

Probabilidades e EstatísticaLEAN, LEE, LEGI, LEGM, LEIC-A, LEIC-T, LEMat, LERC, LMAC,
MEAer, MEAmbi, MEBiol, MEBiom, MEEC, MEFT, MEMec, MEQ2º semestre – 2011/2012
25/06/2012 – 11:30**2º TESTE** (Época de recurso)
Duração: 1 hora e 30 minutosJustifique convenientemente **todas as respostas!****Grupo I**

10 valores

1. Considere uma amostra aleatória (X_1, \dots, X_n) de uma população X , representando o tempo de funcionamento (em 10^3 h) de uma dada componente electrónica, com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\beta^3} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

onde o parâmetro β é positivo e desconhecido, sendo que X possui valor esperado 3β e variância $3\beta^2$.

- (a) Derive o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro β . (2.5)

- **V.a. de interesse**

X = tempo de funcionamento (em 10^3 h)

- **F.d.p. de X**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\beta^3} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

- **Parâmetro DESCONHECIDO**

β ($\beta > 0$)

- **Amostra**

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ amostra de dimensão n proveniente da população X

- **Obtenção do estimador de MV de β**

Passo 1 — Função de verosimilhança

$$\begin{aligned} L(\beta|\underline{x}) &\stackrel{X_i \text{ indep}}{=} \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \\ &\stackrel{X_i \sim X}{=} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2}{2\beta^3} e^{-\frac{x_i}{\beta}} \right) \\ &= 2^{-n} \beta^{-3n} e^{-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^2, \beta > 0 \end{aligned}$$

Passo 2 — Função de log-verosimilhança

$$\ln L(\beta|\underline{x}) = -n \ln(2) - 3n \ln(\beta) - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2)$$

Passo 3 — Maximização

A estimativa de MV de β é aqui representada por $\hat{\beta}$ e

$$\hat{\beta} : \begin{cases} \frac{d \ln L(\beta|\underline{x})}{d\beta} \Big|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \frac{d^2 \ln L(\beta|\underline{x})}{d\beta^2} \Big|_{\beta=\hat{\beta}} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \\ -\frac{3n}{\hat{\beta}} + \frac{1}{\hat{\beta}^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \\ \frac{3n}{\hat{\beta}^2} - \frac{2}{\hat{\beta}^3} \sum_{i=1}^n x_i < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta} = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{\bar{x}}{3} \\ -\frac{27n}{\bar{x}^2} < 0, \text{ proposição verdadeira pois } \bar{x} > 0 \end{cases}$$

Passo 4 — Estimador de MV de β

Será representado pela v.a. $EMV(\beta) = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{\bar{X}}{3}$.

- (b) *Supondo que a amostra conduziu a uma estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro β igual a 0.54 (em $10^3 h$), determine a correspondente estimativa de máxima verosimilhança do valor esperado do tempo de funcionamento por componente.* (0.5)

• **Outro parâmetro** DESCONHECIDO

$$\begin{aligned} h(\beta) &= E(X) \\ &= 3\beta \end{aligned}$$

• **Estimativa de MV de $h(\beta)$**

Invocando a propriedade de invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, pode concluir-se que a estimativa de MV de $h(\beta) = E(X) = 3\beta$ é

$$\begin{aligned} \widehat{h(\beta)} &= h(\hat{\beta}) \\ &= 3\hat{\beta} \\ &= 3 \times 0.54 \\ &= 1.62. \end{aligned}$$

- (c) *Determine o erro quadrático médio do estimador $T = \frac{\bar{X}+1}{3}$ do parâmetro β .* (1.5)

• **Outro estimador de β**

$$T = \frac{\bar{X}+1}{3} = \frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}$$

• **Erro quadrático médio**

É sabido que $E(\bar{X}) = E(X)$ e $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$, quando $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$, $i = 1, \dots, n$. Se para além disso atendermos ao facto de $E(X) = 3\beta$ e $V(X) = 3\beta^2$, obtemos sucessivamente:

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{E(X)}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \beta + \frac{1}{3} \\ V(T) &= V\left(\frac{\bar{X}}{3} + \frac{1}{3}\right) \\ &= V\left(\frac{\bar{X}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{V(X)}{n} \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{3\beta^2}{n} \\ &= \frac{\beta^2}{3n} \\ EQM_{\beta}(T) &= E[(T - \beta)^2] \\ &= V(T) + [E(T) - \beta]^2 \\ &= \frac{\beta^2}{3n} + \frac{1}{3^2}. \end{aligned}$$

2. A administração de uma empresa produtora de cabos de aço decidiu estudar a tensão de ruptura (em kgf), X , de cabos produzidos por um novo processo de fabrico a partir da análise de 10 desses cabos, escolhidos ao acaso. Os 10 cabos analisados conduziram a $\sum_{i=1}^{10} x_i = 1020$ e $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 104082$; assume-se que a tensão de ruptura de cabos produzidos pelo novo processo de fabrico possui distribuição normal.

- (a) *É razoável admitir que o novo processo produz cabos com tensão média de ruptura diferente do valor actualmente especificado de 100 kgf, ao nível de significância de 5%?* (3.0)

- **V.a. de interesse**

X = tensão de ruptura de um cabo

- **Situação**

$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

μ DESCONHECIDO

σ^2 desconhecido

- **Hipóteses**

$H_0 : \mu = \mu_0 = 100$

$H_1 : \mu \neq \mu_0 = 100$

- **Nível de significância**

$\alpha_0 = 0.05$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim_{H_0} t_{(n-1)}$$

pois pretendemos efectuar um teste sobre o valor esperado de uma população normal com variância desconhecida.

- **Região de rejeição de H_0** (para valores da estatística de teste)

Tratando-se de um teste bilateral ($H_1 : \mu \neq \mu_0$), a região de rejeição de H_0 é uma reunião de intervalos simétricos do tipo $W = (-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, onde $c : P(\text{Rejeitar } H_0 | \mu = \mu_0) = \alpha_0$, i.e.,

$$\begin{aligned} c &= F_{t_{(n-1)}}^{-1}(1 - \alpha_0/2) \\ &= F_{t_{(10-1)}}^{-1}(1 - 0.05/2) \\ &= F_{t_{(9)}}^{-1}(0.975) \\ &\stackrel{\text{tabela}}{=} 2.262. \end{aligned}$$

- **Decisão**

Uma vez que

$$n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1020}{10} = 102$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{10-1} (104\,082 - 10 \times 102^2) = \frac{42}{9} = \frac{14}{3},$$

o valor observado da estatística é igual a

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{102 - 100}{\frac{\sqrt{\frac{14}{3}}}{\sqrt{10}}} \\ &\simeq 2.928. \end{aligned}$$

Como $t \simeq 2.928 \in W = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, +\infty)$, devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. maior ou igual a 5%.

- (b) *Deduza um intervalo, com nível de confiança de 90%, para a variância da tensão de ruptura dos cabos produzidos pelo novo processo.* (2.5)

- **Situação**

$X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

μ desconhecido

σ^2 DESCONHECIDO

- **Obtenção de IC para σ^2**

– **Passo 1 — Selecção da v.a. fulcral para σ^2**

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$$

– **Passo 2 — Obtenção dos quantis de probabilidade**

Dado que $(1 - \alpha) \times 100\% = 90\% \Leftrightarrow \alpha = 0.10$, os quantis a utilizar são

$$(a_\alpha, b_\alpha) : \begin{cases} P(Z < a_\alpha) = \alpha/2 \\ P(Z > b_\alpha) = \alpha/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\alpha = F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(\alpha/2) = F_{\chi^2_{(9)}}^{-1}(0.05) \stackrel{tabela}{=} 3.325 \\ b_\alpha = F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(1 - \alpha/2) = F_{\chi^2_{(9)}}^{-1}(0.95) \stackrel{tabela}{=} 16.92. \end{cases}$$

Estes enquadram a v.a. fulcral para σ^2 com probabilidade igual a $(1 - \alpha)$.

– **Passo 3 — Inversão da desigualdade $a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha$**

$$P(a_\alpha \leq Z \leq b_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left[a_\alpha \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b_\alpha\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\frac{a_\alpha}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{b_\alpha}{(n-1)S^2}\right] = 1 - \alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(1-\alpha/2)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(\alpha/2)}\right] = 1 - \alpha.$$

– **Passo 4 — Concretização**

Do passo 3 conclui-se que

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%} \left[\frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(1-\alpha/2)}, \frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}(\alpha/2)} \right].$$

Ora, tendo em conta que $n = 10$ e $s^2 \stackrel{(a)}{=} \frac{14}{3}$, bem como os quantis do passo 2, obtém-se o IC a 90% para σ^2 :

$$\begin{aligned} IC_{90\%}(\sigma^2) &= \left[\frac{(10-1) \times \frac{14}{3}}{16.92}, \frac{(10-1) \times \frac{14}{3}}{3.325} \right] \\ &= [2.482, 12.632]. \end{aligned}$$

Grupo II

10 valores

1. A averiguação de uma amostra casual de 1000 apólices recentes de uma empresa seguradora, em termos do número X de sinistros por apólice no último ano, mostrou que: 805 apólices não tinham sinistros associados; 172 apólices tinham um único sinistro associado; e as restantes 23 apólices tinham associados pelo menos 2 sinistros. (4.0)

Pretende saber-se se a distribuição Binomial(10, 0.02) pode ser um bom modelo para a distribuição de X à luz dos dados indicados. Diga que conclusão deve tirar sobre o modelo conjecturado, tendo por base o cálculo do valor-p de um teste adequado.

• **V.a. de interesse**

X = número de sinistros por apólice no último ano

• **Hipóteses**

$$H_0 : X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)$$

$$H_1 : X \not\sim \text{Binomial}(10, 0.02)$$

• **Estatística de Teste**

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \stackrel{a}{\sim}_{H_0} \chi^2_{(k-\beta-1)},$$

onde:

$k = \text{No. de classes} = 3;$

$O_i = \text{Frequência absoluta observável da classe } i;$

$E_i = \text{Frequência absoluta esperada, sob } H_0, \text{ da classe } i;$

$\beta = \text{No. de parâmetros a estimar} = 0.$

- **Região de rejeição de H_0** (para valores de T)

Tratando-se de um teste de ajustamento, a região de rejeição de H_0 escrita para valores de T é um intervalo à direita $W = (c, +\infty)$.

Frequências absolutas esperadas sob H_0

Para já, note-se que o conjunto de valores possíveis da distribuição Binomial(10, 0.02) é $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$. Assim, as classes a considerar são $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{2, \dots, 10\}$ e as frequências absolutas esperadas sob H_0 são iguais a

$$\begin{aligned} E_1 &= n \times p_1^0 \\ &= n \times P[X = 0 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)] \\ &= 1000 \times \binom{10}{0} 0.02^0 (1 - 0.02)^{10-0} \\ &= 1000 \times 0.98^{10} \\ &= 1000 \times F_{\text{Bin}(10, 0.02)}(0) \\ &\stackrel{\text{tabela}}{=} 1000 \times 0.8171 \\ &= 817.1 \\ E_2 &= n \times p_2^0 \\ &= n \times P[X = 1 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)] \\ &= 1000 \times \binom{10}{1} 0.02^1 (1 - 0.02)^{10-1} \\ &= 1000 \times 10 \times 0.02 \times 0.98^9 \\ &= 1000 \times [F_{\text{Bin}(10, 0.02)}(1) - F_{\text{Bin}(10, 0.02)}(0)] \\ &\stackrel{\text{tabela}}{=} 1000 \times (0.9838 - 0.8171) \\ &= 1000 \times 0.1667 \\ &= 166.7 \\ E_3 &= n \times p_3^0 \\ &= n \times P[X \geq 2 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)] \\ &= n \times P[X = 2, \dots, 10 \mid X \sim \text{Binomial}(10, 0.02)] \\ &= n \times (1 - p_1^0 - p_2^0) \\ &= n \times (1 - 0.8171 - 0.1667) \\ &= 1000 \times 0.0162 \\ &= 16.2 \end{aligned}$$

Não é necessário qualquer agrupamento de classes uma vez que em pelo menos 80% das classes se verifica $E_i \geq 5$ e em todas elas tem-se $E_i \geq 1$.

- **Decisão**

No cálculo do valor observado da estatística de teste convém recorrer à seguinte tabela auxiliar.

	Classe i	Freq. abs. obs. o_i	Freq. abs. esper. sob H_0 $E_i = n \times p_i^0$	Parcelas valor obs. estat. teste $\frac{(o_i - E_i)^2}{E_i}$
i				
1	{0}	805	817.1	$\frac{(805 - 817.1)^2}{817.1} = 0.1792$
2	{1}	172	166.7	0.1685
3	{2, ..., 10}	23	16.2	2.8543
		$\sum_{i=1}^k o_i = n = 1000$	$\sum_{i=1}^k E_i = n = 1000$	$t = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - E_i)^2}{E_i} = 3.2020$

• **Decisão (com base em intervalo para o valor-p)**

Uma vez que este teste está associado a uma região de rejeição que é um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} \text{valor} - p &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P(T > 3.2020 \mid H_0) \\ &\simeq 1 - F_{\chi^2_{(3-0-1)}}(3.2020). \end{aligned}$$

Recorrendo às tabelas de quantis da distribuição do qui-quadrado podemos adiantar um intervalo para o *valor-p* deste teste. Com efeito, ao enquadrarmos convenientemente $t = 3.2020$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} F_{\chi^2_{(2)}}^{-1}(0.70) = 2.408 &< 3.2020 < 3.219 = F_{\chi^2_{(2)}}^{-1}(0.80) \\ 0.70 &< F_{\chi^2_{(2)}}(3.2020) < 0.80 \\ 0.20 = 1 - 0.80 &< \text{valor} - p < 1 - 0.70 = 0.30. \end{aligned}$$

Logo:

- não devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 20\%$, por exemplo a qualquer dos níveis usuais de significância de 1%, 5% e 10%;
- devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \geq 30\%$.

• **Alternativa — Decisão (com base no valor-p determinado usando máquina de calcular)**

Dado que este teste está associado a uma região de rejeição que é um intervalo à direita temos:

$$\begin{aligned} p - \text{value} &= P(T > t \mid H_0) \\ &= P(T > 3.2020 \mid H_0) \\ &\simeq 1 - F_{\chi^2_{(3-0-1)}}(3.2020) \\ &= 0.2017. \end{aligned}$$

Consequentemente:

- não devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 \leq 20.17\%$, por exemplo a qualquer dos níveis usuais de significância de 1%, 5% e 10%;
- devemos rejeitar H_0 a qualquer n.s. $\alpha_0 > 20.17\%$.

2. Num estudo investigando a relação entre exposição ao ruído e hipertensão, obtiveram-se dados sobre o aumento Y da pressão arterial (em mm Hg) e a intensidade de som x (em db) a que indivíduos são sujeitos, que se encontram parcialmente sumariados em:

$$n = 20, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 1\,656, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 140\,176, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i = 86, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 494.$$

Ajustando-se o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$, com erros aleatórios não correlacionados entre si com valor esperado nulo e variância constante, obteve-se a estimativa dos mínimos quadrados de β_0 , $\hat{\beta}_0 = -10.13$.

- (a) Determine uma estimativa do valor esperado do aumento da pressão arterial face à exposição a ruído com intensidade de 85 db. Calcule e interprete o valor do coeficiente de determinação. (3.0)

- **[Modelo de RLS**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Y_i = aumento da pressão arterial no i – ésimo indivíduo

x_i = intensidade de som a que é sujeito o i – ésimo indivíduo

ϵ_i = erro aleatório associado à medição do aumento da pressão arterial do i – ésimo indivíduo]

- **Estimativa de β_1**

[Uma vez que $n = 20$ e

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1\,656,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1\,656}{20} = 82.8$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 140\,176$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 = 140\,176 - 20 \times 82.8^2 = 3\,059.2$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 86,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{86}{20} = 4.3$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = 494$$

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - n(\bar{y})^2 = 494 - 20 \times 4.3^2 = 124.2$$

$$\hat{\beta}_0 = -10.1072]$$

a estimativa dos mínimos quadrados de β_1 é, para este modelo, tal que:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \times \bar{x}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{\bar{y} - \hat{\beta}_0}{\bar{x}} \\ &= \frac{4.3 - (-10.1072)}{82.8} \\ &= 0.174 \end{aligned}$$

- **Estimativa de $E(Y|x = 85)$**

É sabido que $\hat{E}(Y|x = x_0) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \times x_0$, pelo que:

$$\hat{E}(Y|x = 85) = -10.1072 + 0.174 \times 85 = 4.6828.$$

[Esta estimativa deve usada com cautela, caso $85 \notin [\min_{i=1,\dots,n} x_i, \max_{i=1,\dots,n} x_i]$.]

- **Obtenção e interpretação do coeficiente de determinação**

Tirando partido do facto de $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$, assim como dos valores obtidos anteriormente, segue-se

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y})^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \times (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)} \\ &= \frac{[\hat{\beta}_1 \times (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)]^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \times (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)} \\ &= \frac{\hat{\beta}_1^2 \times (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} \\ &= \frac{0.174^2 \times 3\,059.2}{124.2} \\ &\simeq 0.745735, \end{aligned}$$

i.e., cerca de 74.57% da variação total da variável resposta Y é explicada pelo modelo de regressão, o que indicia um bom ajustamento da recta estimada ao nosso conjunto de dados.

- (b) *Admitindo que os erros aleatórios são independentes e possuem distribuição normal, averigue se é possível concluir que a exposição ao ruído provoca um aumento no valor esperado de Y , ao nível de significância de 5%.* (3.0)

- **[Hipóteses de trabalho]**

$\epsilon_i \sim_{i.i.d.} \text{Normal}(0, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$ (hipótese de trabalho)
 $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ DESCONHECIDOS]

- **Hipóteses**

$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$ (ou $\beta_1 = 0$)
 $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0} > 0$ (ou $\beta_1 > 0$)

- **Nível de significância**

$\alpha_0 = 5\%$

- **Estatística de teste**

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \sim_{H_0} t_{(n-2)}$$

- **Região de rejeição de H_0** (para valores da estatística de teste)

Estamos a lidar com um teste unilateral superior ($H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$), pelo que a região de rejeição de H_0 é $W = (c, +\infty)$, onde

$$c : P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0) = \alpha_0$$

$$c = F_{t_{(n-2)}}^{-1}(1 - \alpha_0)$$

$$c = F_{t_{(18)}}^{-1}(0.95)$$

$$c \stackrel{\text{tabela}}{=} 1.734.$$

- **Decisão**

Tendo em conta que a estimativa σ^2 é igual a

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-2} \left[\left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right) - (\hat{\beta}_1)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{20-2} (124.2 - 0.174^2 \times 3059.2) \\ &\simeq 1.7544, \end{aligned}$$

e atendendo a alguns dos resultados anteriores, o valor observado da estatística de teste é dado por

$$\begin{aligned} t &= \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}}} \\ &= \frac{0.174 - 0}{\sqrt{\frac{1.7544}{3059.2}}} \\ &= 7.2659. \end{aligned}$$

Como $t = 7.2659 \in W = (1.734, +\infty)$, devemos rejeitar $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} = 0$ a favor de $H_1 : \beta_1 > \beta_{1,0}$ a qualquer n.s. superior ou igual a $\alpha_0 = 5\%$.