Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 4 de Janeiro de 2016 - 9:00h

MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^{-x}+2}}{e^x}\,dx$, ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ $iii)$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(x+2)(x^2+9)}\,dx$.

Resolução. (i)

$$P\left(\frac{\sqrt{e^{-x}+2}}{e^x}\right) = P\left(e^{-x}\sqrt{e^{-x}+2}\right) = 2/3\left(e^{-x}+2\right)^{3/2},$$

da fórmula de Barrow, tem-se

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^{-x}+2}}{e^x}\,dx = \left[2/3\sqrt{(e^{-x}+2)^3}\right]_0^1 = 2/3\sqrt{(e^{-1}+2)^3} - 2\sqrt{3}.$$

(ii) Integrando por partes,

$$\int_0^1 \frac{x\ln(x^2+2)}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \left[\sqrt{x^2+2}\ln(x^2+2)\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\frac{2x}{x^2+2}\,dx = \left(\sqrt{3}\ln(3)-\sqrt{2}\ln(2)\right) - \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx =$$

$$= \left(\sqrt{3}\ln(3)-\sqrt{2}\ln(2)\right) - \left[2\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 = \left(\sqrt{3}(\ln(3)+2) - \sqrt{2}(\ln(2)+2)\right).$$

(iii) A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_0^1 \frac{2}{(x+2)(x^2+9)}\,dx = A\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx + B\int_0^1 \frac{x}{x^2+9}\,dx + C\int_0^1 \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

e da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+9}\,dx = A\left[\ln(x+2)\right]_0^1 - B/2\left[\ln(x^2+9)\right]_0^1 + C/3\left[\operatorname{arctg}(x/3)\right]_0^1,$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$2 = (A+B)x^2 + (2B+C)x + 9A + 2C,$$

vindo que

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 9A+2C=2. \end{cases}$$

Obtém-se $A = \frac{2}{13}$, $B = -\frac{2}{13}$, $C = \frac{4}{13}$,

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+9}\, dx = \frac{1}{13}\left(\ln\frac{27}{40} + \frac{4}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right).$$

▪

2. Considere a região R definida por

$$\{(x,y) \in^2 :\ 0 \leq x \leq 2\pi \ \text{ e } \ \cos x - 2 \leq y \leq e^x\}.$$

Esboce a região R e calcule a sua área.

Resolução.

Estabelece-se a expressão para a área da região plana

$$\int_0^{2\pi} e^x - (\cos x - 2)\, dx.$$

vindo, da fórmula de Barrow,

$$\int_0^{2\pi} e^x - (\cos x - 2)\, dx = [e^x - \operatorname{sen} x + 2x]_0^{2\pi} = e^{2\pi} - 1 + 4\pi.$$

▪

3. Seja a função

$$G(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{arctg}(2x^2)\, \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt\,, \qquad x \in]-1,1[\,.$$

i) Defina a função derivada de G.

ii) Determine, usando a mudança de variável $t = \operatorname{sen} u$, o valor de $G(\frac{\sqrt{2}}{2})$.
(Sugestão: $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x)$)

Resolução.

i) A função $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em $]-1,1[$ e portanto diferenciável do teorema fundamental do cálculo.
Como a função $G(x) = \operatorname{arctg}(2x^2) \int_0^{x^2} \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \operatorname{arctg}(2x^2)\, F(x^2)$, resulta do produto e da composição de funções diferenciáveis, G é também diferenciável em $]-1,1[$. A função derivada de g é definida por $G' :]-1,1[\to \mathbb{R}$ e

$$G'(x) = \frac{2x}{1+4x^4}\, F(x^2) + \operatorname{arctg}(2x^2)\, 2x\, \frac{2x^4}{\sqrt{1-x^4}}.$$

ii) $G(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \operatorname{arctg} 1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $t = \operatorname{sen} u$, tem-se

$$\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}} \cos u\, du = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{sen}^2 u}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u\, du$$

da fórmula de Barrow tem-se

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 - \cos(2u)\, du = \frac{\pi}{4}\,[u - 1/2\operatorname{sen}(2u)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4}\,(\pi/6 - \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

▪

4. Sejam $a, b, c, d \in$, $a < b$ e $c < d$, $g : [a, b] \to [c, d]$ uma função com derivada contínua tal que $g'(x) \neq 0$ para $x \in [a, b]$, e com função inversa $g^{-1} : [c, d] \to [c, b]$ integrável. Sabendo que para $y = g(x)$ se tem $(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)}$, mostre a igualdade seguinte:

$$\int_c^d g^{-1}(y)\, dy = g^{-1}(d)\, d - g^{-1}(c)\, c - \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} g(x)\, dx\,.$$

Resolução. Integrando por partes e por substituição

$$\int_c^d g^{-1}(y)\, dy = \left[y\, g^{-1}(y)\right]_c^d - \int_c^d (g^{-1})'(y)\, dy = g^{-1}(d)\, d - g^{-1}(c)\, c - \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} g(x)\, (g^{-1})'(g(x))\, g'(x)\, dx\,.$$

$$= g^{-1}(d)\, d - g^{-1}(c)\, c - \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} g(x)\, dx\,.$$

∎

II (8 val.)

1. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes e determine a soma de uma delas:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} \quad , \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \quad , \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln^5 n}\,.$$

Resolução. (i) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

é uma série geométrica de razão $R = 1/2 < 1$, logo é uma série convergente e a sua soma é $3\,.1/(1 - 1/2) = 6$.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ é uma série convergente da aplicação do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \Big/ \frac{n^n}{(n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{n+1} = e\,.0 = 0 < 1\,.$$

(iii)

Tem-se que $a_n = \dfrac{1}{n^2 + \ln^5 n} \leq b_n = \dfrac{1}{n^2}$, uma vez que $\ln^5 n \geq 0$.

Do critério geral de comparação, sendo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série de Dirichlet convergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 2 \geq 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é também convergente.

∎

2. Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+5)\, 2^n}.$$

i) Determine o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente.

ii) Qual a natureza da série númerica obtida quando $x = 5$? Justifique.

Resolução.

(i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+5)\, 2^n}}{\frac{1}{(n+6)\, 2^{n+1}}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n+6}{n+5} = 2$$

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+5)\, 2^n}$ converge absolutamente se $|x - 3| < 2$ i.e $1 < x < 5$. Sendo $]1, 5[$ o maior intervalo aberto onde a série converge absolutamente.

(ii) Para $x = 5$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+5}$, é uma série divergente, uma vez que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+5} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n}$,
e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, é a série harmónica, uma série de Dirichlet divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1 \leq 1$.

▪

3. Considere a função f, tal que para x pertencente ao seu domínio

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

i) Desenvolva f em série de potências de x, indicando o domínio de convergência.

ii) Calcule $f^{(23)}(0)$.

Resolução.

i) O desenvolvimento de f em série de potências de x, obtém-se por intermédio de uma substituição na série geométrica.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+3}, \qquad \text{onde} \qquad |x^2| < 1, \qquad \text{ou seja} \qquad x \in]-1, 1[$$

ii) A série de Taylor é definida por,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m, \quad \text{onde} \quad a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

Neste caso tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+3} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$$

em que $a_m = 0$ se $m \neq 2n+3$ com $n \in \mathbb{N}_0$.
Vindo $f^{(23)}(0) = 23!$.

▪