approx 0.6054.$

Grupo II	10 valores

1. O valor de precipitação total anual em Lisboa é uma variável aleatória X, com distribuição normal de valor médio 882.1 mm.

(a) Calcule o desvio padrão de X caso a probabilidade de se registar uma precipitação total anual em Lisboa inferior a 599.6 mm seja 0.25. (2.0)

$X \sim N(882.1, \sigma^2) \implies Z = \frac{X-882.1}{\sigma} \sim N(0,1)$.
$P(X < 599.6) = 0.25 \iff P\left(Z < \frac{599.6-882.1}{\sigma}\right) = 0.25 \iff \Phi\left(\frac{599.6-882.1}{\sigma}\right) = 0.25 \iff \frac{599.6-882.1}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.25) \iff \frac{599.6-882.1}{\sigma} = -0.6745 \iff \sigma = 418.84$ mm.

(b) Calcule a probabilidade de a média da precipitação total anual em Lisboa no período entre 1931 e 2015 (85 anos) exceder 950 mm. Admita que o desvio padrão da precipitação total anual em Lisboa é 400 mm e que precipitações totais anuais em anos distintos são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. (3.0)

Seja X_i ="precipitação total anual em Lisboa no ano i", com $i = 1, \ldots, 85$ e $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{85} X_i}{85}$. Tem-se que $\bar{X} \sim N\left(E[\bar{X}], Var[\bar{X}]\right)$ uma vez que $\bar{X}$ é uma combinação linear de variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas.
$E[\bar{X}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{85} X_i}{85}\right] = E[X] = 882.1$ mm e $Var[\bar{X}] = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{85} X_i}{85}\right] = \frac{Var[X]}{85} = \frac{400^2}{85} \approx 1882.35$ mm^2.
$P(\bar{X} > 950) = 1 - F_{N(882.1, 1882.35)}(950) \approx 0.0588$.

2. O par aleatório bidimensional discreto (X, Y) tem função de probabilidade conjunta:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.1	0.1
1	0.2	0.0	0.1
2	0.0	0.3	0.1

(a) Calcule a probabilidade de o dobro de Y ser maior que X. (2.0)

$P(2Y > X) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) = 0.4$.

(b) Determine o valor da covariância entre X e Y. As variáveis aleatórias X e Y são independentes? (3.0)

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y) = \begin{cases} 0.3, & x = 0,\ 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$E[X] = \sum_x x P(X=x) = 1.1$
$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y) = \begin{cases} 0.3, & y = 0,\ 2 \\ 0.4, & y = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$E[Y] = \sum_y y P(Y=y) = 1.0$
$E[XY] = \sum_x \sum_y xy P(X=x, Y=y) = 1.2$, $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0.1$
$Cov[X,Y] \neq 0 \implies X$ e Y não são independentes.