



**TÉCNICO**  
LISBOA

## **Modelos experimentais para apoio ao ensino da mecânica estrutural**

**Rui Miguel Água-Doce Alves**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

**Engenharia Civil**

Orientadores: Prof. Vítor Manuel Azevedo Leitão

Prof. João José Rio Tinto de Azevedo

**Júri:**

Presidente: José Joaquim Costa Branco de Oliveira Pedro

Orientador: Vítor Manuel Azevedo Leitão

Vogal: António Manuel Candeias de Sousa Gago

**Outubro 2015**



## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus orientadores, o Professor Vítor Leitão e o Professor João Azevedo, por me terem cedido esta oportunidade. Em especial ao Professor Leitão, com quem me reuni mais vezes, que se mostrou sempre disponível para me receber e nunca desistiu de mim. A sua imensa paciência e gosto pelo tema desta tese foram dos fatores mais importantes para a sua concretização.

Em segundo lugar, gostaria também de agradecer aos meus pais, que conseguiram manter o equilíbrio entre o apoio incondicional e a pressão que teve de ser feita quando, por momentos, vacilei.

Durante uma grande parte do tempo em que estive a desenvolver a tese tive dois trabalhos muito distintos, um deles a dar explicações no centro Rumo Ao Canudo, cuja diretora Dra. Sandra Mateus não poderia deixar de aqui ser mencionada, e outro no gabinete de Engenharia Civil Sogencivil, com o Engenheiro Manuel Palhinha, ex-professor no IST, com quem tive o prazer de trabalhar durante cerca de um mês, e cujo conhecimento e dedicação pela Engenharia Civil foram uma inspiração.

Por último, um grande agradecimento a todos os meus amigos, em especial aos colegas de casa, por nunca me deixarem esquecer que tinha uma tese para fazer.



## Resumo

Esta tese tem dois grandes objetivos: contribuir para a reorganização do Laboratório de Mecânica Estrutural do Instituto Superior Técnico e reunir uma coletânea de novas experiências/equipamentos que possam ser vir a ser adicionados a esse mesmo Laboratório.

Ao longo desta tese, encontram-se guias para várias experiências, para todos os equipamentos existentes no referido Laboratório, sendo que estes guias estão prontos a ser usados pelos alunos e professores. São sempre constituídos por uma descrição do equipamento, metodologia das experiências, fundo teórico e, quando se justifica, tabelas prontas a serem preenchidas por valores resultantes da experiência.

O último capítulo é então um conjunto de experiências, e respetivos equipamentos, interessantes que podem vir a ser adquiridas. Algumas estão já implementadas noutras universidades e, quando possível, é feita uma pequena proposta de aquisição. Outras são pequenos modelos que facilmente podem ser reproduzidos. São sempre descrito os conteúdos da mecânica estrutural abordados no equipamento/experiência em questão.

Assim, foram produzidos mais de quarenta guias para experiências, prontas a utilizar pelos docentes das Unidades Curriculares de Mecânica Estrutural do Instituto Superior Técnico e deixadas em aberto várias propostas realistas para a aquisição de outros equipamentos.

Palavras-chave:

Experiências

Equipamentos

Laboratório

Mecânica Estrutural



## Abstract

This thesis has two main goals: contributing to the reorganization of the Structural Mechanics Lab at Instituto Superior Técnico and assemble a set of new experiments/equipment that may be acquired or even made and added to that same Lab.

The thesis lists a series of guides for carrying out various experiments, for each and every equipment available in the Lab, ready to be used by the students and the teachers. These guides always include a description of the equipment, the methodology for the experiments, a brief theoretical background and, in some cases, tables/forms ready to be filled with the results of the experiment.

The last chapter is a collection of interesting experiments and their equipment that might be acquired and even, in some simple cases, made in-house. Some of them were already implemented in other universities and, for the cases judged more appropriate, proposals of acquisition are, briefly, made. Others are simpler models that can easily be replicated/built in the lab itself. The description of each experiment also includes the key concepts and theoretical aspects behind the experiments

More than forty guides were produced, ready to be used by the students and teachers at DECivil of the Instituto Superior Técnico as part of their courses in the field of Structural Mechanics and proposals were made of new experiments that may be added to the list of current experiments/equipment.

Keywords:

Experiments

Equipment

Lab

Structural Mechanics





# Índice

1 - Introdução.....	1
2 - Estática e Dinâmica dos Corpos Rígidos.....	5
2.1 - Estática.....	6
2.1.1 - Equipamento HST ACE 1 - Equilíbrio de forças .....	9
2.1.2 - Equipamento STR3 - Esforço transverso numa viga .....	13
2.1.3 - Equipamento STR2 - Momento fletor numa viga .....	19
2.1.4 - Equipamento MM3 - Plano Inclinado .....	23
2.2 - Dinâmica.....	29
2.2.1 - Equipamento MM7 - Kit de Mecanismos Simples .....	30
2.2.2 - Equipamento MM4 - Airtrack .....	37
2.2.3 - Equipamento MM2 - Kit de Dinâmica.....	44
2.2.4 - Equipamento TM155 - Aparelho de oscilações livres, amortecidas e forçadas .....	48
3 - Mecânica dos Corpos Deformáveis.....	59
3.1 - Resistência de Materiais .....	60
3.1.1 - Equipamento de Fotoelasticidade .....	62
3.1.2 - Equipamento STR5 - Estado de tensão em vigas à flexão.....	64
3.1.3 - Equipamento STR13 - Viga contínua.....	69
3.1.4 - Equipamento STR4 - Determinação de deslocamentos em vigas.....	77
3.1.5 - Equipamento STR18 - Flecha e reações dum pórtico .....	86
3.2 - Análise e Dimensionamento de Estruturas.....	90
3.2.1 - Equipamento HDM2 - Momento fletor quando ocorre assentamento dum apoio .....	93
3.2.2 - Equipamento STR 17 - Treliça .....	96
3.2.3 - Equipamento HDM4 - Teorema de Maxwell-Betti.....	104
3.2.4 - Equipamento HDM5 - Princípio de Muller-Breslau: momento fletor de extremidade .....	110
3.2.5 - Equipamento HDM6 - Princípio de Muller-Breslau: momento fletor interior.....	113
3.2.6 - Equipamento HDM7 - Princípio de Muller-Breslau: reações .....	115
3.2.7 - Equipamento HDM1 - Coeficiente de distribuição de momentos fletores.....	117
3.2.8 - Equipamento HDM3 - Momentos de fixação .....	121
4 - Novas experiências e equipamentos .....	126
4.1 - Com o equipamento já existente no IST .....	127
4.2 - Experiências de outras Universidades .....	128
4.2.1 - University of the Sunshine Coast (Austrália).....	128
4.2.2 - Nagoya University (Japão).....	130

4.2.3 - FEUP (Portugal) .....	131
4.2.4 - University of Trento (Itália) .....	133
4.2.5 - Istambul Kultur University (Turquia).....	135
4.2.6 - Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil) .....	136
4.3 - Outras Experiências.....	137
5 - Conclusão .....	141
6 - Referências.....	143
QUADROS DOS ENSAIOS .....	146
2.1.2 - Equipamento STR3 - Esforço transversal numa viga .....	147
2.1.3 - Equipamento STR2 - Momento fletor numa viga .....	148
2.1.4 - Equipamento MM3 - Plano Inclinado .....	149
2.2.2 - Equipamento MM4 - Airtrack .....	150
2.2.3 - Equipamento MM2 - Kit de Dinâmica.....	153
3.1.2 - Equipamento STR5 - Estado de tensão em vigas à flexão.....	154
3.1.3 - Equipamento STR13 - Viga contínua.....	156
3.1.4 - Equipamento STR4 - Determinação de deslocamentos em vigas.....	159
3.1.5 - Equipamento STR18 - Flecha e reações dum pórtico .....	163
3.2.2 - Equipamento STR 17 - Treliça .....	165



## Índice de figuras

2 - Estática e Dinâmica dos Corpos Rígidos.....	5
2.1 - Estática.....	6
Figura 1.1 - Sistema de forças nulo num corpo, há equilíbrio de forças e de momentos ....	6
Figura 1.2 - Sistema de forças em equilíbrio mas sem equilíbrio de momentos fletores.....	7
Figura 1.3 - Estrutura, carregamento e respetivo DCL.....	8
Figura 1.4 - Exemplo de sistema de forças e respetivo polígono.....	10
Figura 1.5 - O equipamento HST ACE 1 .....	12
Figura 1.6 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1.....	13
Figura 1.7 – Esquema e exemplos de sistemas de forças do equipamento para a experiência 2 adaptado de [43] .....	14
Figura 1.8 - Sistema de eixos de referência .....	15
Figura 1.9 - Equilíbrio num elemento infinitesimal com um carregamento genérico $p(x)$ . ..	16
Figura 1.10 - Relação entre os graus das funções carregamento/esforço transverso/momento fletor .....	17
Figura 1.11 - O equipamento STR3.....	18
Figura 1.12 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1.....	19
Figura 1.13 – Esquema e exemplos de sistemas de forças do equipamento para a experiência 2 adaptado de [41] .....	20
Figura 1.14 - O equipamento STR2.....	22
Figura 1.15 - Esquema de forças para a experiência 1.....	23
Figura 1.16 - Esquema do equipamento para a experiência 2.....	24
Figura 1.17 - Relação aceleração/massa suspensa .....	24
Figura 1.18 - Esquema de forças para o terceiro método da experiência 2 .....	25
Figura 1.19 - O equipamento MM3.....	28
2.2 - Dinâmica.....	29
Figura 2.1 – Esquema do equipamento para a experiência 1 retirado de [37].....	30
Figura 2.2 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 1) adaptado de [37].....	31
Figura 2.3 - Esquema do equipamento para a experiência 2 retirado de [37] .....	31
Figura 2.4 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 2) adaptado de [37].....	32
Figura 2.5 - Esquema do equipamento para a experiência 3 retirado de [37] .....	32
Figura 2.6 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 3) adaptado de [37].....	33
Figura 2.7 - Esquema do equipamento para a experiência 4 retirado de [37] .....	33

Figura 2.8 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 4) adaptado de [37] .....	34
Figura 2.9 - O equipamento MM7.....	36
Figura 2.10 - Esquema do equipamento para a experiência 1.....	37
Figura 2.11 - Colisão elástica .....	41
Figura 2.12 - Colisão inelástica .....	42
Figura 2.13 - O equipamento MM4.....	43
Figura 2.14 - Pormenores do equipamento retirado de [34].....	43
Figura 2.15 - Esquema do equipamento para a experiência 1 retirado de [35] .....	44
Figura 2.16 - Esquema do equipamento para a experiência 2.....	45
Figura 2.17 - O equipamento MM2.....	47
Figura 2.18 – Esquema do equipamento para a experiência 1A retirado de [14] .....	48
Figura 2.19 - Variação do período de vibração da estrutura em função do amortecimento adaptado de [14].....	49
Figura 2.20 - Esquema do equipamento para a experiência 2 retirado de [14] .....	50
Figura 2.21 - Esquema do equipamento .....	51
Figura 2.22 - Esquema de forças do equipamento .....	52
Figura 2.23 - Curvas para o coeficiente $\beta_1$ em função da relação frequência de excitação/frequência própria.....	57
Figura 2.24 - Fenómeno de ressonância adaptado de [14].....	57
Figura 2.25 - O equipamento TM155 .....	58
3 - Mecânica dos Corpos Deformáveis.....	59
3.1 - Resistência de Materiais .....	60
Figura 3.1 - Relação tensão/deformação num corpo rígido .....	60
Figura 3.2 - Relação tensão/deformação num corpo elástico .....	61
Figura 3.3 - Padrões de tensões .....	62
Figura 3.4 - O equipamento de fotoelasticidade.....	63
Figura 3.5 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência.....	64
Figura 3.6 - Tração e compressão num corpo .....	66
Figura 3.7 - Flexão num corpo.....	67
Figura 3.8- Diagrama de tensões normais na seção de um corpo sujeito à flexão.....	67
Figura 3.9 - O equipamento STR5.....	68
Figura 3.10 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1ª .....	69
Figura 3.11 – Esquema do equipamento para a experiência 1B.....	70
Figura 3.12 – Esquema do equipamento para a experiência 2 com as duas configurações da viga .....	72
Figura 3.13 – Esquema de uma viga de dois tramos.....	73

Figura 3.14 - Flecha de uma viga e respetivo raio de curvatura .....	75
Figura 3.15 - O equipamento STR13 (sem suporte) .....	76
Figura 3.16 - Esquema do equipamento para a experiência 1 adaptado de [45] .....	77
Figura 3.17 - Esquema do equipamento para a parte 1 da experiência 2 adaptado de [45] .....	79
Figura 3.18- Esquema do equipamento para a parte 2 da experiência 2 adaptado de [45] .....	80
Figura 3.19 - Esquema do equipamento para a experiência 3 adaptado de [45] .....	81
Figura 3.20 - Raio de curvatura, flecha e corda.....	82
Figura 3.21 - Esquema do equipamento para a experiência 4 adaptado de [45] .....	83
Figura 3.22- Raio de curvatura, flecha e deformada duma viga simplesmente apoiada sujeita à flexão .....	84
Figura 3.23 - O equipamento STR4 (sem suporte) .....	85
Figura 3.24 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1.....	86
Figura 3.25- Esquema e sistema de forças do equipamento para a parte A da experiência 2 .....	87
Figura 3.26- Esquemas e sistemas de forças do equipamento para a parte B da experiência 2.....	88
Figura 3.27 - O equipamento STR18.....	89
3.2 - Análise e Dimensionamento de Estruturas.....	90
Figura 4.1 - Viga encastrada-apoiada com momento fletor aplicado no apoio simples ....	90
Figura 4.2 - Viga simplesmente apoiada com carga móvel.....	91
Figura 4.3 - Linha de influência do esforço transversal a meio vão para uma viga simplesmente apoiada .....	91
Figura 4.4 - Esquema do equipamento para a experiência.....	93
Figura 4.5 - Esquema do equipamento com a cavilha inserida.....	93
Figura 4.6 - Assentamento numa viga bi-encastrada.....	94
Figura 4.7 - Assentamento numa viga encastrada-apoiada.....	94
Figura 4.8 - O equipamento HDM2 retirado de [16].....	95
Figura 4.9 - Esquema do equipamento para a experiência 1.....	96
Figura 4.10 - Esquema do equipamento para a experiência 2.....	98
Figura 4.11 - Esforço axial nos vários elementos da estrutura devido ao carregamento real .....	100
Figura 4.12 - Esforço axial nos vários elementos da estrutura devido à carga unitária ...	100
Figura 4.13 - O equipamento STR17.....	103
Figura 4.14 - Esquema do equipamento para a experiência.....	104
Figura 4.15 - Exemplos de sistemas de forças.....	106
Figura 4.16 - Exemplos de sistemas de forças para a nova configuração da estrutura ....	107

Figura 4.17 - O equipamento HDM4 com os vários suportes para as experiências .....	109
Figura 4.18 - Esquema do equipamento para a experiência.....	110
Figura 4.19 - Linhas de influência para as reações e para o momento fletor a meio vão da viga .....	111
Figura 4.20 - O equipamento HDM5 com os vários suportes para as experiências .....	112
Figura 4.21 - Esquema do equipamento para a experiência.....	113
Figura 4.22 - O equipamento HDM6 retirado de [20].....	114
Figura 4.23 - Esquema do equipamento para a experiência.....	115
Figura 4.24 - O equipamento HDM7 retirado de [21].....	116
Figura 4.25 - Esquema do equipamento para a experiência 1.....	117
Figura 4.26 - Esquema do equipamento com a cavilha inserida.....	117
Figura 4.27 - Esquema do equipamento para a experiência 2.....	118
Figura 4.28 - O equipamento HDM1 retirado de [15].....	120
Figura 4.29 - Esquema do equipamento para a experiência 1.....	121
Figura 4.30 - Esquema do equipamento para a experiência 4.....	123
Figura 4.31 – Transferência de momentos .....	123
Figura 4.32 - Viga bi-encastada com uma carga pontual aplicada .....	124
Figura 4.33 - O equipamento HDM3 retirado de [17].....	125
4 - Novas experiências e equipamentos .....	126
4.2 - Experiências de outras Universidades .....	128
Figura 5.1 – Equipamento para determinar a posição de centro de massa retirado de [27] .....	128
Figura 5.2 - Equipamento para o cálculo de reações retirado de [27].....	129
Figura 5.3 - Equipamento para observar a deformação em vigas retirado de [27] .....	129
Figura 5.4 – Equipamento para o estudo de colunas retirado de [27] .....	130
Figura 5.5 – O equipamento Bururu retirado de [8] .....	131
Figura 5.6 - O equipamento existente na FEUP retirado de [28] .....	132
Figura 5.7 - Dimensões dos elementos da treliça retirado de [1].....	133
Figura 5.8 - A treliça 3D retirado de [1].....	134
Figura 5.9 - Treliça construída com elementos de madeira retirado de [56] .....	135
Figura 5.10 - Deformada de uma coluna vista no equipamento Mola retirado de [32]... ..	136
Figura 5.11 - Deformada de um pórtico vista no equipamento Mola retirado de [32] ....	136
4.3 - Outras Experiências.....	137
Figura 5.12 - Exemplos de equipamentos para observar as deformadas de colunas.....	137
Figura 5.13 - Modelo de treliça que permite observar que elementos estão à tração e à compressão .....	138
Figura 5.14 - Equipamento simulando a ação de uma carga pontual numa laje.....	138

Figura 5.15 - Deformada de uma viga à flexão. Hipótese de pequenos deslocamentos (em cima) e para grandes deslocamentos (em baixo) retirado de wikipedia.com (2015).....	139
Figura 5.16 - O pêndulo de Newton .....	139
Figura 5.17 - Modelo para demonstrar o equilíbrio de forças coplanares .....	140



# 1 - Introdução

A Engenharia Civil, à semelhança das outras Engenharias, é bastante versátil, abrangendo vários campos. Estes podem ser divididos, seguindo a mesma lógica das áreas de especialização do Mestrado Integrado em Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, da seguinte forma: construção, estruturas, geotecnia, hidráulica e recursos hídricos e, finalmente, urbanismo, transportes e sistemas.

A presente tese surge com a motivação de desenvolver novos processos que possam facilitar o ensino e, por sua vez, a aprendizagem dos conteúdos da área de estruturas, que pode também ser dividida em várias áreas. No âmbito desta tese optou-se por se fazer a seguinte divisão: Estática e Dinâmica dos corpos rígidos; e Mecânica dos corpos deformáveis, seguindo, de certa forma, a organização das Unidades Curriculares de mecânica estrutural do já mencionado curso. A razão desta segunda divisão está relacionada com o objetivo desta tese: identificar e, dentro do possível, desenvolver modelos experimentais para apoio ao ensino da mecânica estrutural.

À semelhança do que já existe em muitos outros cursos do Instituto Superior Técnico, pretende-se criar uma biblioteca de experiências didáticas, para que as Unidades Curriculares de Mecânica Estrutural do curso de Engenharia Civil passem a incorporar na sua planificação sessões de laboratório e afins, que poderão também, em alguns casos, ser objeto de avaliação.

O DECivil já possui um laboratório didático de apoio às atividades de ensino da mecânica estrutural com um conjunto apreciável de equipamentos, pelo que, numa primeira fase, o objetivo foi a organização desse mesmo laboratório e equipamento. Assim, catalogaram-se os equipamentos e as experiências que é possível de se realizar com cada um deles. Para cada experiência foi elaborado um manual/guia que é sempre constituído por uma introdução do equipamento, o método de realização da experiência e um breve fundo teórico sobre a matéria em questão.

Com o material já existente no laboratório elaboraram-se guias para um conjunto vasto de experiências, referindo-se também a unidade curricular que, eventualmente, as poderá incluir no seu programa (entre parêntesis):

No ramo da Estática e Dinâmica dos corpos rígidos (dividido em dois ramos, Estática e Dinâmica):

Estática:

- Equilíbrio de forças, um suporte com um anel central onde vários cordéis se reúnem. Esses cordéis estão apoiados em roldanas, sendo possível aplicar-lhes pequenas cargas que provocam deslocamento do anel. É possível prender uma folha de papel no equipamento onde se aponta a direção do movimento que a aplicação das cargas provoca, sendo depois possível calcular o polígono de forças do sistema, sabendo a direção, sentido e valor de cada carga aplicada. (Mecânica I)

- Esforço transversal numa viga, onde é possível visualizar os efeitos de cargas transversais aplicadas numa viga, tanto em termos das reações que estas provocam assim como o andamento do valor do esforço transversal ao longo da viga. (Mecânica I)

- Momento fletor numa viga, que permite observar o momento fletor provocado por cargas transversais. Consiste num equipamento com uma viga simplesmente apoiada onde se pode aplicar um carregamento e medir o momento fletor que dele resulta. (Mecânica I)

- Plano inclinado, que, como o próprio nome indica, consiste num plano inclinado que, com o apoio de sensores, permite estudar conceitos como o atrito e a aceleração através dum veículo que se desloca ao longo desse plano. (Mecânica I)

Dinâmica:

- Kit de mecanismos simples, um quadro com manivelas, articulações e outras peças, que permite observar quatro mecanismos diferentes. (Mecânica II)

- Airtrack, um equipamento que cria uma via quase sem atrito de modo a que se possam estudar colisões elásticas e inelásticas assim como outros conceitos mais fundamentais nos quais esses se baseiam como as leis de Newton. (Mecânica II)

- Kit de dinâmica, à semelhança do kit de mecanismos simples, é também apenas um quadro, desta vez com um pêndulo e um sistema massa-mola que serve para observar alguns conceitos mais simples como a aceleração da gravidade e o amortecimento. (Mecânica II)

- Aparelho de oscilações livres, amortecidas e forçadas, uma viga com um apoio simples e um apoio elástico que permite visualizar os vários regimes de vibração (amortecida e não amortecida, livre e forçada, esta última recorrendo a um pequeno motor) incluindo o importante fenómeno da ressonância. (Mecânica II)

No ramo da Mecânica dos corpos deformáveis (dividido em Resistência de Materiais e Análise e Dimensionamento de Estruturas):

Resistência de Materiais:

- Equipamento de fotoelasticidade, que nos permite, de certa forma, antever as tensões que se geram em peças com diferentes formatos quando submetidas a cargas. Essas peças são feitas de um polímero especial que, quando atravessado por um raio de luz polarizada gera, em função das deformações do material, padrões visíveis na peça a partir dos quais se podem estimar as distribuições de tensões a que a peça está submetida. (Resistência de Materiais I)

- Estado de tensão em vigas à flexão, que permite o estudo das tensões de tração e de compressão que se desenvolvem nas vigas quando ocorre flexão. (Resistência de Materiais I)

- Viga contínua, um equipamento bastante versátil pela quantidade de experiências que se podem realizar nele, desde o cálculo de flechas ao cálculo de reações numa viga simplesmente apoiada à viga encastrada-apoiada, bi-encastrada e de dois tramos. (Mecânica I – Experiência 1A; Resistência de Materiais I – Experiências 1B, 2 e 3)

- Determinação de deslocamentos em vigas, que para além de permitir o estudo da flecha para vigas com diferentes condições de apoio, permite o estudo das suas deformadas e da flexão circular, sendo que todas estas experiências podem ser feitas para vigas de diferentes materiais, e portanto com módulos de elasticidade diferentes. (Resistência de Materiais I)

- Flecha e reações dum pórtico, que por sua vez estuda aquilo que outros equipamentos estudavam para vigas, o cálculo de flechas e reações, só que no âmbito do pórtico. Há ainda a possibilidade de permitir, ou não, o deslocamento horizontal ao nível do pórtico. (Resistência de Materiais I)

Análise e Dimensionamento de Estruturas:

- Momento fletor quando há assentamento dum apoio, que permite a visualização dos esforços de flexão em secções específicas de uma viga, cujos apoios podem estar encastrados, sujeita a assentamento de um dos apoios (Análise de Estruturas I)

- Treliça, uma base com uma estrutura composta por barras biarticuladas, que tanto pode ser isostática ou hiperestática do 1º grau. Permite estudar esse tipo de estruturas assim como fazer a introdução às relações entre tensão-deformação-esforço axial. Para o caso da treliça hiperestática é utilizado o método da carga unitária, como forma de determinar os deslocamentos das duas parcelas do método das forças. (Resistência de Materiais I)

- Teorema de Maxwell-Betti, uma viga de dois vãos que serve para estudar o teorema da reciprocidade (ou de Maxwell-Betti) através da identificação de duas secções onde, em alternativa, se aplicam cargas e se calculam deslocamentos, complementando a experiência com um caso especial do teorema para estruturas redundantes (hiperestáticas). (Análise de Estruturas I)

- Princípio de Muller-Breslau: momento fletor de extremidade. O equipamento em causa consiste, mais uma vez, numa viga de dois tramos sujeita a momentos flectores num apoio de extremidade permitindo assim a introdução ao estudo de linhas de influência. (Dimensionamento de Estruturas)

- Princípio de Muller-Breslau: momento fletor interior. Ainda o estudo de linhas de influência agora do momento fletor num apoio de continuidade da viga. (Dimensionamento de Estruturas)

- Princípio de Muller-Breslau: reações, para estudar linhas de influência do esforço transversal tanto num apoio de continuidade como num dos de extremidade, recorrendo a um processo já utilizado noutra experiência para simular os esforços provocados por um assentamento de apoio. (Dimensionamento de Estruturas)

- Coeficiente de distribuição de momentos flectores, um equipamento que permite não só estimar a rigidez da viga como os coeficientes de distribuição de momentos flectores, que são usados, por exemplo, quando se resolve uma estrutura utilizando o método de Cross. (Dimensionamento de Estruturas)

- Momentos de fixação, uma experiência que permite analisar e calcular as reações de momento que se geram em vigas bi-encastadas ou encastadas-apoiadas. (Dimensionamento de Estruturas)

Assim, nesta primeira parte, surgem dois grandes capítulos, já referidos anteriormente, que englobam as experiências que incidem sobre conceitos de cada uma dessas áreas, tentando sempre seguir a ordem sequencial com que esses conceitos são abordados nas Unidades Curriculares de Mecânica Estrutural do Instituto Superior Técnico.

Depois daquilo que se poderá chamar a catalogação/arrumação do laboratório para se tirar total proveito do material já existente, segue-se uma fase de pesquisa e selecção com o intuito de encontrar mais experiências que possam ser adicionadas à colecção. Novas experiências poderão surgir com a aquisição de novo material para o laboratório ou com a adaptação do já existente. Do equipamento que se encontra no actual laboratório, nenhum é de fácil transporte para, por exemplo, ser utilizado por um Professor numa sala de aula durante a sua palestra, mas, teria bastante interesse a aquisição de equipamentos mais simples, que pudessem ser usados para esse efeito.

Os principais obstáculos encontrados ao longo deste trabalho passaram pelo estado do equipamento, que por vezes já não possuía todas as peças necessárias a algumas experiências e o facto de alguns equipamentos não estarem montados, havendo a necessidade de desmontar outro de forma a libertar um suporte; encontrar experiências que digam respeito a esta área específica da mecânica estrutural. A grande maioria das experiências encontradas ao longo da pesquisa inseriam-se noutras áreas, como a óptica e a electricidade, ou mesmo a outra ciência como a química. Ainda assim, foram produzidos 44 guias para as mais variadas experiências, sendo que, por vezes, é possível realizar quatro diferentes experiências no mesmo equipamento (no caso dos mais versáteis), recorrendo apenas a pequenas alterações. Foi também reunido uma coletânea de possíveis experiências de outras universidades e não só, que nos permite concluir haver ainda imensas possibilidades para dinamizar o ensino da mecânica estrutural no Instituto Superior Técnico.

## 2 - Estática e Dinâmica dos Corpos Rígidos

Neste capítulo apresenta-se os diversos equipamentos com os quais é possível realizar experiências que abordam conceitos das áreas da estática e da dinâmica dos corpos rígidos. Fez-se uma verificação do estado dos equipamentos e, salvo os casos em que o equipamento não estava montado, foram replicadas as experiências, a fim de confirmar o seu bom funcionamento.

Na mecânica clássica, um corpo rígido é definido como um conjunto finito de  $n$  partículas de massa  $m_i$ , cuja soma perfaz o total da massa do corpo, e posições  $r_i$ , sendo a distância entre quaisquer dois pontos desse corpo constante no tempo.

Quando submetidos à ação de forças externas, se a sua resultante e momento fletor resultante forem nulos num ponto, assim serão em todos os pontos do corpo. Se a resultante não for nula e o momento fletor resultante for, há translação do corpo e, ao contrário, há rotação do corpo. No entanto, o caso mais comum é serem ambos não nulos, resultando num movimento que pode ser dividido nas duas partes, translação e rotação, em relação a um dado ponto de referência.

No primeiro caso, resultante e momento fletor nulos, há portanto equilíbrio das forças/momentos atuantes, a posição do corpo não se altera, e está-se no domínio da estática. Não havendo equilíbrio das forças atuantes, o corpo entra em movimento (analisado pela cinemática), estando-se no domínio da dinâmica, a qual faz o estudo do equilíbrio do corpo em movimento do corpo, considerando as forças/momentos atuantes e as forças/momentos de inércia.

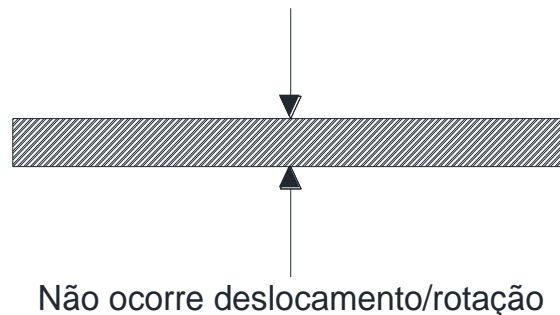
Para além destes dois grandes ramos, é também abordado o conceito de atrito, a força tangencial que resulta da interação entre dois corpos em contacto com tendência para iniciarem ou manterem movimento tangencial relativo.

Este capítulo encontra-se dividido em duas partes, Estática e Dinâmica, fazendo-se em cada uma delas a descrição dos vários equipamentos que possuem experiências onde se abordam conceitos dessas áreas. Optou-se por se integrar o equipamento Plano Inclinado, cujas experiências incidem sobre o conceito de atrito, na parte da Estática, pois esta matéria, no Instituto Superior Técnico, é lecionada na Unidade Curricular que serve de introdução à Estática, Mecânica I.

## 2.1 - Estática

A matéria de Estática é, no Instituto Superior Técnico, ensinada na Unidade Curricular de Mecânica I, a primeira Unidade Curricular de mecânica estrutural do curso de Engenharia Civil. Assim, tem um papel introdutório e vai servir de base para todas as Unidades Curriculares que se seguirão. É nesta Unidade Curricular que a grande maioria dos alunos terá o primeiro contacto com alguns conceitos mais básicos como o equilíbrio no plano/espço, reações, momentos e outros esforços.

Quando se fala em equilíbrio de um corpo, referimo-nos ao equilíbrio das forças e momentos nele atuantes, devendo a resultante de ambos ser nula, mantendo o corpo em equilíbrio. Mas, esse sistema de forças pode ser bastante complexo, na medida em que as forças podem ter direções e intensidades diferentes e podem ainda estar aplicadas em pontos diferentes do corpo. Tome-se o seguinte exemplo:



*Figura 1.1 - Sistema de forças nulo num corpo, há equilíbrio de forças e de momentos*

Na Figura 1.1, as forças estão aplicadas no centro de massa do corpo e, sendo simétricas, anulam-se, não provocando momento, estando o corpo em equilíbrio. Na Figura 1.2, o sistema de forças aplicado não está em equilíbrio e tenderá a provocar uma rotação do corpo, o que originará movimento. Esta rotação surge devido ao momento não equilibrado provocado pela excentricidade das forças. Este conceito, momento, já mencionado várias vezes ao longo deste texto, é um dos primeiros a ser abordado na unidade curricular de Mecânica I e será fundamental ao longo do estudo da Mecânica Estrutural: é uma grandeza que representa o efeito, à distância, de uma força que tende a provocar a rotação do sistema/corpo em relação a um determinado eixo.

Nestes exemplos, se os corpos estiverem localizados sobre um plano, o eixo instantâneo de rotação será perpendicular a esse plano e passará no centro de massa do corpo. Assim, no exemplo da Figura 1.2, o momento gerado provocaria uma rotação do corpo sobre si próprio.



*Figura 1.2 - Sistema de forças em equilíbrio mas sem equilíbrio de momentos fletores*

Quando já se domina o equilíbrio de um corpo, estudam-se as primeiras estruturas, isostáticas, começando por se calcular as reações, os diagramas de corpo livre e finalmente traçando os diagramas de esforços. Chamam-se esforços às forças de ligação entre as diferentes partes de um corpo/estrutura. Estes diagramas permitem-nos saber o valor de qualquer esforço em qualquer ponto da estrutura, tendo mais tarde, no dimensionamento de estruturas, uma importância elevadíssima, pois é através destes que se conhecem os valores máximos dos esforços, para os quais cada peça da estrutura deve ser dimensionada. Para mais facilmente se visualizar como estes esforços se transmitem ao longo da estrutura, de elemento para elemento, traça-se o diagrama de corpo livre que se baseia num princípio básico: numa estrutura em equilíbrio, todos os seus elementos e nós estão também em equilíbrio.

Na figura 1.3 pode observar-se uma estrutura sujeita a um carregamento, bem como os correspondentes diagramas de corpo livre das diversas barras que a compõem.

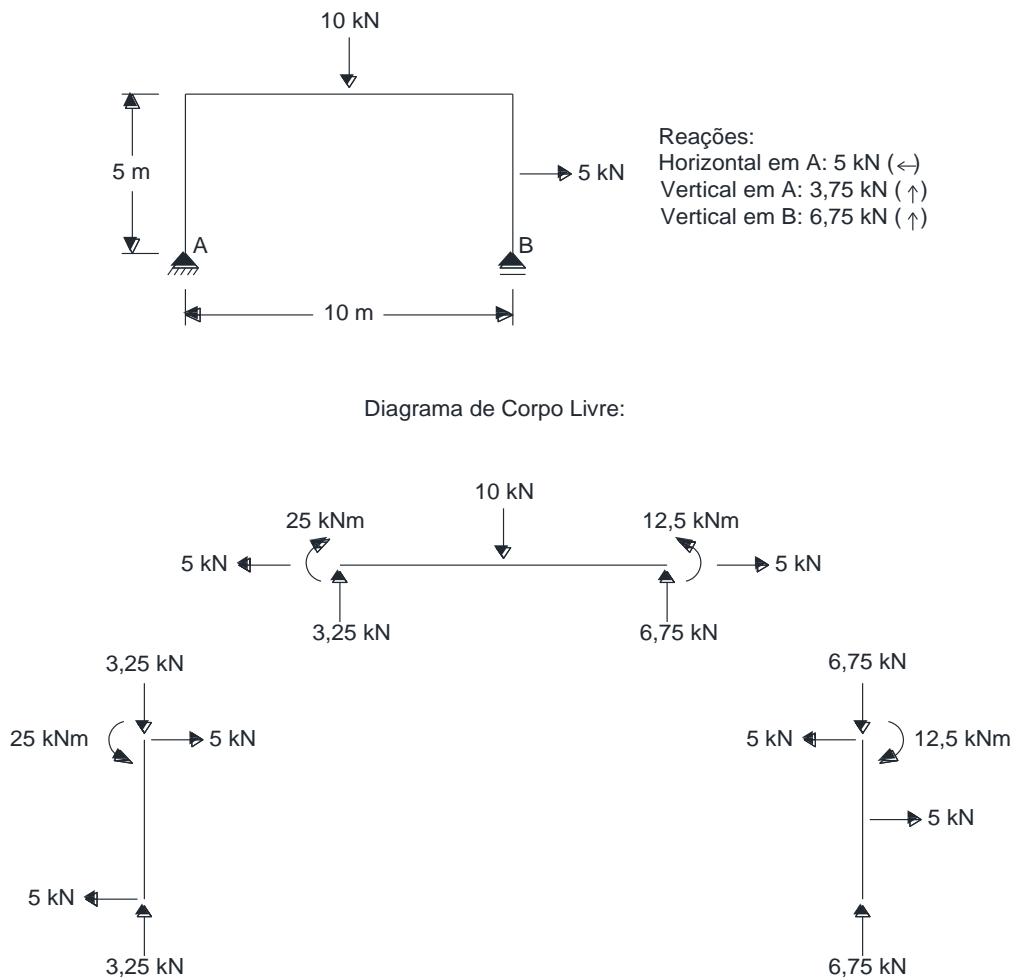


Figura 1.3 - Estrutura, carregamento e respetivo DCL

Um pormenor importante a apontar e que é visível neste exemplo da figura 1.3, é o de quando uma força de ligação é transmitida para outra barra, o esforço correspondente poder ter uma característica diferente, ou seja, se num primeiro elemento gera esforço normal, noutra elemento que faça 90º com o primeiro, gerará um esforço de corte/transverso. Ao analisar estruturas tridimensionais, o momento fletor de uma barra pode corresponder noutra barra, quer a um momento fletor quer a um momento torsor. No âmbito desta unidade curricular podem então incluir-se os equipamentos que se apresentam de seguida (e respetivas experiências), de acordo com o estabelecido no capítulo “Introdução”.



## **2.1.1 - Equipamento HST ACE 1 - Equilíbrio de forças**

### **Experiência 1 - Equilíbrio de forças**

O objetivo desta experiência é estudar o equilíbrio de um conjunto de forças atuando num plano vertical. Na primeira parte, no que toca a forças concorrentes, a solução deve ser verificada recorrendo a um triângulo de forças (três forças) ou a outro polígono de forças fechado (para mais de três forças). A segunda parte trata de forças não concorrentes e será utilizado um método semelhante.

Para esta experiência serão necessárias duas folhas A1 e três a quatro cores diferentes de lápis/caneta.

Preparação da experiência:

- 1 - Confirmar que o quadro está preso à base;
- 2 - Confirmar que a folha está presa com as quatro pinças;
- 3 - Colocar as duas roldanas duplas na parte superior da base;
- 4 - Colocar as roldanas simples nos restantes lados da base;
- 5 - Confirmar que existe uma cavilha no centro do quadro/folha e que está fixa;

### **Parte 1 - Forças concorrentes**

Método:

- 1 - Unir três cordões de carga ao anel e colocá-lo, temporariamente, na cavilha central;
- 2 - Colocar três roldanas simples, em lados diferentes da base;
- 3 - Passar os cordões de carga pelas roldanas e adicionar um gancho de carga a cada ponta livre;
- 4 - Com cuidado, retirar o anel da cavilha central e deixá-lo encontrar a sua posição de equilíbrio livremente (se necessário ajustar a posição dos ganchos de carga encurtando os cordões);
- 5 - Adicionar carga aos ganchos, notando como o anel se move de modo a achar um novo equilíbrio cada vez que isto é feito;
- 6 - Para qualquer estado de equilíbrio que se considere interessante, desenhar no papel um vetor, e a respetiva carga, para cada cordão. Identificar cada conjunto de 3 vetores com uma cor;
- 7 - Repetir a experiência para quatro ou cinco cordões e finalmente para seis cordões, usando sempre uma cor nova para cada equilíbrio;
- 8 - Retirar a folha para os trabalhos posteriores a seguir descritos.

Ora, para a primeira parte da experiência usando apenas três cordões, construir um triângulo de forças, desenhando linhas paralelas aos vetores. Medir o comprimento dos três lados do triângulo, a, b e c. Comparar estes comprimentos com o valor das cargas representadas por esses lados, ou seja:

$$F_a \rightarrow a \quad F_b \rightarrow b \quad F_c \rightarrow c$$

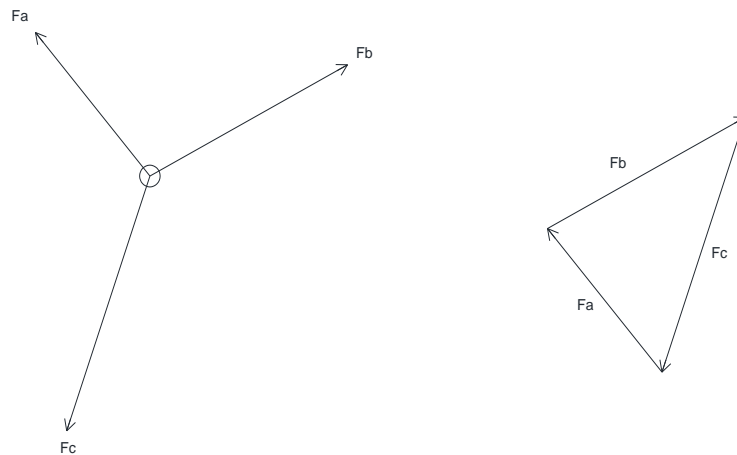


Figura 1.4 - Exemplo de sistema de forças e respetivo polígono

Alternativamente, pode-se usar uma escala (por exemplo 1 cm = 1 N) e desenhar um lado do triângulo de cada vez, desenhando o segundo a partir do fim do primeiro e assim sucessivamente. Este método é especialmente útil para polígonos com mais de três forças. Seria de esperar que o fim do último lado coincidisse com o início do primeiro, fechando o polígono, mas este tipo de experiências acarretam sempre um erro muito grande que pode ser significativo.

## Parte 2 – Forças não concorrentes

Método:

- 1 - Usando o anel duplo, unir três cordões a um e dois ou três ao outro. Temporariamente, colocar um deles na cavilha central;
- 2 - Colocar as roldanas simples ao longo dos lados da base;
- 3 - Passar os cordões de carga pelas roldanas e adicionar um gancho de carga a cada ponta livre;
- 4 - Com cuidado, retirar o anel da cavilha central e deixá-lo encontrar a sua posição de equilíbrio livremente (se necessário ajustar a posição dos ganchos de carga encurtando os cordões);

5 - Para um estado de equilíbrio que se considere interessante, transferir os vetores para o papel assim como os valores das forças, tudo feito com uma cor;

6 - Repetir o processo para outro sistema de forças em equilíbrio marcando-o com outra cor;

7 - Retirar a folha para os trabalhos posteriores.

Como estas forças estão em equilíbrio, desenhadas sequencialmente, também originarão um polígono fechado.

### Fundo teórico

O dimensionamento de todo o tipo de estruturas é baseado no seu peso próprio, nas forças que atuam na estrutura e se a estrutura está em movimento ou não. Normalmente, não há movimento e diz-se que a estrutura está em equilíbrio estático.

Um sistema de forças em equilíbrio satisfaz dois princípios: a resultante de todas as forças tem de ser nula (1.) e o momento fletor provocado por todas as forças é nulo em qualquer ponto (1.2). Num sistema tridimensional, esses princípios podem ser matematicamente escritos da seguinte forma:

$$\sum P_x = \sum P_y = \sum P_z = 0 \quad (1.1)$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \quad (1.2)$$

E caso as forças atuem apenas num único plano (bidimensional) (1.3) (1.4):

$$\sum P_x = \sum P_y = 0 \quad (1.3)$$

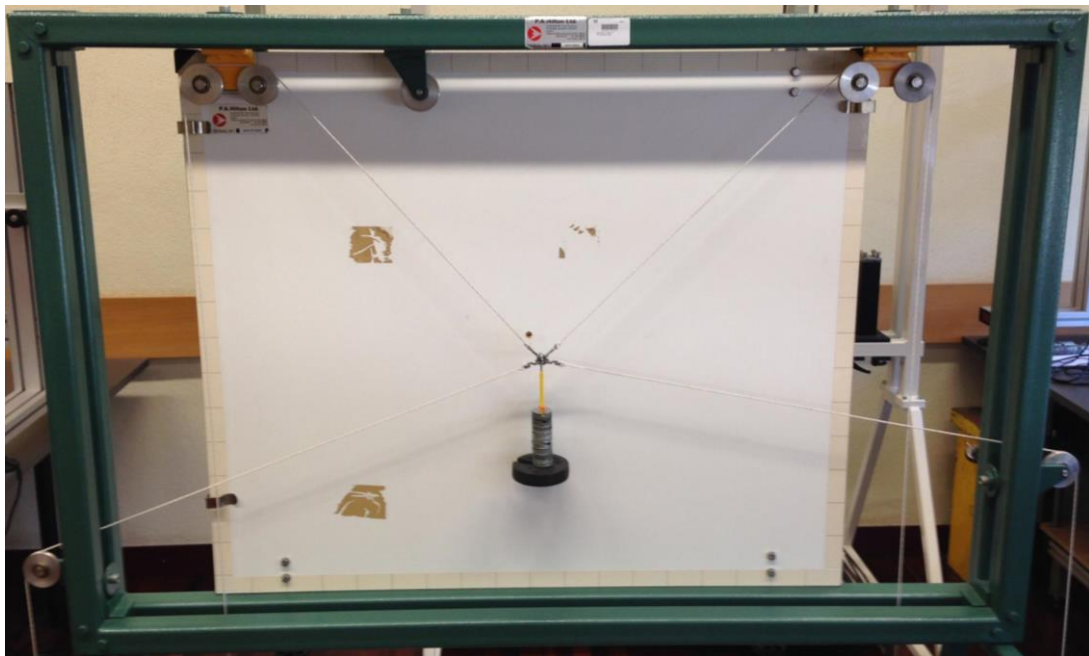
$$\sum M_z = 0 \quad (1.4)$$

Assim, ao desenhar um polígono de forças, este será fechado, sendo que o início do primeiro vetor coincide com o fim do último. As forças anulam-se todas entre si e o corpo mantém-se no mesmo ponto.

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste num conjunto de acessórios montados numa base universal. O quadro, preso à parte de trás da base, serve como ponto de referência e superfície de trabalho permitindo que sejam desenhados vetores para cada experiência. Nas bordas do quadro existem marcações de escala espaçadas de 50 mm para ajudar a estabelecer linhas horizontais e verticais. Existem também roldanas espalhadas à volta do quadro, sendo as duplas especialmente úteis quando se tenciona utilizar uma força ascendente. Os cordões de carga podem ser ajustados de modo a que os ganchos não interfiram com a experiência.

Na primeira experiência utiliza-se o anel simples, unindo vários cordões de carga num determinado “ponto” (forças concorrentes). Para forças não concorrentes, existe um par de anéis unidos por um pequeno cordão. Os anéis podem ser estabilizados na cavilha central quando se estão a preparar todos os cordões e ganchos de carga.



*Figura 1.5 - O equipamento HST ACE 1*

## 2.1.2 - Equipamento STR3 - Esforço transverso numa viga

### Experiência 1 - Variação do esforço transverso com o incremento duma carga pontual

Nesta experiência podemos examinar como o esforço transverso varia quando se incrementa uma carga pontual.

A seguinte equação será necessária:

$$S_c = \frac{W * a}{l} \quad (2.1)$$

Onde,

$S_c$  – valor do esforço transverso no ponto onde a viga está cortada

$a$  – distância do apoio da esquerda até ao ponto de aplicação da carga (260 mm neste exemplo)

$W$  – valor da carga

$l$  – comprimento total da viga

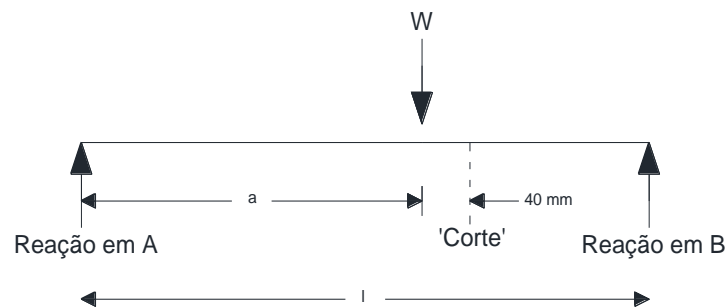


Figura 1.6 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1

Método:

- 1 - Verificar que o equipamento está montado como na imagem
- 2 - Verificar que o visor do *Digital Force Display* regista 0 quando a viga não está carregada;
- 3 - Aplicar uma carga de 100g à esquerda do corte na viga (a 260 mm do apoio da esquerda ou a 40 mm do corte);
- 4 - Anotar o valor da leitura do *Digital Force Display* na Tabela 2.1 (estes valores serão os experimentais para o transverso no local onde a viga está cortada);
- 5 - Repetir os passos 3 e 4 para uma carga de 200g, 300g, 400g e 500g;

6 - Calcular o valor teórico para o transverso no local onde a viga está cortada (através da expressão anteriormente dada);

7 - Traçar um gráfico que compare os valores experimentais com os teóricos.

**Experiência 2 - Variação do esforço transversal para vários carregamentos diferentes**

Nesta experiência, a viga pode ser carregada em qualquer/qualquer ponto(s) e consequentemente mede-se a variação da “reação transversal” no local do "corte". Seguem-se três carregamentos diferentes que servem como exemplo para a realização da experiência.

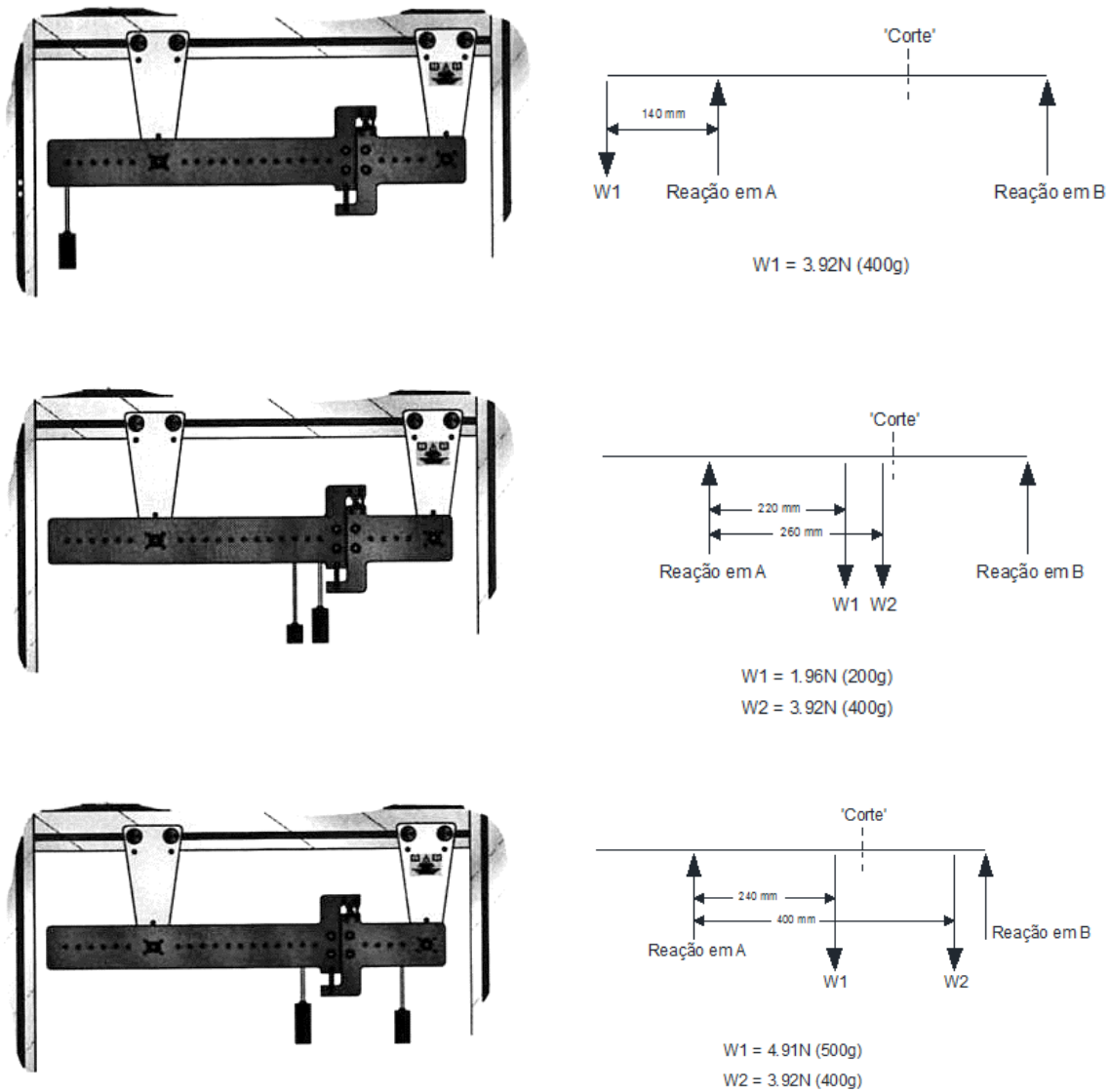


Figura 1.7 – Esquema e exemplos de sistemas de forças do equipamento para a experiência 2 adaptado de [43]

Método:

- 1 - Verificar que o equipamento está montado como na imagem;
- 2 - Verificar que o visor do *Digital Force Display* regista 0 quando a viga não está carregada;
- 3 - Aplicar o carregamento conforme a primeira configuração da Figura 1.7 e de acordo com os valores da Tabela 2.2;
- 4 - Anotar o valor da leitura do *Digital Force Display* na Tabela 2.2;
- 5 - Calcular as reações de apoio  $R_A$  e  $R_B$  e calcular o valor teórico do transverso no local do corte;
- 6 - Repetir a experiência para as duas outras configurações de forças;
- 7 - Comparar os resultados teóricos (calculados) com os da experiência.

## Fundo teórico

### Esforços

Define-se como esforços o conjunto de forças generalizadas (força ou momento) de ligação interna na secção transversal de um elemento numa estrutura. Assim, apresentam igual direção e intensidade mas sentidos opostos em cada uma das facetas da secção. Havendo uma necessidade de uniformizar a designação e convenção de sinais a utilizar, utiliza-se o seguinte sistema de eixos de referência:

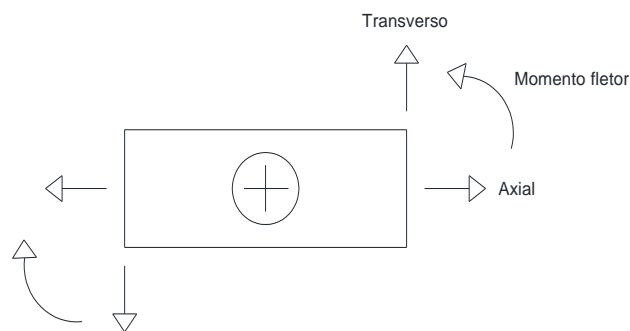


Figura 1.8 - Sistema de eixos de referência

Esforço normal ou axial é o esforço na direção do eixo do elemento. Esforço transverso ou corte é na direção perpendicular a esse eixo. De referir que, ao trabalhar no espaço, consideram-se dois esforços transversos. Havendo uma relação direta entre o esforço transverso e o momento fletor, no espaço, há também momento fletor em duas direções. Momento na direção do eixo (torsor) da peça provoca torsão e só existe quando estamos a trabalhar no espaço.

### Equações diferenciais de equilíbrio

Partindo de um elemento infinitesimal de uma barra com um carregamento genérico  $p(x)$ , obtêm-se as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

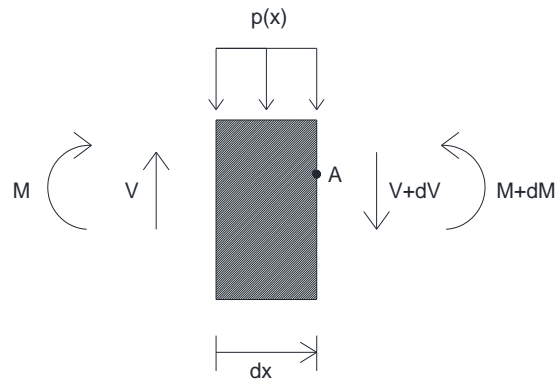


Figura 1.9 - Equilíbrio num elemento infinitesimal com um carregamento genérico  $p(x)$

Equilíbrio de forças na direção vertical (2.2)

$$\sum F_V = 0 ; V - p * dx - (V + dV) = 0 ; dV = -p * dx ; \quad (2.2)$$

Logo

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \quad (2.3)$$

Equilíbrio de momentos fletores no ponto A (2.4)

$$\sum M_A = 0 ; -M - V * dx + p * dx * \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0 ; dM = V * dx - p * \frac{dx^2}{2} \quad (2.4)$$

Logo

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (2.5)$$

E portanto, o momento fletor é a derivada do transverso em ordem à posição, dependendo deste (2.6).



Relacionando os resultados obtidos anteriormente tem-se

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -p(x) \quad (2.6)$$

Assim, concluímos que a expressão analítica do esforço transversal tem um grau a mais que a do carregamento distribuído e que a do momento fletor tem dois graus a mais, partindo do princípio que  $p(x)$  seja um polinómio.

Exemplo:

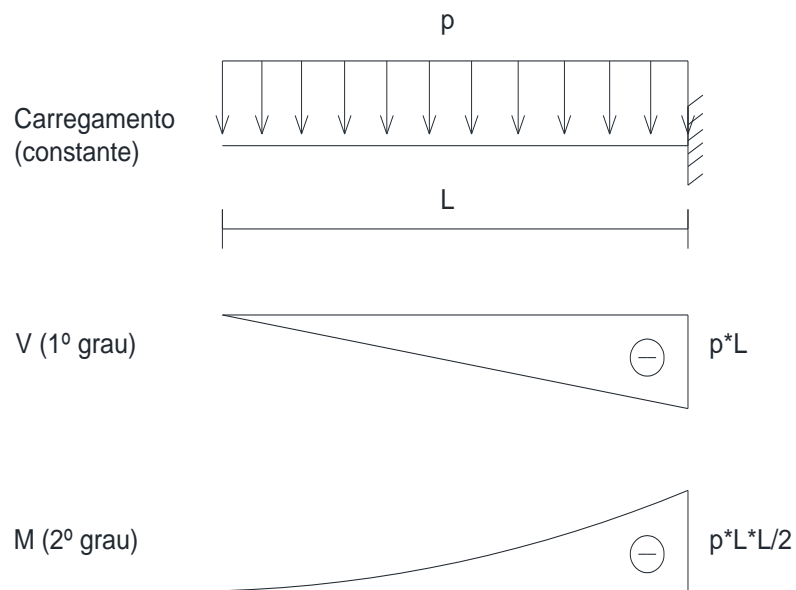
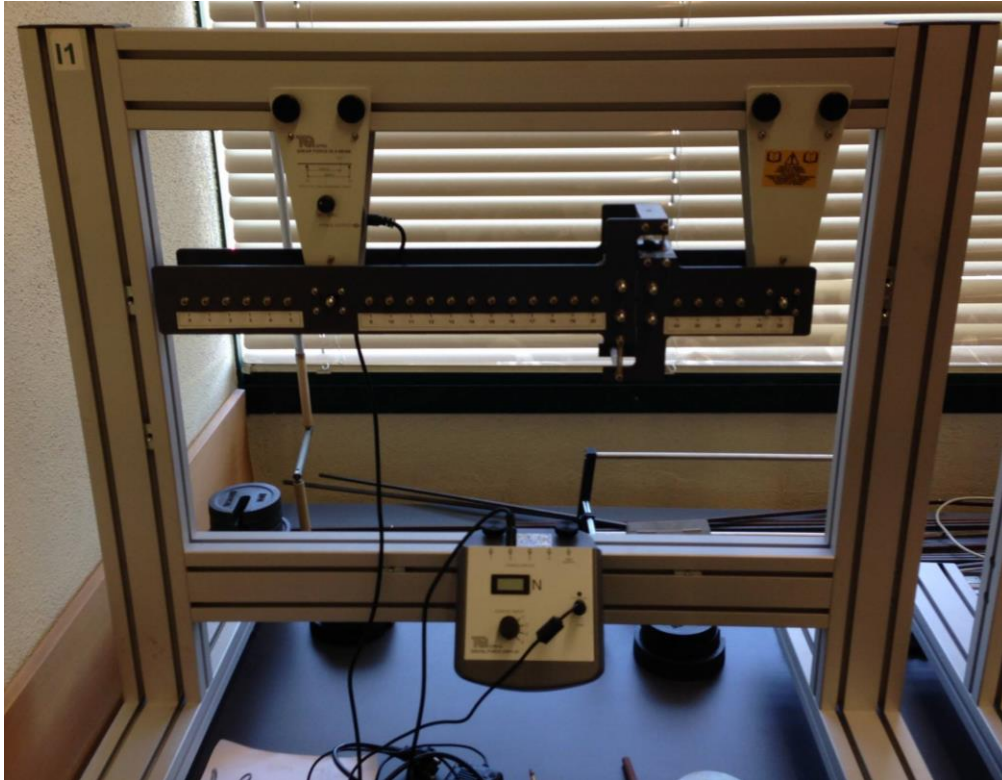


Figura 1.10 - Relação entre os graus das funções carregamento/esforço transversal/momento fletor

Este fundo teórico é também utilizado para a experiência seguinte, Momento fletor numa viga.

**Descrição do equipamento:**

Este equipamento permite estimar o esforço transversal numa viga. Consiste numa viga que é “cortada”, e, para evitar que se torne num mecanismo (permitindo movimento apenas na direção transversal) possui uma célula de carga (*load cell*) no local do corte que impede o movimento, causando uma reação na direção transversal à viga que pode ser medida. As cargas podem ser aplicadas ao longo de vários pontos na viga, com uns ganchos e massas.



*Figura 1.11 - O equipamento STR3*

### 2.1.3 - Equipamento STR2 - Momento fletor numa viga

#### Experiência 1 - Variação do momento fletor no ponto de aplicação da carga

Nesta experiência, a viga é carregada no local do "corte", medindo o momento fletor nesse mesmo ponto. Assim, facilmente se verifica a relação carga/momento fletor para um caso simples.

A seguinte equação será necessária:

$$M = Wa * \frac{(l - a)}{l} \quad (3.1)$$

Onde,

M – Momento fletor no local do corte

W – valor da carga

l - comprimento total da viga

a - distância do apoio da esquerda até ao ponto de aplicação da carga

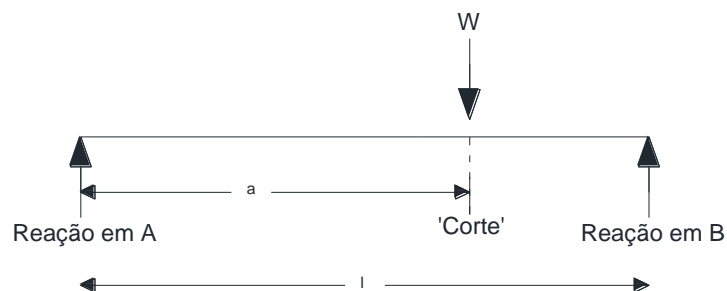


Figura 1.12 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1

Método:

- 1 - Verificar que o equipamento está montado como na imagem;
- 2 - Verificar que o visor do *Digital Force Display* regista 0 quando a viga não está carregada;
- 3 - Aplicar uma carga de 100g no local do "corte" da viga e registar a leitura na Tabela 3.1;
- 4 - Converter a leitura para o momento fletor (em Nm), tendo em conta que:

$$\text{Momento fletor no local do corte (Nm)} = \text{Leitura} * 0.125$$

- 5 - Repetir os passos 3 e 4 em incrementos de 100g até um total de 500g;
- 6 - Calcular o valor teórico para o momento fletor no local onde a viga está cortada (através da expressão anteriormente dada);

7 - Traçar o gráfico carga/momento fletor.

### Experiência 2 - Variação do momento fletor aplicando cargas noutros pontos da viga

Nesta experiência, a viga pode ser carregada em qualquer/qualsquer ponto(s) e consequentemente mede-se a variação do momento fletor no local do "corte". Seguem-se três carregamentos diferentes que servem como exemplo para a realização da experiência.

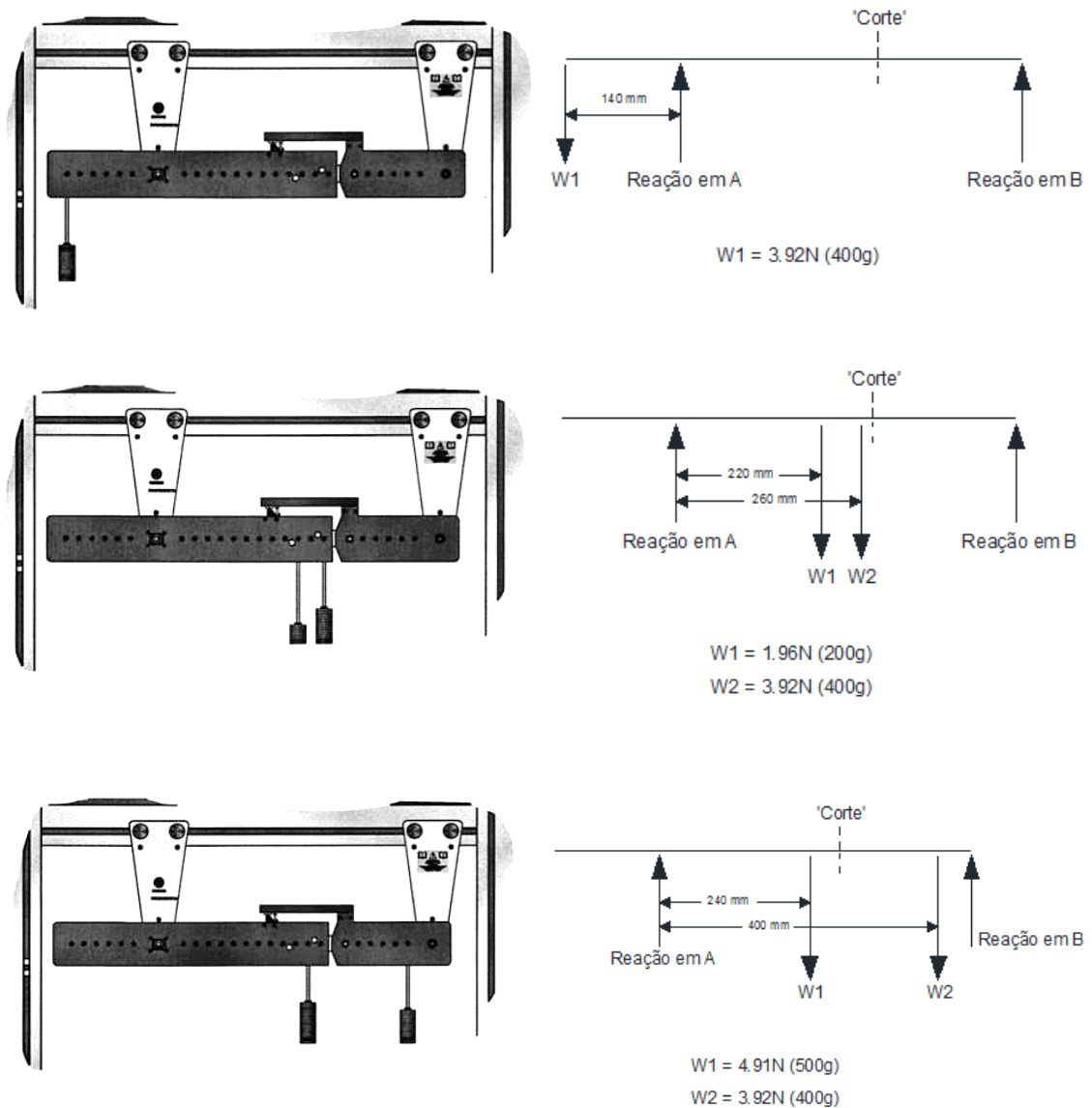


Figura 1.13 – Esquema e exemplos de sistemas de forças do equipamento para a experiência 2 adaptado de [41]

Método:

- 1 - Verificar que o equipamento está montado como na imagem;
- 2 - Verificar que o visor do *Digital Force Display* regista 0 quando a viga não está carregada;
- 3 - Aplicar o carregamento conforme a primeira configuração da Figura 1.13 e de acordo com os valores da Tabela 3.2;
- 4 - Anotar o valor da leitura no *Digital Force Display* na Tabela 3.2;
- 5 - Converter a leitura para o momento fletor (em Nm), tendo em conta que:

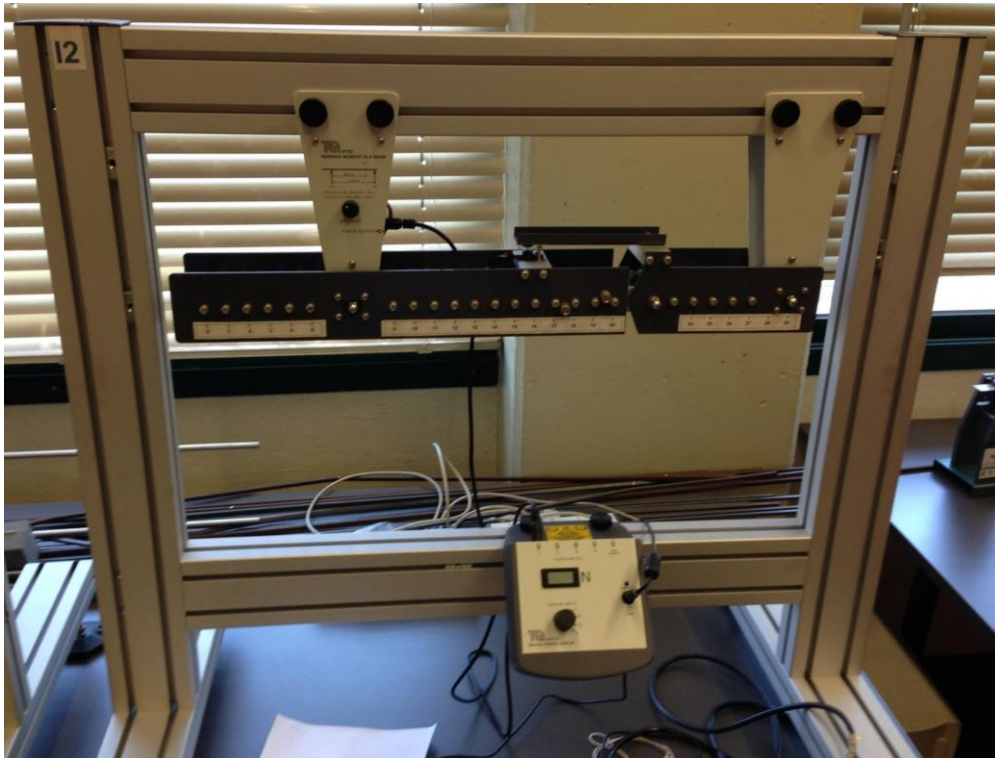
$$\text{Momento fletor no local do corte (Nm)} = \text{Leitura} * 0.125$$

- 6 - Calcular as reações de apoio  $R_A$  e  $R_B$  e o valor teórico do momento fletor no local do corte;
- 7 - Repetir a experiência para as duas outras configurações de forças;
- 8 - Comparar os resultados teóricos (calculados) com os da experiência.

Sugestão: tentar obter o mesmo momento fletor com diferentes configurações de carregamento.

**Descrição do equipamento:**

Este equipamento permite identificar o momento fletor numa secção de uma viga simplesmente apoiada (e com um troço em consola) sujeita a cargas pontuais diversas. Consiste numa viga na qual foi introduzida uma libertação, na forma de um “corte” que permite um deslocamento relativo entre duas secções. Impedindo que a viga se torne num mecanismo, existe uma barra ligada a uma célula de carga (*load cell*), que faz a ligação na zona do corte, medindo a força de corte instalada, através da qual o momento fletor pode ser calculado, com base no braço da barra de ligação. As cargas podem ser aplicadas ao longo dos vários troços da viga através de uns ganchos que podem ser carregados com massas.



*Figura 1.14 - O equipamento STR2*

## 2.1.4 - Equipamento MM3 - Plano Inclinado

### Experiência 1 - Um corpo em aceleração ao longo duma rampa

Esta experiência foi desenhada para mostrar a relação entre o ângulo da rampa e a aceleração do corpo.

Será necessário um computador com o *software* para os *Light Gates* para que se possa retirar as leituras.

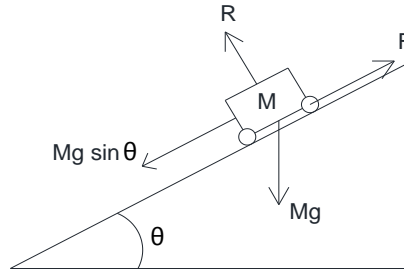


Figura 1.15 - Esquema de forças para a experiência 1

Método:

- 1 - Pesar o carrinho e registar a sua massa;
- 2 - Posicionar a base num estado plano e colocar o clinómetro a zero;
- 3 - Aumentar a inclinação para 5 graus;
- 4 - Deixar o carrinho correr ao longo das vias e fazer a leitura da aceleração, preenchendo a Tabela 4.1;
- 5 - Aumentar a inclinação para 10 graus e repetir o passo 4;
- 6 - Repetir para 15, 20 e 25 graus;
- 7 - Traçar um gráfico ângulo/aceleração.

Sugestões:

- olear as rodas do carrinho para minimizar o atrito;
- o gráfico vai cruzar o eixo que mede o ângulo quando a aceleração for nula. Usar isto para estimar as forças de atrito no carrinho;
- como um passo além nesta experiência, colocar a via com o ângulo de aceleração zero e deixar o carrinho deslizar ao longo da rampa a velocidade constante;
- usar lubrificantes mais viscosos nas rodas e notar a diferença no atrito.

## Experiência 2 - Medir o coeficiente de atrito

Esta experiência foca-se em encontrar o coeficiente de atrito entre madeira e aço. Existem três métodos para tal (também será necessário o PC com o *software*):

1 - Adicionar massa de modo a aumentar a força  $T$  até que o patim se comece a mover a uma velocidade constante:

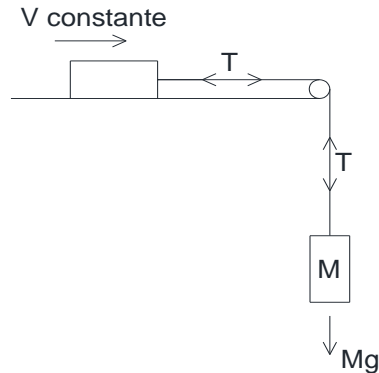


Figura 1.16 - Esquema do equipamento para a experiência 2

2 - Adicionar massa de modo a aumentar a força  $T$  mas medindo a aceleração traçando um gráfico aceleração/massa. A intersecção onde a aceleração é nula dá o valor de  $Mg = T$ . Este método garante que a aceleração é nula no sistema.

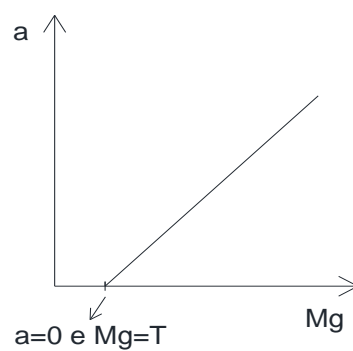


Figura 1.17 - Relação aceleração/massa suspensa



3 - O terceiro método é o mais simples. Colocar o patim na superfície e ajustar o ângulo até que este se comece a mover a uma velocidade constante.

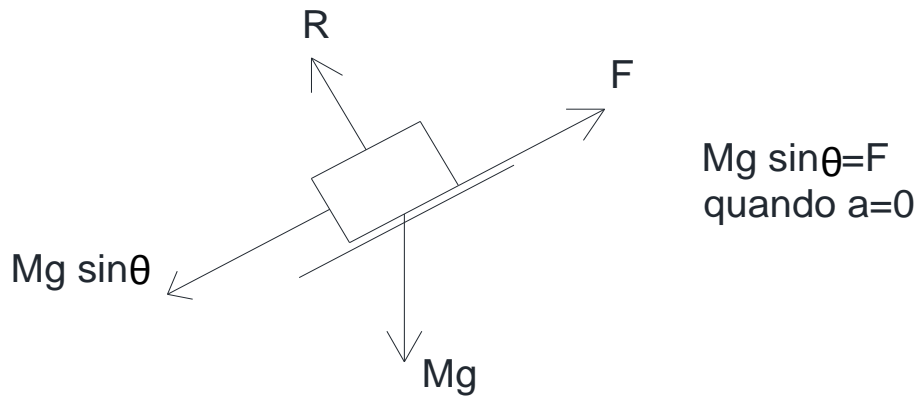


Figura 1.18 - Esquema de forças para o terceiro método da experiência 2

Para além da lâmina de madeira, uma segunda lâmina é incluída neste equipamento. Essa lâmina é feita de PVC e pode ser interessante testa-la em comparação com a de madeira. Por último, lâminas de teste podem ser feitas de qualquer material, com 3mm de espessura, devendo-se ter o cuidado de apenas utilizar materiais que não risquem/danifiquem a superfície de aço do equipamento.

Método1:

- 1 - Montar o equipamento como instruído (ver imagem anterior);
- 2 - Pesar o patim e a lâmina de atrito e registar a massa;
- 3 - Definir a base do nível plano e colocar o clinómetro a zero;
- 4 - Adicionar massa ao patim até um total de cerca de 135 a 140g;
- 5 - Adicionar massa ao cordel até que, com um pequeno impulso, o patim se mova ao longo da superfície a uma velocidade constante;
- 6 - Registar a massa do patim e a massa no cordel necessária para atingir essa velocidade constante;
- 7 - Adicionar massa ao patim em incrementos de 80g e repetir os passos 5 e 6 até que o patim esteja completamente carregado;
- 8 - Traçar o gráfico força de tração no cordel/massa do patim. O gradiente deverá revelar o coeficiente de atrito.

#### Método2:

- 1 - Montar o equipamento como instruído (ver imagem anterior);
- 2 – Adicionar massa ao patim até um total de cerca de 200 a 220g;
- 3 - Adicionar cerca de 130g ao cordel;
- 4 - Libertar o patim e medir a aceleração;
- 5 - Repetir o passo 4 até atingir uma boa média;
- 6 - Aumentar a massa no cordel em incrementos de 30g até um total de 250g e repetir os passos 4 e 5, registando sempre a massa no cordel e a aceleração;
- 7 - Traçar o gráfico massa no cordel/aceleração. Prolongar o gráfico até que este intersecte o eixo da aceleração. Isto deverá revelar a massa (e a tensão) no cordel para a qual o patim se moverá a uma velocidade constante.

#### Método3:

- 1 - Montar o equipamento como instruído (ver imagem anterior);
- 2 - Adicionar massa ao patim até um total de cerca de 600g;
- 3 - Colocar o patim na rampa;
- 4 - Ajustar o ângulo até que o patim se desloque ao longo da rampa com um pequeno impulso. Permitir que o patim se mova a uma velocidade constante;
- 5 - Usar o ângulo para calcular  $Mg \cdot \sin(\theta)$  e consequentemente o atrito e o coeficiente de atrito (ver imagem anterior).

Sugestão: polir a superfície com um pano antes de começar a experiência a fim de obter resultados consistentes.

## **Fundo Teórico**

### **Atrito**

A força de atrito é a componente perpendicular à superfície de contacto dos corpos da força de contacto que atua sempre que dois corpos chocam e há tendência para o movimento. É sempre paralela às superfícies em contacto e contrária ao movimento relativo entre os corpos. Apesar disso, depende da força normal, a componente vertical da força de contacto (maior força normal, maior atrito).

### **Coefficiente de atrito**

Grandeza adimensional,  $\mu$ , que relaciona a força de atrito e a força de compressão entre dois corpos, dependendo dos materiais envolvidos. Para cada material, existe um coeficiente de atrito dinâmico e um coeficiente de atrito estático.

### **Atrito estático**

É a força que se opõe ao início do movimento entre as superfícies. Quando a resultante das forças for superior à força de atrito estático máxima, dá-se início ao movimento e deixa de existir atrito estático, passando a haver atrito cinemático.

### **Atrito cinemático**

É a força que surge entre as superfícies que apresentam movimento relativo de deslizamento entre si, opondo-se a esse movimento.

Para ambos os casos, a força de atrito pode ser calculada através da seguinte expressão

$$F = \mu * N \quad (4.1)$$

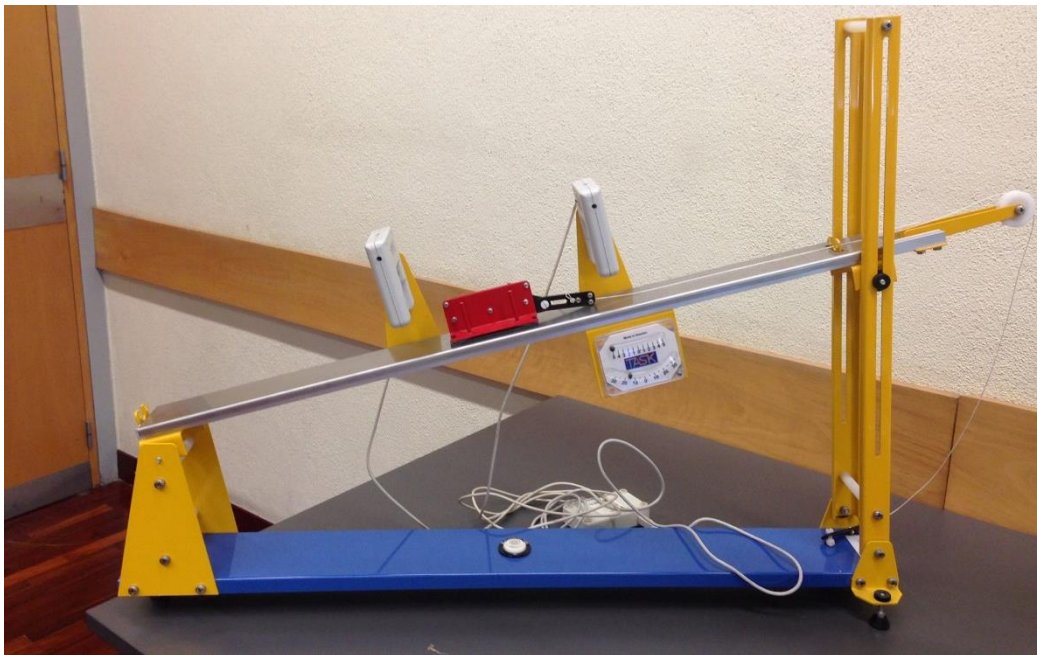
sendo que, para se calcular a força de atrito cinemático se deve usar o coeficiente de atrito cinemático e para o estático usar o coeficiente de atrito estático.

**Descrição do equipamento:**

O Plano Inclinado é um equipamento simples que permite aos alunos explorarem problemas relacionados com o atrito em planos inclinados. Pode ser usado de duas formas distintas: com uma superfície lisa e um patim de fricção ou com vias e um veículo simples. De entre as várias experiências possíveis, as que vão ser mencionadas neste guia consistem na do veículo a deslizar ao longo duma descida e na quantificação do atrito entre superfícies em madeira e aço.

A superfície lisa é diretamente colocada sobre as vias e pode ser facilmente removida. O patim permite que sejam colocadas diferentes superfícies de fricção através de quatro almofadas de velcro. As vias são usadas para guiar um veículo simples, um "carrinho". O carrinho usa rolamentos de esfera e estes devem ser oleados antes de serem usados e/ou guardados. O ângulo de inclinação das vias pode ser ajustado e medido no clinómetro presente no equipamento.

No que toca à recolha de dados, o equipamento foi desenhado para funcionar em conjunto com células fotoelétricas (*Light Gates*), que podem ser colocadas ao longo de qualquer ponto das vias permitindo medir os tempos de passagem do veículo. Tanto o patim como o carrinho possuem uma ranhura na parte de cima onde pode ser colocado um cartão para ajudar no uso das células.



*Figura 1.19 - O equipamento MM3*

## 2.2 - Dinâmica

A Unidade Curricular de Dinâmica, ou Mecânica II no Instituto Superior Técnico, é uma das poucas das unidades curriculares da área da mecânica estrutural do curso de Engenharia Civil que trata dos fenómenos dinâmicos. O estudo da dinâmica tem mais expressão na área da Engenharia Mecânica mas é igualmente essencial na Engenharia Civil, sendo a base para o estudo do comportamento das estruturas face a ações sísmicas, do vento, das ondas e outras que variem no tempo. Porque aborda conceitos por vezes mais difíceis de compreender/visualizar do que a estática, é do maior interesse a existência de experiências que facilitem o processo de aprendizagem.

Primeiro são descritos equipamentos que abordam conceitos de cinemática, que descreve a posição e movimento dos corpos sem referir as forças atuantes. A cinemática serve de base para os conceitos de dinâmica, que relaciona o movimento dos corpos com as forças que o provocam. Conceitos fundamentais da física como a velocidade, aceleração, impulso e quantidade de movimento, trabalho, energia potencial e cinética, e as leis de Newton são abordados.

As estruturas de edifícios, pontes, barragens, entre outros, devem poder resistir às ações mais correntes (essencialmente associadas às cargas permanentes e às sobrecargas de projeto) que têm como base a estática mas, como qualquer outro corpo, possuem características dinâmicas e têm também de resistir a ações variáveis no tempo, dinâmicas, como as que resultam do efeito dos sismos, vento e outras. Ações como o vento ou sismos provocam vibrações nas estruturas, sendo, em muitos dos casos, o fator mais condicionante no dimensionamento das mesmas. Assim, na segunda parte da Unidade Curricular, estudam-se vibrações em sistemas simples, com apenas um grau de liberdade.

Uma vibração é um movimento oscilatório de um corpo em torno de uma posição de equilíbrio, mas as deformações que o corpo sofre na sequência desse movimento podem ter consequências gravíssimas. De facto, os efeitos normalmente provocados por ações estáticas podem ser amplificados por vezes muito significativamente nas situações em as ações são dinâmicas, isto é, variáveis no tempo

Todos os corpos possuem características dinâmicas próprias, dependentes, essencialmente, da massa e da rigidez. Para sistemas de um grau de liberdade fala-se da frequência própria. Esta, quando comparada com a frequência da solicitação, dita o comportamento da estrutura. Quando ambas estas frequências têm o mesmo valor, o corpo entra em ressonância, um fenómeno que pode levar à destruição/inutilização da estrutura, pois a amplitude da sua oscilação atingirá valores máximos, e com isso deformações e esforços máximos também.

Seguem-se, então, nas páginas seguintes, os equipamentos que podem ser incluídas no planeamento da unidade curricular onde se abordam os temas de dinâmica (Mecânica II ou Dinâmica Estrutural e Engenharia Sísmica).

### 2.2.1 - Equipamento MM7 - Kit de Mecanismos Simples

Método geral:

- 1 - Montar o mecanismo a estudar;
- 2 - Assegurar que todas as porcas estão bem apertadas;
- 3 - Mover a manivela e observar os deslocamentos/rotações que se geram;
- 4 - Traçar um gráfico posição linear/ângulo da manivela.

Sugestão: pode ser útil alterar o comprimento da manivela e da biela e refazer a experiência para demonstrar o seu efeito.

#### Experiência 1 - Manivela deslizante

O uso mais comum deste mecanismo é o motor de combustão interna, para transformar o movimento linear do pistão em movimento rotativo da manivela. É usual denominar-se de biela a ligação entre o pistão e a manivela. O movimento resultante fornece uma onda sinusoidal distorcida, em que esta distorção é resultado da segunda harmónica.

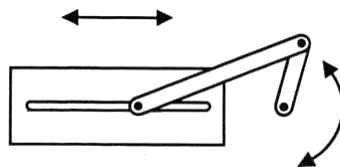


Figura 2.1 – Esquema do equipamento para a experiência 1 retirado de [37]

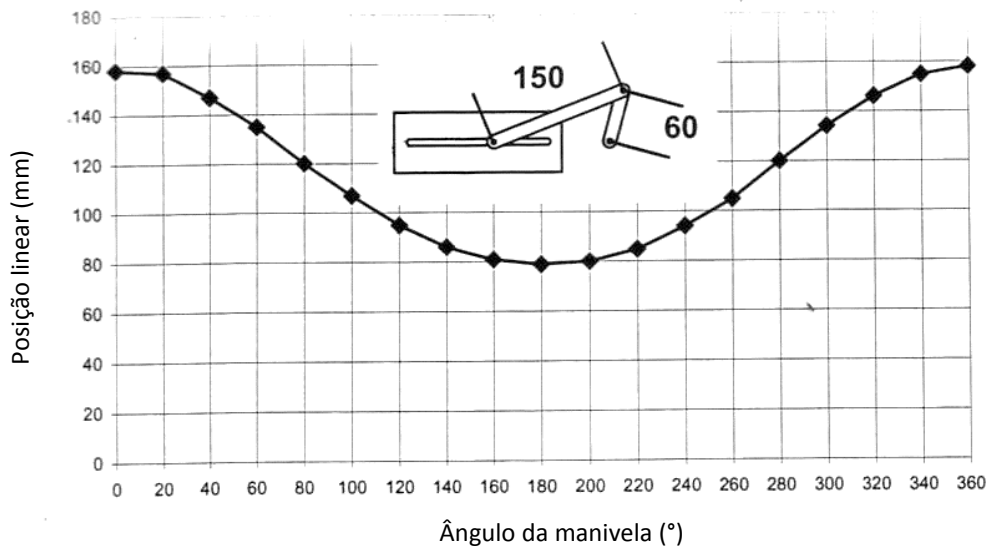


Figura 2.2 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 1) adaptado de [37]

### Experiência 2 - Mecanismo de retorno rápido

Este mecanismo é particularmente utilizado quando é necessário um golpe lento e forte seguido dum retorno rápido e leve. Este retorno rápido e leve é conseguido através dum mecanismo de manivela deslizante deslocado. A diferença na velocidade e aceleração entre os dois movimentos depende do deslocamento entre as linhas centrais da manivela deslizante e o comprimento da biela.

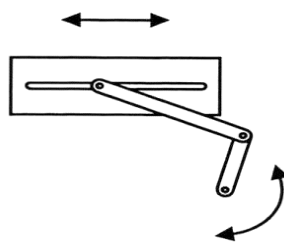


Figura 2.3 - Esquema do equipamento para a experiência 2 retirado de [37]

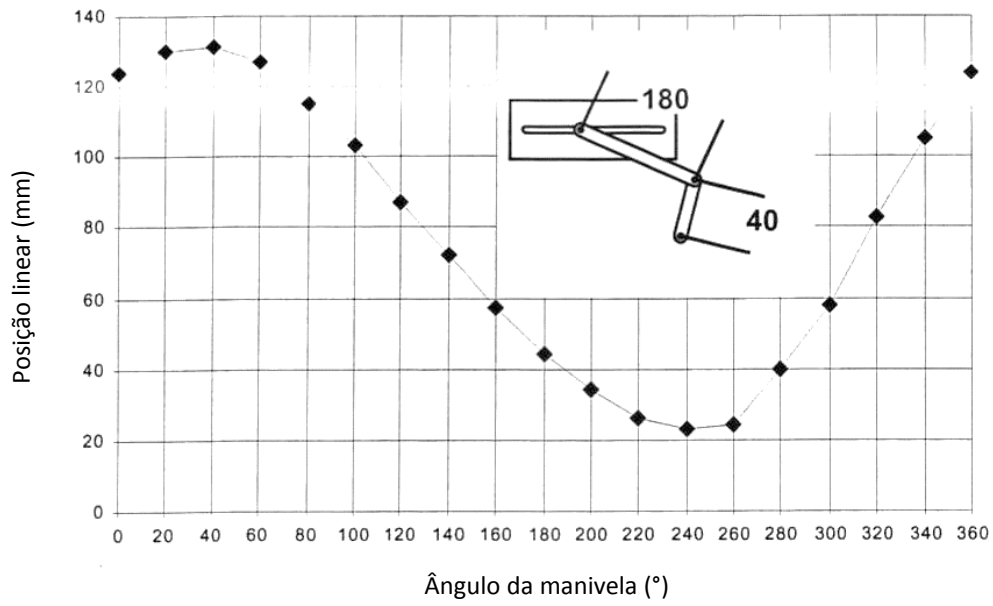


Figura 2.4 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 2) adaptado de [37]

### Experiência 3 - Articulação ranhurada

Este mecanismo produz uma resposta sinusoidal pura cuja amplitude depende da manivela.

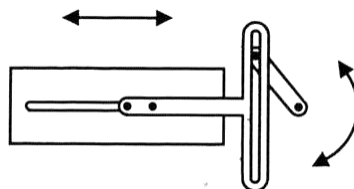


Figura 2.5 - Esquema do equipamento para a experiência 3 retirado de [37]



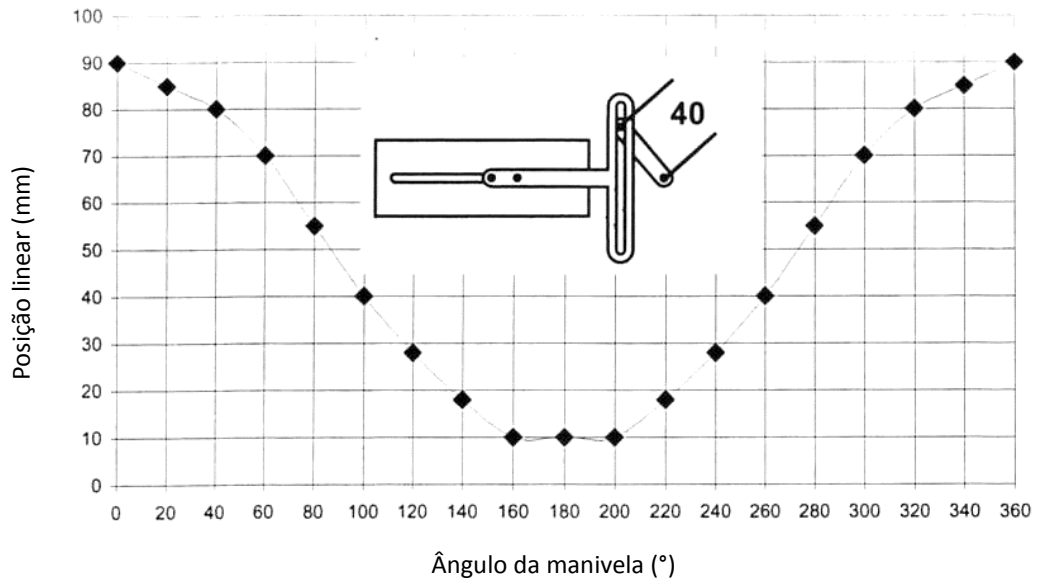


Figura 2.6 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 3) adaptado de [37]

#### Experiência 4 - Ligação de quatro barras

A ligação de quatro barras é um mecanismo muito versátil com vários usos como sistemas de suspensão ou de condução. As barras referem-se ao número de articulações e não ao número de elementos. Pode ser usado para amplificar o movimento rotativo de um mecanismo ou para transformá-lo num movimento oscilante alternativo.

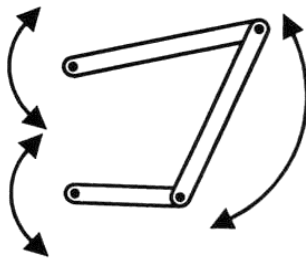


Figura 2.7 - Esquema do equipamento para a experiência 4 retirado de [37]

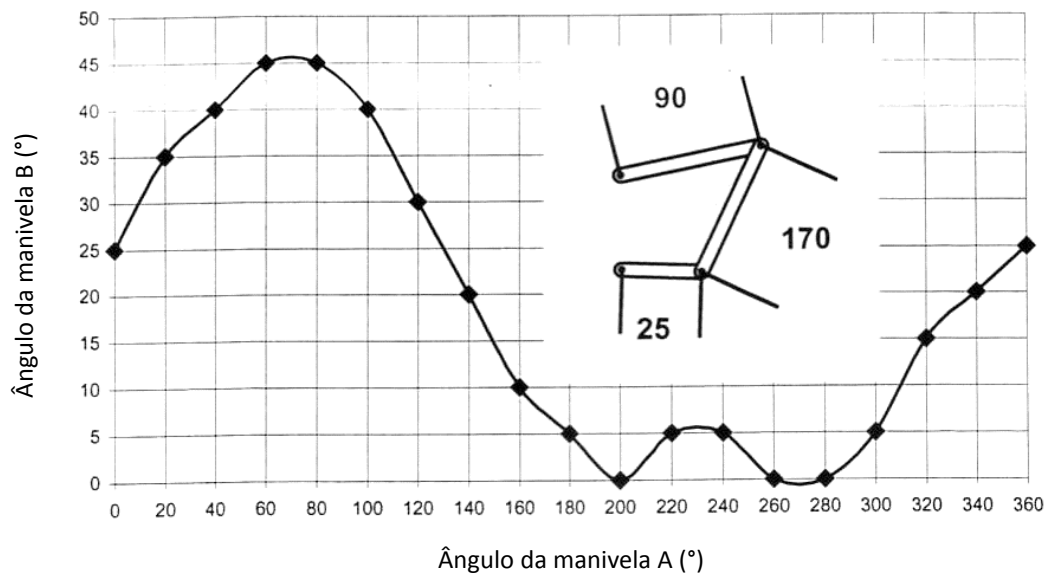


Figura 2.8 - Relação entre o ângulo do mecanismo e a sua posição (Experiência 4) adaptado de [37]

## Fundo teórico

### Cinemática

A cinemática descreve a posição e o movimento dos corpos sem referir as forças que originam esses movimentos.

A cada instante, um determinado corpo, ocupa uma determinada posição no espaço. O movimento de um corpo pode ser descrito em relação a um referencial que, por simplicidade, se considera ortonormado e direto e que pode ser fixo ou móvel. A posição de um corpo é dada pelo vetor de posição,  $x$  (vetor que une a origem do referencial ao ponto no espaço ocupado pelo corpo) (5.1).

$$x = \overline{OP} \quad (5.1)$$

Se a partícula estiver em movimento, o vetor de posição varia no tempo, descrevendo a trajetória do corpo. Define-se como velocidade do corpo,  $v$ , a taxa de variação no tempo do vetor de posição (5.2).

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (5.2)$$

A velocidade é também uma grandeza vetorial e é tangente à trajetória descrita pelo corpo. A sua derivada, ou a segunda derivada da posição, em ordem ao tempo, é a aceleração,  $a$  (também uma grandeza vetorial) (5.3).

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (5.3)$$

O uso de referenciais móveis é especialmente útil em alguns casos, como para descrever o movimento de um corpo no interior de outro corpo também em movimento. Estes referenciais devem, no entanto, ser sempre relacionados com um referencial fixo.

### Lei de propagação de velocidades

No caso do movimento de um corpo rígido for apenas de translação, todos os pontos desse corpo sofrerão essa translação.

Se o movimento for circular em relação a um ponto de referência (denominado de centro de rotação), então será circular para todos os pontos do corpo. Assim, a velocidade angular é a mesma para todos os pontos mas a velocidade linear vai depender da distância ao centro de rotação.

A velocidade é sempre tangente à trajetória e, para o caso do movimento circular, obtém-se através da seguinte expressão:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{CP} \quad (5.4)$$

Onde,

$v$  – vetor velocidade

$\omega$  – vetor velocidade angular

$CP$  – vetor que vai do centro de rotação C para o ponto P do corpo

Qualquer movimento pode ser decomposto na translação em relação a um ponto e, em simultâneo, na rotação em torno desse mesmo ponto.

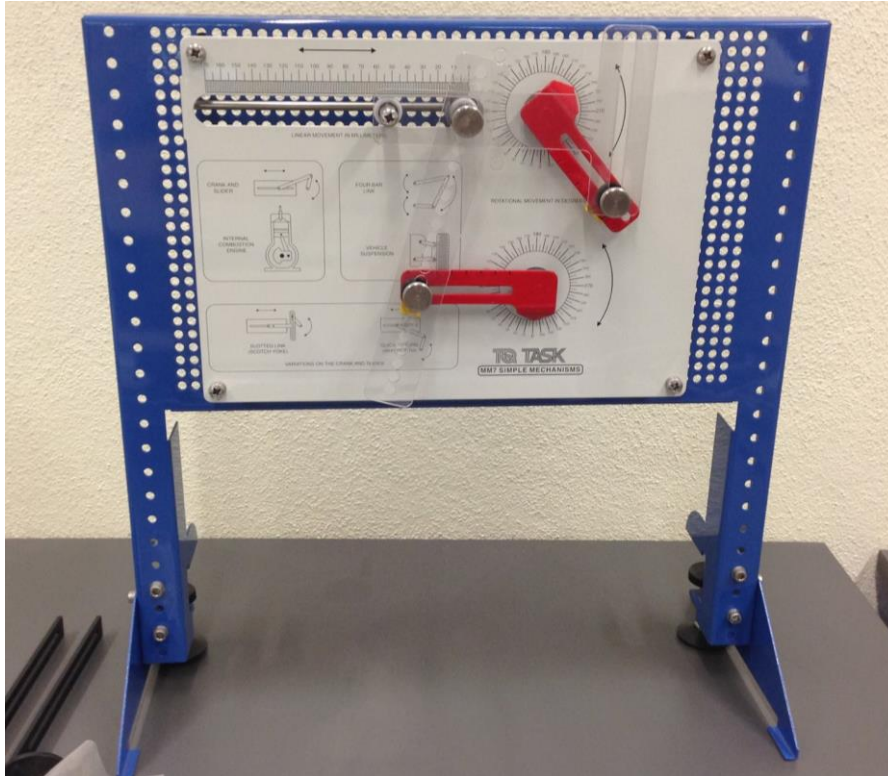
Assim, as velocidades em quaisquer dois pontos de um corpo rígido podem ser relacionadas através da lei de propagação de velocidades de um corpo rígido (5.5).

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} \quad (5.5)$$

Sendo  $AB$  o vetor que vai de A para B. De notar que num corpo rígido a velocidade angular é única.

**Descrição do equipamento:**

Este *kit* consiste numa placa impressa com duas manivelas rotativas, uma articulação ranhurada e uma biela que permite aos estudantes construírem vários mecanismos. As rotações e os deslocamentos podem ser medidos usando a placa impressa.



*Figura 2.9 - O equipamento MM7*

## 2.2.2 - Equipamento MM4 - Airtrack

### Experiência 1 - Aceleração devido à gravidade

Esta experiência usa uma massa em queda livre para acelerar o veículo ao longo da via e pode ser usada para determinar a constante de aceleração da gravidade,  $g$ .

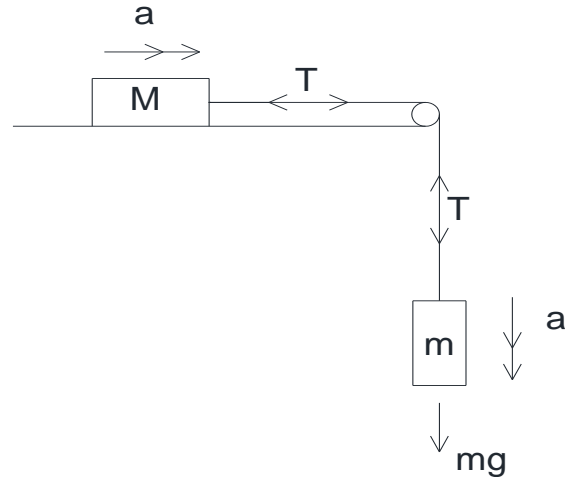


Figura 2.10 - Esquema do equipamento para a experiência 1

Para esta experiência será necessário um cordel e massas. Será também necessário um computador com o *software* para os *Light Gates* para que se possa retirar as leituras.

Método:

- 1 - Preparar os *Light Gates* de forma a que o veículo os atravesse antes que a massa em queda livre atinja o chão;
- 2 - Carregar o veículo com a carga máxima (massa total de 200g);
- 3 - Colocar uma massa total de 20g na ponta do cordel;
- 4 - Ligar o fornecimento de ar (*airbox*);
- 5 - Libertar a massa em queda livre e registar na Tabela 6.1 a velocidade nos dois *Light Gates* assim como o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) entre as duas passagens;
- 6 - Repetir o passo anterior para assegurar resultados consistentes;
- 7 - Repetir os passos 5 e 6 para incrementos de 20g na massa em queda livre até um máximo de 100g;
- 8 - Traçar um gráfico de  $(M+m)a$  versus  $m$ , o gradiente do qual deve fornecer o valor de  $g$ .

Sugestão: verificar que a roldana se move livremente.

### Experiência 2A - Colisão Elástica

Esta experiência usa os *buffers* magnéticos dos veículos para provar o princípio da conservação da quantidade de movimento linear.

Será necessário um computador com o *software* para os *Light Gates* para que se possa retirar as leituras.

Método:

- 1 - Confirmar que os veículos têm a mesma massa total;
- 2 - Posicionar o primeiro *Light Gate* de modo a que o veículo impulsionado o atravesse totalmente antes de colidir com o veículo estacionário. Posicionar o segundo *Light Gate* de modo a que o veículo inicialmente estacionário o atravesse totalmente;
- 3 - Ligar o fornecimento de ar (*airbox*) e colocar o veículo estacionário na via entre os dois *Light Gates* com os *buffers* magnéticos virados para o veículo que será impulsionado;
- 4 - Impulsionar o veículo (com os *buffers* magnéticos à frente) na direção do veículo estacionário registrando na Tabela 6.2 a velocidade dos veículos antes e depois da colisão. Não esquecer de registrar todas as velocidades (a velocidade do veículo impulsionado deve ser nula após o impacto se os veículos tiverem a mesma massa);
- 5 - Calcular a quantidade de movimento linear,  $p$ , antes e depois da colisão para confirmar que esta se conservou, registrando os valores na Tabela 6.3;
- 6 - Repetir a experiência variando a massa dos veículos, sem esquecer de registrar todas as velocidades (toda e qualquer velocidade de ricochete deve ser registada como negativa).

Sugestões:

- Para impulsionar o veículo, empurrar gentilmente.
- Segurar o veículo estacionário com um dedo até ao momento imediatamente antes da colisão. Isto ajudará a que a velocidade inicial seja nula.

### **Experiência 2B - Colisão Inelástica**

Esta experiência usa os *buffers* adesivos que têm um comportamento semelhante a um amortecedor, unindo os veículos para simular uma colisão perfeitamente inelástica.

Será também necessário um computador com o *software* para os *Light Gates* para que se possa retirar as leituras.

Método:

- 1 - Confirmar que os veículos têm a mesma massa total;
- 2 - Posicionar o primeiro *Light Gate* de modo a que o veículo impulsionado o atravesse totalmente antes de colidir com o veículo estacionário. Posicionar o segundo *Light Gate* de modo a que o veículo inicialmente estacionário o atravesse totalmente;
- 3 - Ligar o fornecimento de ar (*airbox*) e colocar o veículo estacionário na via entre os dois *Light Gates* com os *buffers* que colam virados para o veículo que será impulsionado;
- 4 - Impulsionar o veículo (com os *buffers* que colam à frente) na direção do veículo estacionário registrando na Tabela 6.4 a velocidade dos veículos antes e depois da colisão confirmando que os veículos se colaram;
- 5 - Calcular a quantidade de movimento linear antes e depois da colisão para confirmar que este se conservou, registrando os valores na Tabela 6.5;
- 6 - Repetir a experiência variando a massa dos veículos e confirmando que os veículos se colam.

Sugestões:

- Para impulsionar o veículo, empurrar gentilmente.
- Segurar o veículo estacionário com um dedo até ao momento imediatamente antes da colisão. Isto ajudará a que a velocidade inicial seja nula.
- O material que cola pode perder características se estiver frio ou se não for usado durante muito tempo. Para resolver este problema, basta tira-lo e amassa-lo um pouco até que aqueça e voltar a repô-lo no veículo.

## Fundo teórico

### Conceitos básicos

Velocidade - é uma grandeza que relaciona a variação da posição no espaço em relação ao tempo, ou seja, qual a distância percorrida por um corpo num determinado intervalo de tempo. É uma grandeza vetorial e a unidade SI é o metro por segundo.

Aceleração - é a taxa de variação da velocidade. É uma grandeza vetorial cuja unidade SI é o metro por segundo ao quadrado.

Quantidade de movimento linear - é o produto da massa pela velocidade. É uma grandeza vetorial cuja direção e sentido são os mesmos da velocidade, e a unidade SI é o quilograma-metro por segundo.

Energia cinética - está relacionada com o estado de movimento do corpo em questão. É uma grandeza escalar que depende da massa e da velocidade do corpo em questão. Quando o corpo está em repouso, a sua energia cinética é nula. A unidade SI é o Joule.

### Leis de Newton

**Primeira lei de Newton, princípio da Inércia:** se a força resultante (o vetor soma de todas as forças que atuam sobre o corpo) é nula, a velocidade do corpo mantém-se. Assim, se o corpo está em repouso ficará em repouso e se está em movimento a sua velocidade mantém-se.

**Segunda lei de Newton, princípio fundamental da Dinâmica:** quando a força resultante não é nula, o corpo sofrerá uma aceleração diretamente proporcional à resultante e com a sua direção e sentido e inversamente proporcional à massa do corpo (6.1).

$$a = \frac{F}{m} \quad (6.1)$$

**Terceira lei de Newton, princípio da Ação e Reação:** quando dois corpos entram em contacto, a força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2 é igual e de sentido oposto à força que o corpo 2 exerce sobre o corpo 1.



## Colisões

### Colisão elástica

Numa colisão elástica a energia cinética e o momento linear dos corpos envolvidos permanecem os mesmos antes e depois da colisão. Diz-se que houve conservação da quantidade de movimento linear e energia.

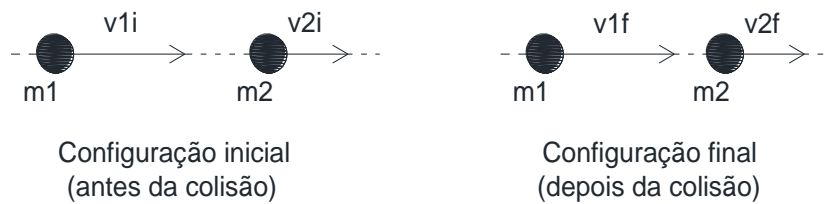


Figura 2.11 - Colisão elástica

Antes da colisão o corpo de massa  $m_1$  tinha uma energia cinética  $E_{1i}$  e uma quantidade de movimento linear  $p_{1i}$  e o corpo de massa  $m_2$  tinha uma energia cinética  $E_{2i}$  e uma quantidade de movimento linear  $p_{2i}$  que podem ser calculados através das seguintes expressões:

$$E = \frac{m * v^2}{2} \quad (6.2)$$

$$p = M * v \quad (6.3)$$

Após a colisão, os corpos terão quantidades de movimento e energias diferentes do que tinham antes da colisão de acordo com as seguintes igualdades: (i – inicial, f – final)

$$E_{1i} + E_{2i} = E_{1f} + E_{2f} \quad (6.4)$$

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \quad (6.5)$$

Ou seja, verifica-se a conservação da quantidade de movimento linear e da energia.

### Colisão inelástica

Colisões perfeitamente inelásticas são aquelas onde não ocorre conservação de energia mecânica mas apenas da quantidade de movimento.

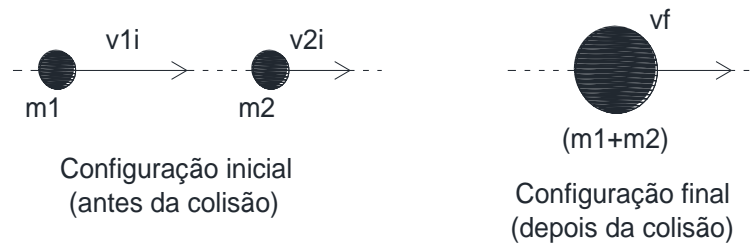


Figura 2.12 - Colisão inelástica

Como se pode ver na Figura 2.12, após o choque, ambos os corpos seguem juntos, com um único corpo com massa igual à soma das massas dos corpos antes do choque.

Assim, após a colisão, a quantidade de movimento será:

$$p_f = v_f * (m_1 + m_2) \quad (6.6)$$

E sabendo que há conservação da quantidade de movimento

$$p_f = p_{1i} + p_{2i} \quad (6.7)$$

### Descrição do equipamento:

O equipamento *Airtrack* é constituído por uma calha com atrito muito baixo desenhada com o intuito de provar alguns dos princípios fundamentais da dinâmica como as leis de Newton e os problemas de colisão e quantidade de movimento/momento linear.

O baixo atrito que se verifica entre a via e o veículo é alcançado pela suspensão dos veículos numa camada de ar. O ar é fornecido por um dispositivo "*Airbox*", que insufla grandes volumes de ar a uma pressão baixa e constante. O ar sai por pequenos orifícios ao longo da via com um afastamento de 10 mm. É este ar que cria a camada sobre a qual os veículos se deslocam.

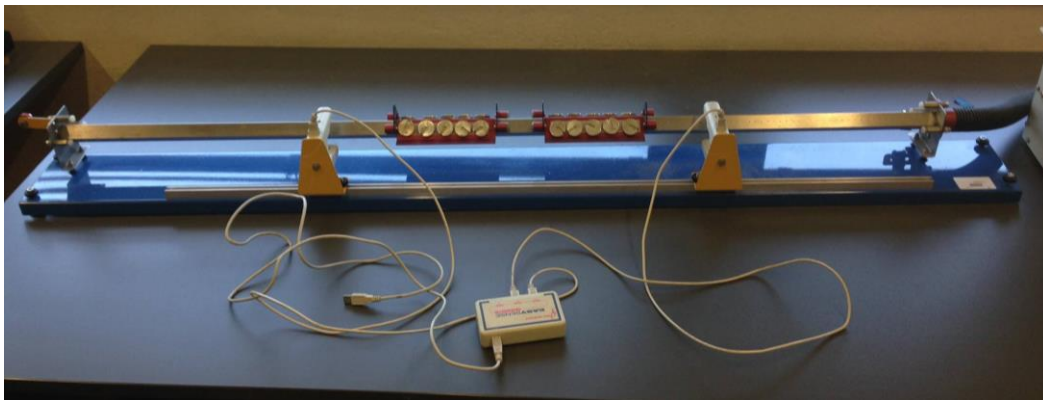


Figura 2.13 - O equipamento MM4

São fornecidos dois veículos, com aproximadamente a mesma massa (100g), havendo a possibilidade de fazer pequenos incrementos nessa massa, adicionando massas presas por velcro (até um total de 200g). Cada veículo tem um par de amortecedores magnéticos que se repelem numa ponta e amortecedores adesivos na outra. Cada par é usado contra o seu semelhante no outro veículo para os dois diferentes tipos de colisão: os magnéticos para a colisão elástica "perfeita" e os que colam para a colisão inelástica.

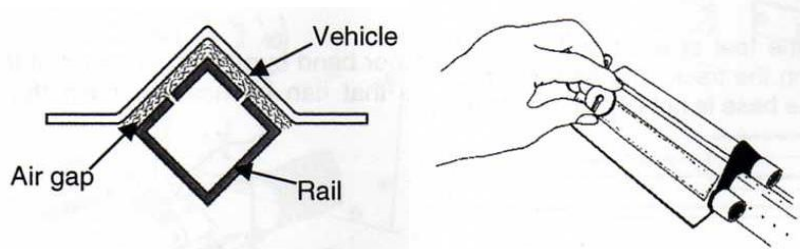


Figura 2.14 - Pormenores do equipamento retirado de [34]

Para medição de tempos, são usadas células fotoelétricas (*Light Gates*), cujos feixes de luz são interrompidos pela passagem dos apêndices laterais dos veículos. Estas células podem ser colocadas em qualquer ponto ao longo da via.

## 2.2.3 - Equipamento MM2 - Kit de Dinâmica

### Experiência 1 - O Pêndulo Simples

Esta experiência foi desenhada para provar a equação do movimento de um pêndulo, e também para fornecer um meio preciso para determinar o valor da aceleração da gravidade. Por último, o pêndulo é útil para demonstrar a transferência entre energia potencial e cinética enquanto o pêndulo oscila.

Equação do movimento do pêndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (7.1)$$

Onde,

T - Período ( $s^{-1}$ )

l - Comprimento do pêndulo (m)

g - Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ )

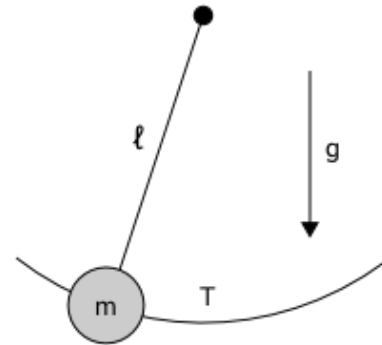


Figura 2.15 - Esquema do equipamento para a experiência 1 retirado de [35]

Para esta experiência será necessário um cronómetro.

Método:

- 1 - Colocar o arco que permite alterar o comprimento do fio do pêndulo no topo do trilho;
- 2 - Puxar o fio-de-prumo para o lado com um pequeno ângulo (inferior a 15 graus);
- 3 - Usando o cronómetro, medir o tempo necessário para 10 períodos completos e a seguir calcular a média para uma oscilação, preenchendo a Tabela 7.1;
- 4 - Repetir os passos 2 e 3 cinco vezes deslocando sempre o arco para baixo, encurtando o comprimento efetivo do cordel do pêndulo (no mínimo 100mm);
- 5 - Traçar o gráfico período<sup>2</sup>/comprimento para provar a equação do pêndulo.

O gradiente do gráfico é  $4\pi^2/g$  e portanto pode ser usado para determinar a aceleração da gravidade;

Sugestões:

- Não exceder os 15 graus ao puxar o fio-de-prumo pois a precisão da experiência decresce rapidamente para valores superiores;
- Como demonstração, o arco pode ser movido durante a oscilação do pêndulo para que a variação do período seja vista instantaneamente.

### Experiência 2 - Mola Oscilante

Esta experiência pode ser usada para provar a equação característica para um sistema simples massa-mola e fornece uma visão perspicaz sobre como a frequência natural do sistema pode ser afetada. Apesar de simples, a experiência produz resultados precisos. Equação do sistema massa-mola:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (7.2)$$

Onde,

$\omega_n$  - Frequência própria do sistema (rad/s)

k - Rigidez da mola (N/m)

m - Massa (Kg)

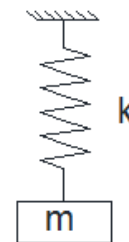


Figura 2.16 - Esquema do equipamento para a experiência 2

O cronómetro também será necessário para esta experiência.

Método:

- 1 - Aplicar uma massa de 100g no extremo da mola;
- 2 - Esticar a mola cerca de 15mm e libertar cuidadosamente. Registrar na Tabela 7.2 o tempo necessário para dez oscilações usando o cronómetro;
- 3 - Repetir o passo 2 várias vezes para obter uma média para as dez oscilações e depois calcular a média para uma oscilação;
- 4 - Adicionar mais massa à mola em incrementos de 100g e repetir os passos 2 e 3 até um máximo de 500g.

Sugestões:

- Registrar vários valores para os tempos, especialmente quando a massa é menor;
- Traçar o gráfico  $1/\omega_n$  versus massa para provar a equação característica;

Nota: permite também avaliar o efeito da associação de molas em série.

## Fundo Teórico

### Conceitos básicos

Período - tempo necessário para que um movimento realizado por um corpo se volte a repetir, ou seja, num movimento repetitivo, é o tempo que demora um ciclo completo. A unidade SI é o segundo.

Rigidez - a rigidez de um corpo define-se como a sua capacidade de resistir a uma deformação imposta por uma força.

Frequência - grandeza física que indica o número de ocorrências de um evento (ciclos, voltas, etc.) num determinado intervalo de tempo. É o inverso do Período (7.3) e portanto a unidade SI é o Hertz (Hz).

$$f = \frac{1}{T} \quad (7.3)$$

### Osciladores harmónicos: o pêndulo e o sistema massa-mola

Um pêndulo gravitacional é um oscilador harmónico, um sistema que apresenta um movimento harmónico, de oscilação, ou seja, tem um movimento vaivém em torno de uma posição central. Assim, um pêndulo envolve as seguintes hipóteses:

- A massa pendular está concentrada apenas no elemento oscilante;
- A haste pendular não possui massa, é inextensível e inflexível;
- O movimento pendular acontece no plano (em apenas duas dimensões);
- O movimento pendular é conservativo (não há atrito).

Para amplitudes de oscilação pequenas, a equação do pêndulo pode ser simplificada para a expressão dada anteriormente.

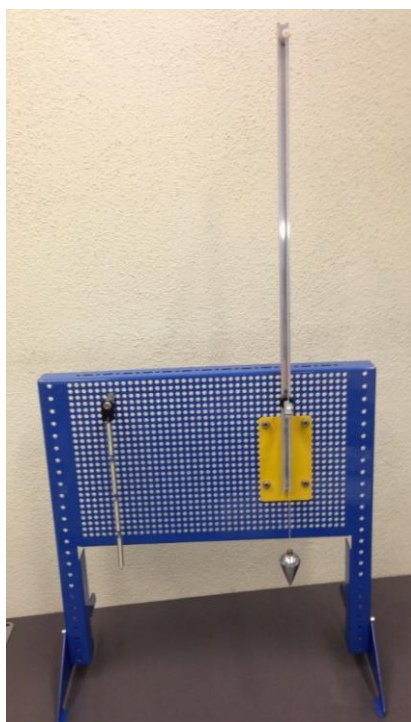
O sistema massa-mola também é um oscilador harmónico e, no seu caso, envolve hipóteses análogas às do pêndulo.

Os osciladores harmônicos regem-se pela Lei de Hooke que diz que o alongamento experimentado por um material elástico (ao ser submetido à ação de uma força deformadora) é diretamente proporcional à força deformadora, desde que esta não ultrapasse o limite de elasticidade.

**Descrição do equipamento:**

Este *kit* consiste num pêndulo e um sistema massa-mola, e permite aos estudantes explorar os fundamentos de oscilação e vibração. O pêndulo proporciona uma demonstração de transferência de energia potencial para energia cinética, isto é, da conservação da energia total mecânica no caso em que apenas existam forças conservativas. Assim como prova que o período é proporcional à raiz quadrada do comprimento do pêndulo. As propriedades do pêndulo são reguláveis, tendo em conta que o comprimento efetivo do cordel pode ser ajustado à medida que o pêndulo oscila dando uma imagem instantânea da variação do período.

A mola oscilante fornece um meio simples para explorar a relação entre a rigidez da mola (ou associação de molas em série), a massa e a frequência própria do sistema.



*Figura 2.17 - O equipamento MM2*

**Informação útil:**

Rigidez da mola,  $k = 40 \text{ N/m}$

## 2.2.4 - Equipamento TM155 - Aparelho de oscilações livres, amortecidas e forçadas

### Experiência 1A - Vibração em regime livre não amortecido

Método:

- 1 - Inserir o papel no cilindro rotativo e colocar a caneta de modo a que o contacto com o papel seja mínimo, pois este contacto poderá introduzir atrito significativo no sistema;
- 2 - Verificar que o amortecedor não está ligado ao sistema;
- 3 - Ligar o cilindro rotativo de modo a registar o comportamento da viga;
- 4 - Impor, manualmente, um deslocamento inicial na extremidade livre da viga, soltar e observar o registo no papel;
- 5 - Repetir o passo anterior de modo a observar várias vezes o acontecimento, visto que este durará pouco tempo devido ao, de certa forma, elevado atrito existente nas várias peças do sistema;
- 6 - Desligar o cilindro rotativo e retirar o rolo de papel para observar os resultados.

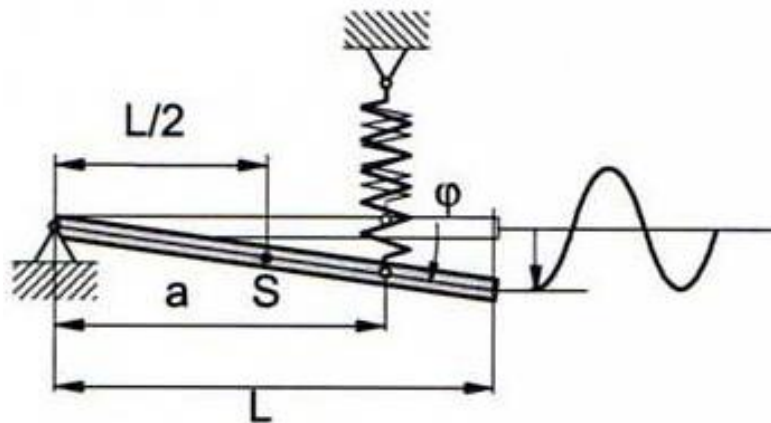


Figura 2.18 – Esquema do equipamento para a experiência 1A retirado de [14]

#### Informação útil:

Rigidez da mola,  $K = 1400 \text{ N/m}$

Massa da barra,  $M = 1,7 \text{ kg}$

Comprimento da barra,  $L = 700 \text{ mm}$



### Experiência 1B - Vibração em regime livre amortecido

Método:

- 1 - Inserir o papel no cilindro rotativo e colocar a caneta de modo a que o contacto com o papel seja mínimo, pois este contacto introduzirá muito atrito ao sistema;
- 2 - Verificar que o amortecedor está ligado ao sistema;
- 3 - Ligar o cilindro rotativo de modo a registar o comportamento da viga;
- 4 - Impor, manualmente, um deslocamento inicial na extremidade livre da viga, soltar e observar o registo no papel;
- 5 - Repetir o passo anterior de modo a observar várias vezes o acontecimento, visto que este durará pouco tempo devido ao elevado atrito existente nas várias peças do sistema (sugestão: colocar o amortecimento a um nível muito baixo, ou seja, apertar muito pouco o parafuso no amortecedor);
- 6 - Desligar o cilindro rotativo e retirar o rolo de papel para observar os resultados.

Nota: Nesta segunda experiência, a viga oscilará ainda menos que na primeira, devido ao amortecimento.

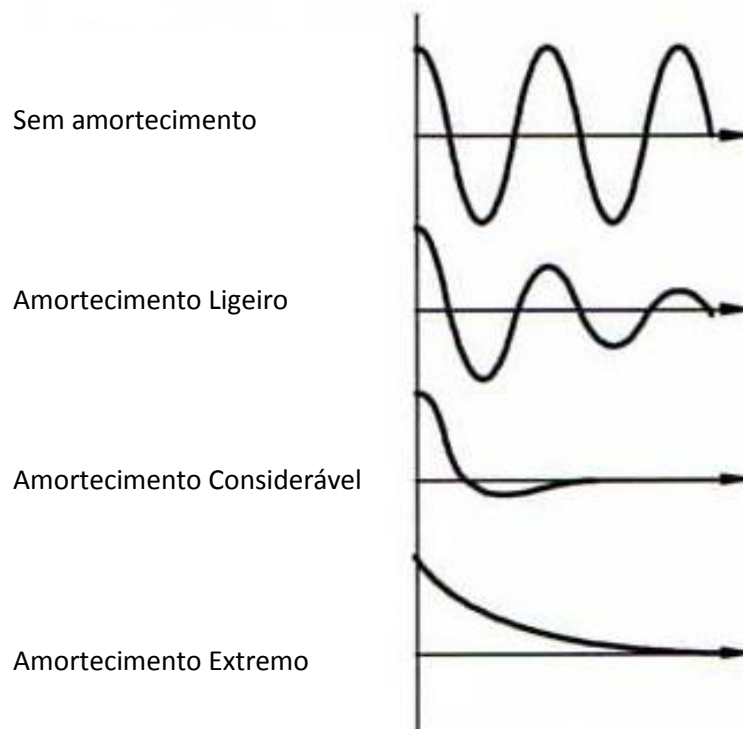


Figura 2.19 - Variação do período de vibração da estrutura em função do amortecimento adaptado de [14]

## Experiência 2 - Vibração em regime forçado amortecido

(Nota: não se faz a experiência em regime forçado não amortecido por motivos de segurança do equipamento)

Método:

- 1 - Inserir o papel no cilindro rotativo e colocar a caneta de modo a que o contacto com o papel seja mínimo, pois este contacto introduzirá muito atrito ao sistema;
- 2 - Verificar que o amortecedor está ligado ao sistema;
- 3 - Ligar o cilindro rotativo de modo a registar o comportamento da viga;
- 4 - Ligar o motor que impõe o deslocamento, primeiro com uma frequência baixa;
- 5 - Aumentar, devagar, a frequência, tendo em conta que a frequência de ressonância da viga se situa num valor perto dos 7-8Hz, pelo que, nesta altura, se deve "amortecer" o movimento desta com a mão, a fim de evitar danos no equipamento;
- 6 - Desligar tudo, tendo, novamente, especial cuidado com a frequência de ressonância ao reduzir a frequência até 0Hz. Retirar o rolo de papel e observar os resultados obtidos.

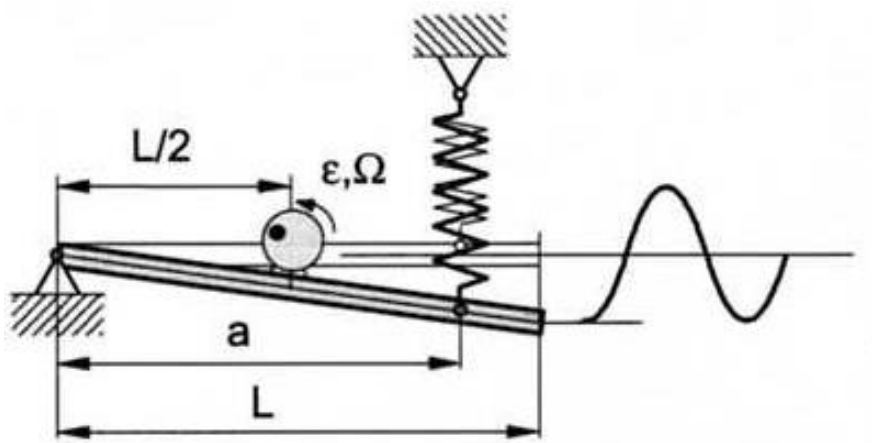


Figura 2.20 - Esquema do equipamento para a experiência 2 retirado de [14]

## Fundo teórico

### Equação do movimento oscilatório

No seu formato geral:

$$M_g \ddot{x}(t) + c_g \dot{x}(t) + K_g x(t) = f_g(t) \quad (8.1)$$

Onde, no caso desta experiência,

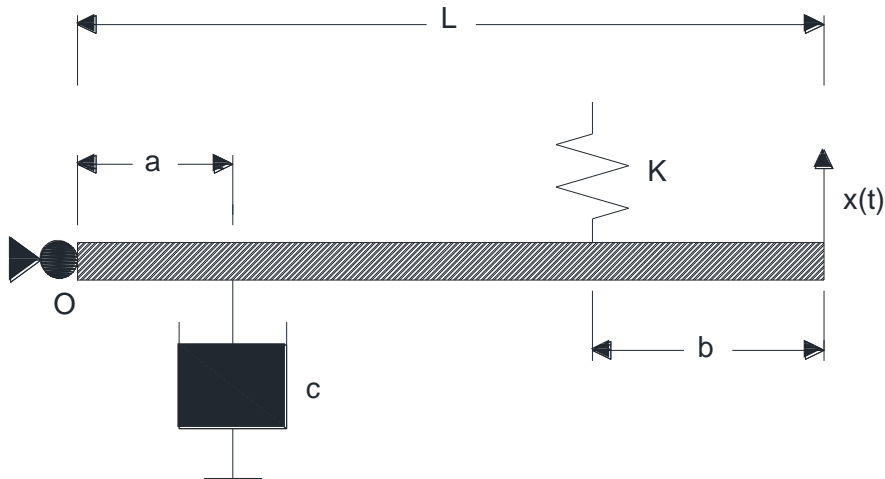


Figura 2.21 - Esquema do equipamento

$M_g$  diz respeito à massa da barra e

$$M_g = \frac{ML}{3(L-b)} \quad (8.2)$$

$c_g$  está relacionado com o amortecedor

$$c_g = \frac{ca^2}{L(L-b)} \quad (8.3)$$

$K_g$  é relativo à mola

$$K_g = K \frac{(L-b)}{L} \quad (8.4)$$

E, finalmente, no que toca à força aplicada ao sistema

$$f_g(t) = K \frac{y_m}{2} \sin(\omega_f t) \quad (8.5)$$

Para esta experiência, a equação anterior e as suas parcelas podem ser deduzidas partindo da equação de equilíbrio dinâmico (8.6) (em relação ao ponto fixo, a rótula em O):

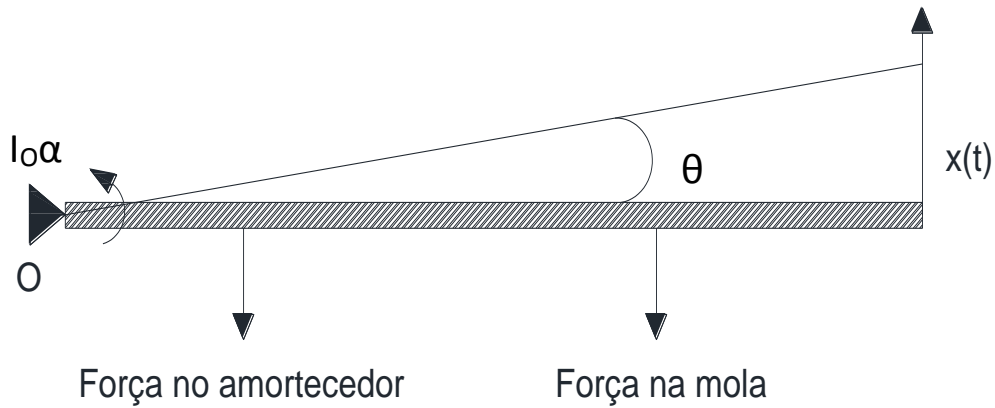


Figura 2.22 - Esquema de forças do equipamento

$$- f_{amort} a - f_{mola} (L - b) = I_{zz}^O \alpha_{barra} \quad (8.6)$$

Tendo em conta que

$$\omega_{barra} = \frac{\dot{x}(t)}{L} \quad \alpha_{barra} = \frac{\ddot{x}(t)}{L} \quad (8.7)$$

Para o amortecedor

$$f_{amort} = c v_A = c \frac{\dot{x}(t)}{L} a \quad (8.8)$$

E para a mola

$$f_{mola} = K [x_b - y(t)] \quad (8.9)$$

$$x_b = \frac{x(t)}{L} (L - b) \quad (8.10)$$

$$y(t) = \frac{y_m}{2} \sin(\omega_f t) \quad (8.11)$$

Substituindo estes termos na equação de equilíbrio (8.6) obtém-se:

$$-c \frac{\dot{x}(t)}{L} a^2 - K \left[ x(t) \frac{(L-b)}{L} - \frac{y_m}{2} \sin(\omega_f t) \right] (L-b) = \frac{ML^2}{3} \frac{\ddot{x}(t)}{L} \quad (8.12)$$

E finalmente, após trocarmos o sinal à equação e isolando a força de excitação no segundo membro chega-se à forma final já mencionada (8.1) (agora substituindo os termos da expressão geral pelas suas expressões (8.13)):

$$\frac{ML}{3(L-b)} \ddot{x}(t) + c \frac{a^2}{L(L-b)} \dot{x}(t) + K \frac{(L-b)}{L} x(t) = K \frac{y_m}{2} \sin(\omega_f t) \quad (8.13)$$

### Regime livre não amortecido

Como o próprio nome indica, as parcelas do amortecedor e da força de excitação serão nulas, e portanto a equação (8.1) toma a forma

$$M_g \ddot{x}(t) + K_g x(t) = 0 \quad (8.14)$$

Tendo em conta que a frequência própria do oscilador é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_g}{M_g}} = \sqrt{\frac{3K}{M} \frac{L-b}{L}} \quad (8.15)$$

Então pode-se fazer a seguinte simplificação na equação (8.14), pondo em evidência o termo  $M_g$

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0 \quad (8.16)$$

E portanto,

$$\frac{ML}{3(L-b)} \ddot{x}(t) + K \frac{(L-b)}{L} x(t) = 0 \quad (8.17)$$

A solução desta equação é

$$x(t) = U_m \sin(\omega_n t + \phi) \quad (8.18)$$

Onde,

$$U_m = \sqrt{u(0)^2 + \left( \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \right)^2} \quad (8.19)$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{u(0)\omega_n}{\dot{u}(0)} \right) \quad (8.20)$$

### Regime livre amortecido

Adicionando a parcela do amortecedor à equação (8.14), esta toma a forma

$$M_g \ddot{x}(t) + c_g \dot{x}(t) + K_g x(t) = 0 \quad (8.21)$$

E tendo em conta que a frequência do amortecedor é

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{\frac{K_g}{M_g} (1 - \xi^2)} \quad (8.22)$$

E o coeficiente de amortecimento

$$\xi = \frac{c_g}{2M_g \omega_n} \quad (8.23)$$

A equação do (8.21) tomará a forma

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = 0 \quad (8.24)$$

Ou seja,

$$\frac{ML}{3(L-b)}\ddot{x}(t) + c\frac{a^2}{L(L-b)}\dot{x}(t) + K\frac{(L-b)}{L}x(t) = 0 \quad (8.25)$$

Cuja solução é

$$x(t) = U_m e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (8.26)$$

Onde,

$$U_m = \sqrt{u(0)^2 + \left(\frac{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega_n}{\omega_d}\right)^2} \quad (8.27)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{u(0)\omega_d}{\dot{u}(0) + u(0)\xi\omega_n}\right) \quad (8.28)$$

### Regime forçado

Por último, acrescentando agora a força de excitação presente no sistema, a equação (8.14) toma a forma

$$M_g\ddot{x}(t) + c_g\dot{x}(t) + K_gx(t) = f_g(t) \quad (8.29)$$

E tendo em conta que

$$P_m = K\frac{y_m}{2} \quad (8.30)$$

A equação (8.29) fica

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{P_m}{M_g} \sin(\omega_f t) \quad (8.31)$$

E assim,

$$\frac{ML}{3(L-b)}\ddot{x}(t) + c\frac{a^2}{L(L-b)}\dot{x}(t) + K\frac{(L-b)}{L}x(t) = K\frac{y_m}{2}\sin(\omega_f t) \quad (8.32)$$

A solução em regime forçado pode ser obtida a partir da soma das parcelas:

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) \quad (8.33)$$

Em que a primeira parcela da equação (8.33) diz respeito a regime transitório

$$x_t(t) = U_m e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (8.34)$$

E a segunda a regime permanente

$$x_p(t) = X_m \sin(\omega_f t - \phi_1) \quad (8.35)$$

E o valor da amplitude da resposta é

$$X_m = \beta_1 \frac{P_m}{K_g} = \beta_1 \frac{Y_m}{2} \frac{L}{L-b} \quad (8.36)$$

Onde  $\beta_1$  é o coeficiente de amplificação dinâmica

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}} \quad (8.37)$$



Este coeficiente varia em função da relação entre a frequência de excitação e a frequência própria do oscilador e do coeficiente de amortecimento de acordo com os seguintes gráficos:

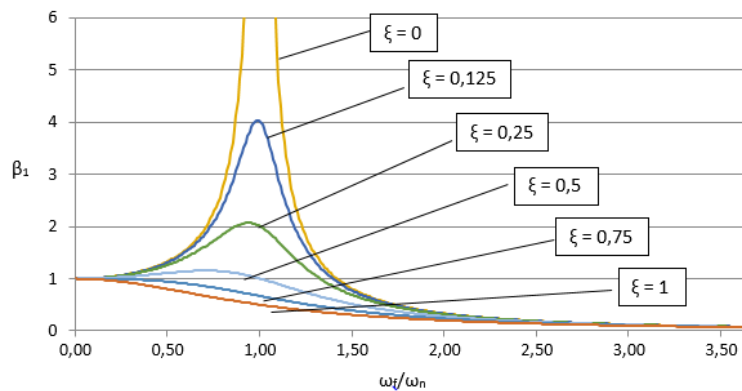


Figura 2.23 - Curvas para o coeficiente  $\beta_1$  em função da relação frequência de excitação/frequência própria

### Conceitos teóricos

Frequência – grandeza física que mede o número de vezes que um acontecimento cíclico se repete num determinado intervalo de tempo. O tempo necessário para que decorra um ciclo completo chama-se de Período, sendo que a Frequência é o seu inverso.

Amplitude – medida escalar da magnitude de oscilação de uma onda.

Ressonância - diz-se que um corpo entra em ressonância quando oscila em máxima amplitude. Devido a este fenómeno, uma força pequena mas com a frequência igual à frequência própria da estrutura onde está a ser aplicada pode produzir vibrações de grande amplitude.

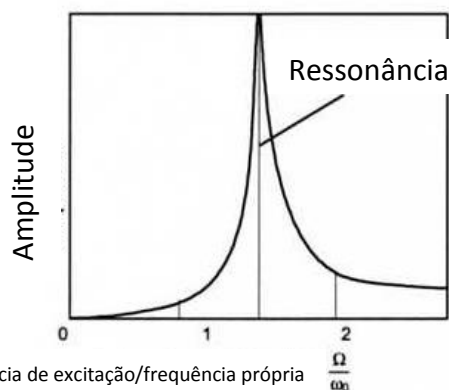
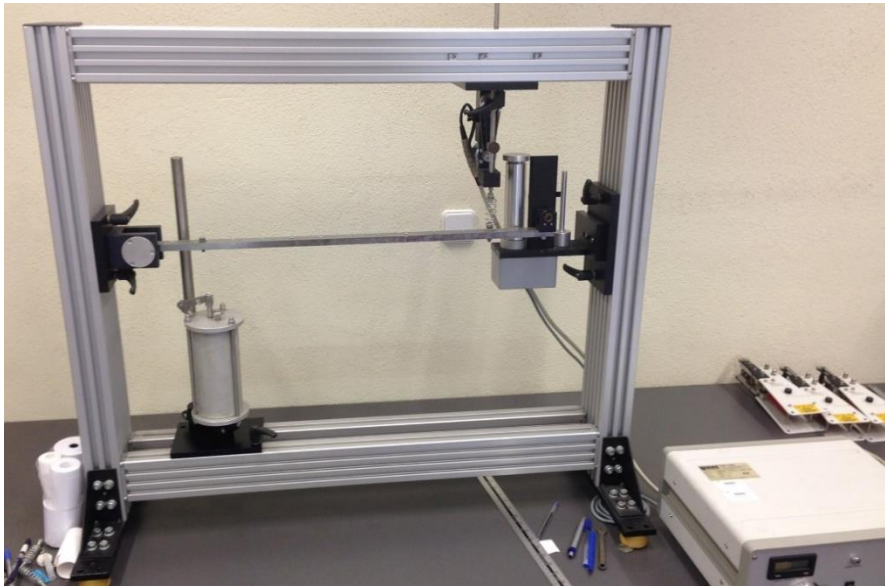


Figura 2.24 - Fenómeno de ressonância adaptado de [14]

**Descrição do equipamento:**

O aparelho de oscilações livres, amortecidas e forçadas consiste numa viga com um apoio fixo na extremidade esquerda (isto é, pode rodar nessa extremidade). Perto da outra extremidade tem um apoio elástico constituído por uma mola helicoidal e há ainda a possibilidade de se ligar ao sistema um amortecedor viscoso ajustável. Por último, a vibração forçada é imposta por um motor que impõe um deslocamento na base do apoio elástico. Este equipamento tem como objetivo o apoio ao ensino da teoria das vibrações abordando os vários aspetos do comportamento dos sistemas de 1 grau de liberdade sujeitos a oscilações livres, livres amortecidas e forçadas, incluindo os fenómenos de ressonância, as características dinâmicas dos sistemas, etc.



*Figura 2.25 - O equipamento TM155*

A fim de registar valores, o aparelho possui ainda um cilindro rotativo que permite registar num rolo de papel as amplitudes do movimento da extremidade livre da viga ao longo do tempo.

O equipamento é controlado por uma unidade que permite controlar a frequência de excitação quando o aparelho está a trabalhar em regime forçado e ainda a rotação do cilindro de registo.

As experiências com este equipamento consistem todas em registar e observar o comportamento da viga nas variadas condições de apoio e regime.

### **3 - Mecânica dos Corpos Deformáveis**

Nesta segunda parte do trabalho, é feito algo análogo ao que foi feito na primeira, uma descrição de vários equipamentos, mas desta vez para os que abordam conceitos das áreas da Resistência de Materiais e da Análise e Dimensionamento de Estruturas. Assim como na primeira parte, o restante corpo de cada experiência encontra-se no anexo. Foi também feita a mesma verificação da condição dos equipamentos e replicação das experiências, confirmando então que estes se encontram a funcionar corretamente.

Nas áreas abordadas no capítulo anterior, Estática e Dinâmica, considera-se sempre que estamos a trabalhar com corpos rígidos, idealizações dos corpos reais. Para o estudo dos corpos deformáveis, que se aproximam mais aos corpos reais, há que ter noção de conceitos como tensão e deformação, ambos definidos mais à frente nesta tese.

O comportamento de um corpo, quando submetido a uma força/ação, traduz-se através das tensões e deformações que nele se geram, sendo que estas dependem das propriedades do material que constitui o corpo.

Ao longo deste capítulo, são descritos equipamentos com os quais é possível realizar experiências que não só têm esses conceitos e propriedades em conta como, muitas das vezes, foram elaboradas com o intuito de facilitar a sua compreensão.

À semelhança do primeiro capítulo, este encontra-se também dividido em duas partes, Resistência de Materiais e Análise e Dimensionamento de Estruturas, e em cada uma delas é feita a descrição dos vários equipamentos que abordam conceitos relativos a essas áreas.

### 3.1 - Resistência de Materiais

As Unidades Curriculares de Resistência de Materiais permitem então a aprofundar os conhecimentos adquiridos até ao momento, sobretudo no campo da Estática. Os alunos começam a ter noção não só da transmissão dos esforços entre os elementos da estrutura mas também como esses elementos se comportam, as tensões e sobretudo as deformações que neles se instalam em função dos materiais que os compõem e as suas características.

Estudam-se os vários tipos de esforços internos numa forma mais específica, tanto ao nível da estrutura em si como da secção, sendo que cada uma delas se analisam as diferentes tensões e deformações instaladas. Nas Unidades Curriculares anteriores, consideraram-se apenas partículas ou corpos rígidos (à exceção das molas), ou seja, idealizações dos corpos reais. Na Resistência de Materiais, consideram-se os corpos deformáveis, abordando-se então alguns conceitos novos:

- Tensão, que caracteriza a ação a que cada ponto do corpo fica submetido quando atua sobre ele um conjunto de forças/ações exteriores;
- Deformação, que caracteriza as variações da forma e das dimensões do corpo;

É esta a base da resistência e da elasticidade, relacionar a tensão e a deformação de um determinado corpo, sendo que essa relação está associada ao material que constitui o corpo. Tomem-se os seguintes exemplos, de um corpo rígido e outro elástico:

Quando se considera um corpo rígido (indeformável), a deformação será sempre nula, independentemente do estado de tensão provocada pelos ações. Neste caso, estamos a falar de um material idealizado, como foi anteriormente referido, uma “idealização dos corpos reais” (Figura 3.1).

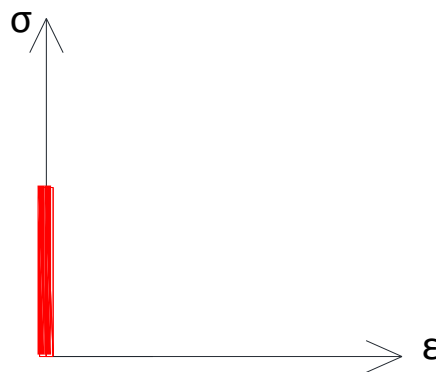
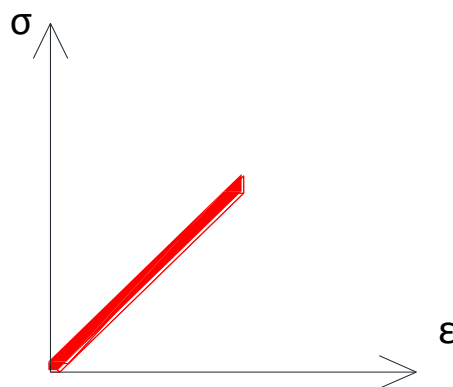


Figura 3.1 - Relação tensão/deformação num corpo rígido

No caso dos corpos deformáveis, é necessário saber, para cada corpo, como as deformações se relacionam com as tensões. O caso mais simples é descrito pela lei de Hooke, isto é, a tensão (unidimensional) é diretamente proporcional à deformação sendo o fator de proporcionalidade o módulo de elasticidade. Esta lei representa o comportamento fisicamente elástico linear, ou seja, quanto maior for a tensão no corpo, maior será a deformação e, conseqüentemente, quando a tensão é nula, entende-se que o corpo está na sua forma original (Figura 3.2). Na situação mais geral de materiais elásticos pode admitir-se que a relação entre tensões e deformações não é linear mas a linearidade predomina para a maioria dos materiais estruturais correntes.



*Figura 3.2 - Relação tensão/deformação num corpo elástico*

Todos os materiais possuem alguma elasticidade, mas quando o seu limite elástico é ultrapassado, o corpo entra no regime plástico, ou seja, mesmo descarregado, não recuperará a sua forma original: houve uma deformação irreversível. É a partir do momento que um material entra nesse regime plástico que começa a ser possível o seu colapso. Alguns materiais (dúcteis, como o aço) vão permitir uma grande deformação antes de entrarem em colapso, outros não (frágeis, como o vidro).

O conhecimento destes limites (elasticidade/plasticidade), o cálculo das tensões e das deformações, são de extrema importância no que toca à segurança de uma estrutura visto que há que encontrar um ponto de equilíbrio entre o material utilizado, a sua forma e as suas dimensões de modo a construir-se algo seguro.

Finalmente, os alunos são confrontados pela primeira vez com estruturas hiperestáticas e com os métodos que permitem o seu estudo. Estuda-se a cedência e o colapso dessas estruturas e faz-se uma breve introdução à verificação de segurança. A hiperestaticidade de uma estrutura confere-lhe segurança, pois a cedência (plastificação) de um ponto/elemento não levará ao seu colapso da estrutura (a não ser na situação excepcional de criar um mecanismo local). Claro que, se isto se verificar em vários pontos, pode-se tornar hipoestática, formando um mecanismo e deixando por isso de ser capaz de sustentar as cargas que lhe estão aplicadas.

Seguem-se os equipamentos que podem ser utilizadas para explicar alguns desses conceitos.

### 3.1.1 - Equipamento de Fotoelasticidade

#### Experiência - Tensões em materiais fotoelásticos

Nesta experiência, o objetivo será observar os padrões que se formarão nas várias peças quando submetidas a esforços e como a intensidade destes fará variar esses padrões.

Método:

- 1 - Ligar o equipamento à corrente e ligar a luz polarizadora;
- 2 - Colocar uma das peças no interior do equipamento e fixá-lo na prensa existente aplicando o menor esforço possível;
- 3 - Aumentar a força da prensa, deformando a peça e gerando os padrões de tensões;
- 4 - Observar a variação dos padrões conforme se faz variar o esforço na peça;
- 5 - Repetir a experiência para as outras peças.

De notar que, ao aplicarmos os esforços nas peças, estas deformam-se um pouco. O ideal seria isto não acontecer, mas pode-se considerar desprezável. No entanto, estas deformações são as responsáveis pela ligeira deslocação da linha neutra.



*Figura 3.3 - Padrões de tensões*

#### Fundo teórico

Material isotrópico é um material que possui as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada.

Material anisotrópico é um material que possui características diferentes, consoante a direção considerada.

Refração é o fenómeno da mudança de direção de uma onda ao atravessar a fronteira entre dois materiais com diferentes índices de refração. Para além da mudança de direção, dá-se também uma alteração na velocidade de propagação da onda.

O índice de refração é a relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz no meio/material em questão.

Tensão é a força, por unidade de área, num ponto de um corpo contínuo. Quando o corpo é submetido a ações, geram-se tensões ao longo de todo o corpo, que variam de ponto para ponto.

Linha neutra de uma secção, num material submetido a flexão, é a linha que separa a zona comprimida da zona tracionada, e portanto onde as tensões normais são nulas. A sua posição é constante e só depende da forma da secção.

#### **Descrição do equipamento:**

No século XIX, descobriu-se que substâncias transparentes isotrópicas podiam-se tornar anisotrópicas quando submetidas a cargas mecânicas que lhe alteravam o estado de tensão/deformação. Este fenómeno tem o nome de fotoelasticidade e a maioria dos materiais onde ocorre são polímeros à base de policarbonatos ou resinas epoxídicas. É um fenómeno ótico de dupla refração que acontece quando o material é atravessado por um raio de luz e apresenta, localmente, diferentes índices de refração para diferentes níveis de tensão/deformação. Este equipamento permite-nos observar esse fenómeno, possuindo, para tal, uma fonte de luz polarizada que vai incidir sobre peças de diferentes formatos, peças essas feitas em materiais fotoelásticos. Quando submetidas a esforços, entre outras observações possíveis, irão ser visíveis zonas isocromáticas que correspondem a zonas de igual tensão, formando-se “padrões de tensões” (ou franjas) nas peças que nos permitirão analisar a distribuição de tensões.



*Figura 3.4 - O equipamento de fotoelasticidade*

### 3.1.2 - Equipamento STR5 - Estado de tensão em vigas à flexão

#### Experiência - Flexão numa viga

Nesta experiência, os alunos aplicam uma carga crescente numa viga e medem as tensões resultantes. Essas tensões são então convertidas em deformações e compara-se a posição indeformada com a posição teórica da linha neutra.

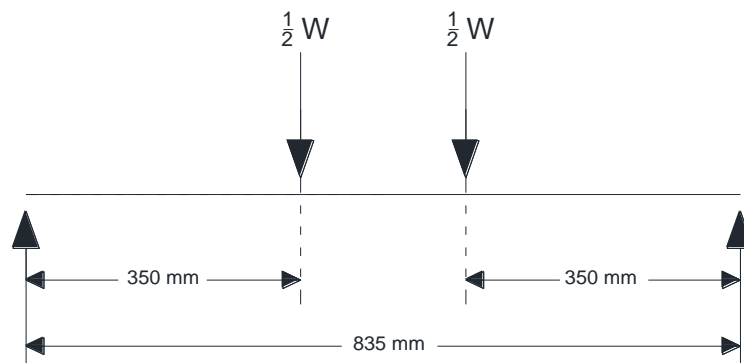


Figura 3.5 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência

Para esta experiência serão necessárias as seguintes expressões (lei de Hooke e relação entre valor de tensão na fibra à distância  $y$  da linha neutra na secção de momento de inércia  $I$  sujeita a momento  $M$ ):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (10.1)$$

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \quad (10.2)$$

Onde,

$\sigma$  - Tensão ( $\text{N/m}^2$ )

$\varepsilon$  - Deformação

$E$  - Módulo de elasticidade

$M$  - Momento fletor

$I$  - Momento de inércia da secção

$y$  - Distância à linha neutra

Para a vigas em questão, o momento de inércia é  $6,0215 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$



Método:

- 1 - Verificar que a viga e a célula de carga estão propriamente alinhadas;
- 2 - Usar a célula de carga para aplicar uma carga inicial positiva (sentido descendente) de cerca de 100N;
- 3 - Colocar a célula de carga a zero;
- 4 - Registrar as 9 medições de tensão nula e preencher a primeira coluna da Tabela 10.1 (escolhendo o número com o selecionador);
- 5 - Incrementar a carga para 100N e registrar as 9 medições;
- 6 - Repetir o passo 5 em incrementos de 100N até um total de 500N;
- 7 - Gradualmente reduzir a carga a 0;
- 8 - Corrigir as leituras da Tabela 10.1 de modo a que as com a célula de carga a zero sejam todas nulas;
- 9 - Converter a carga em momento fletor e preencher a Tabela 10.2;
- 10 - Traçar o gráfico tensão/momento fletor para os 9 medidores;
- 11 - Calcular a tensão média para os pares de medidores indicados na Tabela 10.3 e preenchê-la;
- 12 - Medir, cuidadosamente, a posição de cada medidor;
- 13 - Traçar o gráfico tensão versus posição vertical relativa dos medidores para cada valor de momento fletor;

### Fundo teórico

#### Tensão-deformação

Entende-se como tensão o valor da distribuição de forças por unidade de área em torno de um ponto (10.3). Assim, está relacionada com os esforços a que esse ponto do corpo está sujeito.

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (10.3)$$

Com,

$\sigma$  - Tensão (N/m<sup>2</sup>)

N - Força (N)

A - Área (m<sup>2</sup>)

Deformação de um corpo é qualquer alteração da sua configuração geométrica que origine uma variação da sua forma e/ou volume como efeito de uma ação externa (10.4).

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta T \quad (10.4)$$

Com,

E - Deformação

N - Força (N)

A - Área (m<sup>2</sup>)

E - Módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>)

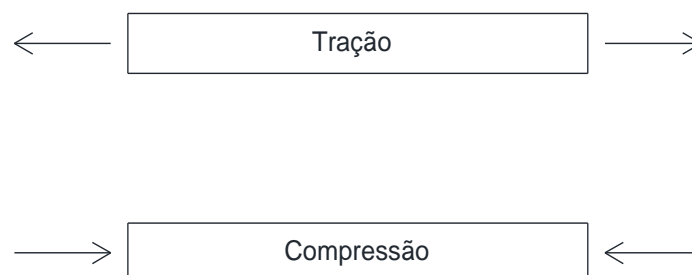
$\alpha$  - Coeficiente de dilatação térmica (K<sup>-1</sup>)

$\Delta T$  - Variação de temperatura (K)

Assim, há uma relação intrínseca entre as tensões e as deformações. Para além disso, há ainda que ter em conta as propriedades do material, pois materiais diferentes apresentam comportamentos (deformações) diferentes para as mesmas ações (tensões).

### **Tração/Compressão**

Tração e compressão são os sentidos opostos de um esforço axial (na direção do eixo da peça). Na tração a força tem sentido para o exterior do corpo, provocando o seu alongamento e na compressão tem sentido para o interior do corpo, provocando o seu encurtamento.



*Figura 3.6 - Tração e compressão num corpo*

## Flexão

Quando um corpo está submetido a flexão, na sua seção, geram-se esforços de tração e de compressão:

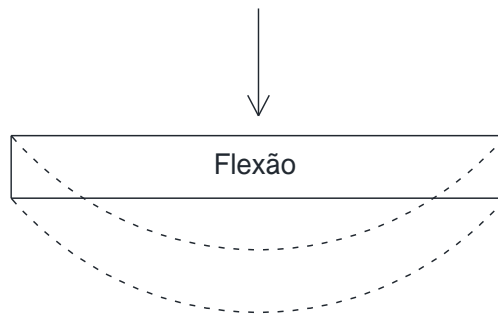


Figura 3.7 - Flexão num corpo

A secção transversal mantém-se plana e perpendicular às fibras longitudinais, isto é, as secções de extremidade têm que rodar o mesmo que as fibras, ficam inclinadas.

Assumindo uma seção retangular, o diagrama de tensões normais numa seção à flexão terá a seguinte forma:

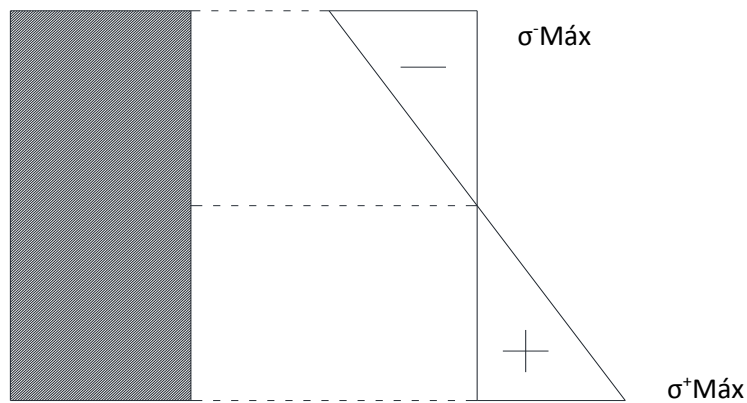


Figura 3.8- Diagrama de tensões normais na seção de um corpo sujeito à flexão

Não tendo um esforço axial aplicado no elemento, as tensões normais são calculadas com base apenas no momento que se gera na peça (10.5).

$$\sigma = \frac{M * x}{I} \quad (10.5)$$

Com,

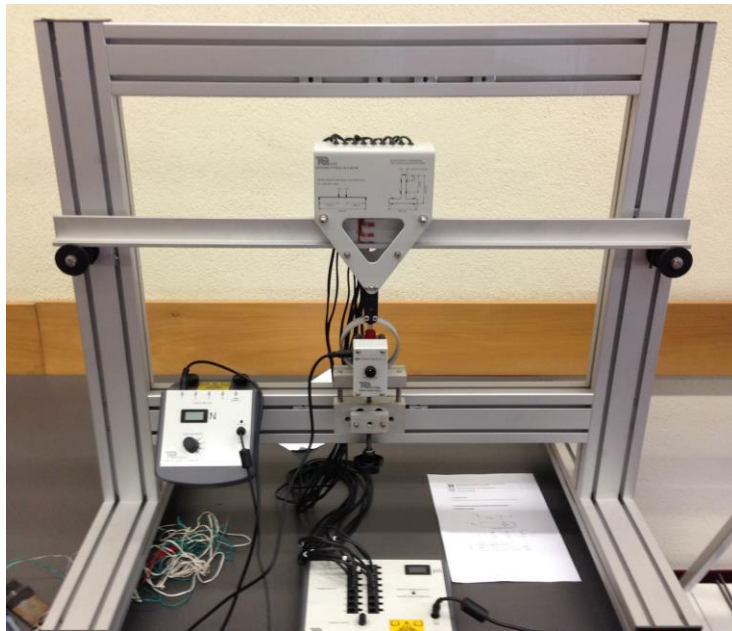
M – Momento fletor (Nm)

x - Distância da linha neutra ao ponto em questão (m)

I – Momento de inércia da seção (m<sup>4</sup>)

**Descrição do equipamento:**

Esta experiência introduz os conceitos de tração e compressão, flexão e propriedades da seção à flexão. Consiste numa viga em T invertido com indicadores de tensão fixados na secção. A célula de carga aplica um carregamento no topo da viga em dois pontos, de cada lado do indicador de tensão. Carregar a viga desta forma e não apenas num ponto tem duas grandes vantagens: permite que o medidor seja colocado no topo da viga e a flexão constante que provoca permite um melhor funcionamento do medidor, evitando ainda a concentração de tensão.



*Figura 3.9 - O equipamento STR5*

### 3.1.3 - Equipamento STR13 - Viga contínua

#### Experiência 1A - Reações de apoio numa viga simplesmente apoiada

Nesta experiência verifica-se que a equação de equilíbrio de uma viga simples e o cálculo dos momentos fletores para determinar reações numa viga.

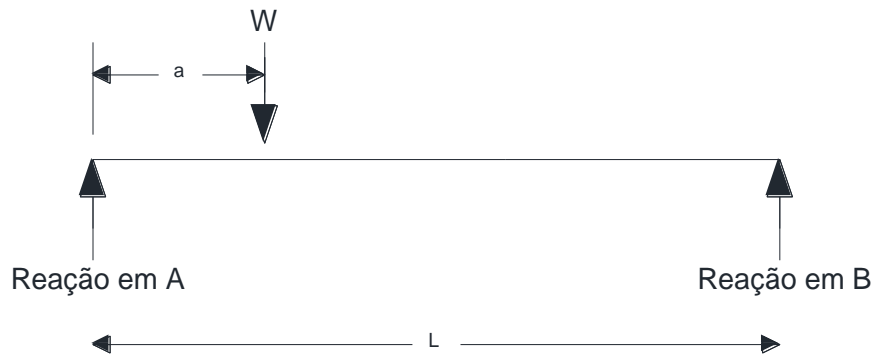


Figura 3.10 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1ª

Equação de equilíbrio:

$$R_A + R_B = W \quad (11.1)$$

Onde,

$R_A$  - Reação no apoio A

$R_B$  - Reação no apoio B

$W$  - Carga na viga

$L$  - Comprimento da viga

$a$  - Distância do ponto de aplicação da carga ao apoio da esquerda

Método:

- 1 - Colocar um dos suportes com células de carga na posição 550 mm marcada no apoio;
- 2 - Inverter o segundo suporte e coloca-lo na posição 150 mm;
- 3 - Fixar ambos os suportes com parafusos;
- 4 - Colocar a viga rígida nos apoios laminados de modo a que as pontas salientes tenham o mesmo comprimento;
- 5 - Ligar a entrada 1 do medidor de forças digitais (*Digital Force Display*) ao suporte da esquerda e a entrada 2 ao suporte da direita;
- 6 - Com a viga ainda em posição, selecionar a entrada apropriada nos medidores digitais e colocar as leituras a zero usando o painel de controlo na célula de carga relevante (a que está no suporte não invertido);
- 7 - Colocar a lâmina de carga na viga a 40 mm do suporte da esquerda e aplicar uma massa de 490g. A lâmina tem uma massa de cerca de 10g pelo que a massa total na viga será 500g;
- 8 - Preencher a Tabela 11.1 incrementando a distância entre a lâmina e o suporte;
- 9 - Preencher a Tabela 11.2 com os valores teóricos baseados no princípio do equilíbrio estático;
- 10 - Traçar um gráfico para as relações  $R_A/\text{distância}$  e  $R_B/\text{distância}$  ao longo da viga. Comentar a forma do gráfico.

### Experiência 1B - Flecha numa viga simplesmente apoiada

Nesta experiência pretende-se estabelecer uma relação entre o carregamento e a flecha numa viga e entre o comprimento e a flecha.

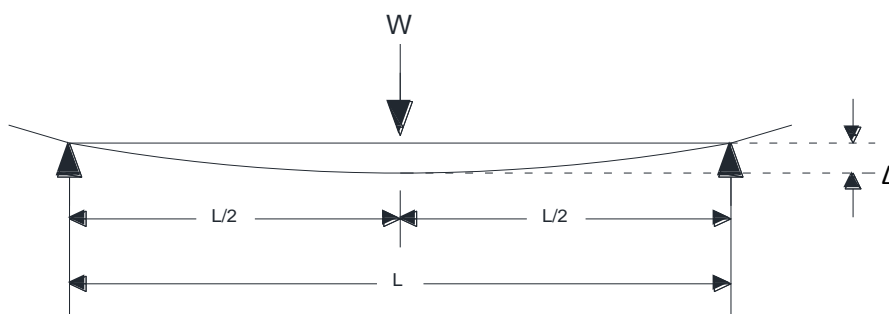


Figura 3.11 – Esquema do equipamento para a experiência 1B

Com

$$\Delta = \frac{WL^3}{48EI} \quad (11.2)$$

Onde,

$\Delta$  - Flecha

W - Carga na viga

L - Comprimento da viga

E - Módulo de elasticidade da viga

I – Momento de inércia da secção da viga

Método:

- 1 - Primeiro, colocar a viga flexível (cujo módulo de elasticidade é 69 GPa);
- 2 - Colocar o equipamento como na experiência 1 mas sem o medidor de forças digital;
- 3 - Mover os suportes de forma a que a viga tenha um comprimento de 300 mm com as pontas salientes do mesmo tamanho;
- 4 - Colocar o indicador a meio vão e fixá-lo nessa posição;
- 5 - Colocar a lâmina de carga na mesma posição do indicador e colocá-lo a zero;
- 6 - Aplicar uma massa de 100g e anotar a flecha na Tabela 11.3;
- 7 - Continuar a preencher a Tabela 11.3 incrementando 100g de cada vez;
- 8 - Remover a carga e aumentar o vão para 400mm;
- 9 - Voltar a centrar o indicador e colocá-lo a zero;
- 10 - Aplicar uma massa de 400g e anotar a flecha na Tabela 11.4;
- 11 - Repetir os passos 8 a 10 reduzindo o comprimento da viga de 50 em 50mm até um mínimo de 200mm.

Traçar os gráficos carregamento/flecha e  $L^3$ /flecha.

## Experiência 2 - Reações numa viga encastrada-apoiada e bi-encastrada

Nesta experiência vamos usar duas vigas com condições de apoio ligeiramente diferentes, a viga encastrada-apoiada e a viga bi-encastrada, e determinar as suas reações.

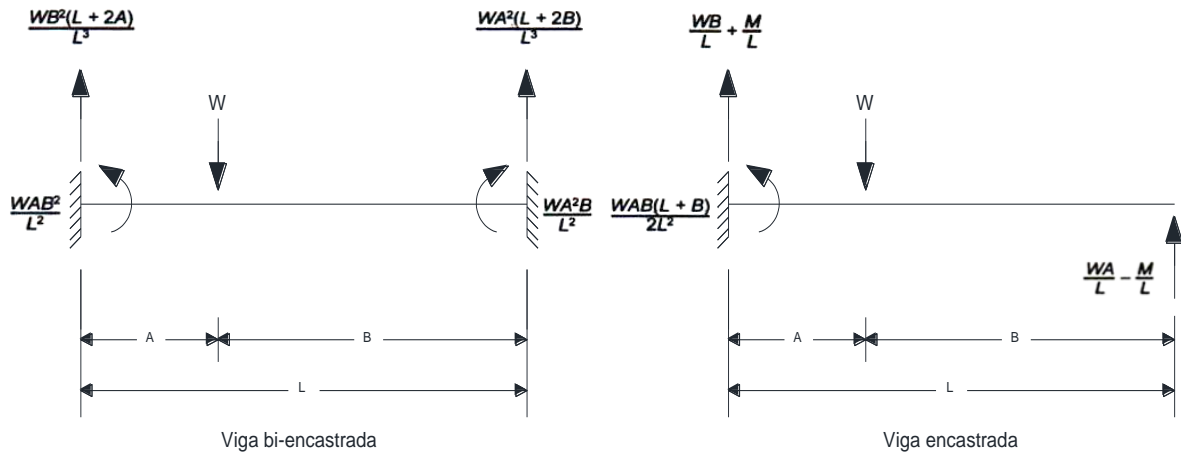


Figura 3.12 – Esquema do equipamento para a experiência 2 com as duas configurações da viga

### Método:

- 1 - Colocar o suporte com a célula na posição dos 400 mm e fixá-la com os parafusos;
- 2 - Retirar a placa de fixação superior da célula;
- 3 - Fixar a viga flexível no mandril de momento do quadro;
- 4 - Libertar o parafuso do braço de momento para permitir que a viga apoie totalmente na célula;
- 5 - Repor a placa de fixação da célula de forma a que a viga fique uniformemente apoiada;
- 6 - Apertar o mandril e o parafuso do braço de momento;
- 7 - Ligar o braço de momento à entrada 1 a célula de carga à entrada 2 do medidor digital;
- 8 - Selecionar cada leitura à vez e colocar todas a zero com o botão 'Set Zero';

Desta forma o equipamento está agora montado como uma viga bi-encastrada. No apoio da esquerda podemos ler a reação de momento e no da direita podemos ler a reação vertical.

9 - Aplicar uma massa de 500g na viga a 40 mm do apoio da esquerda e anotar os valores para ambas as reações na Tabela 11.5;

10 - Preencher a Tabela 11.5 repetindo o passo anterior para incrementos de 40 mm na posição do carregamento ao longo da viga. (Calcular  $M_A$  com base no valor lido e no comprimento do braço de momento que pode ser lido no quadro do equipamento)



De forma a que o equipamento se comporte como uma viga encastrada-apoiada:

- 11 - Desapertar os parafusos da placa de fixação do braço de momento e os do suporte com a célula;
- 12 - Retirar ambas as placas de fixação do suporte de forma a expor lâmina;
- 13 - Colocar a zero o braço de momento e a célula usando o botão 'Set Zero';
- 14 - Repetir os passos 9 e 10 e preencher a Tabela 11.6.

### Experiência 3 - Reações numa viga contínua

Nesta última experiência vamos investigar as reações numa viga de dois tramos. O equilíbrio é definido pelas seguintes equações:

$$m = \frac{1}{2(x+y)} * \left( \frac{W_1 x_1 x_2}{x} * (x + x_1) + \frac{W_2 y_1 y_2}{y} * (y + y_2) \right) \quad (11.3)$$

$$R_A = \frac{W_1 x_2 - m}{x} \quad (11.4)$$

$$R_B = \frac{W_1 x_1 + m}{x} + \frac{W_2 y_2 + m}{y} \quad (11.5)$$

$$R_C = \frac{W_2 y_1 - m}{y} \quad (11.6)$$

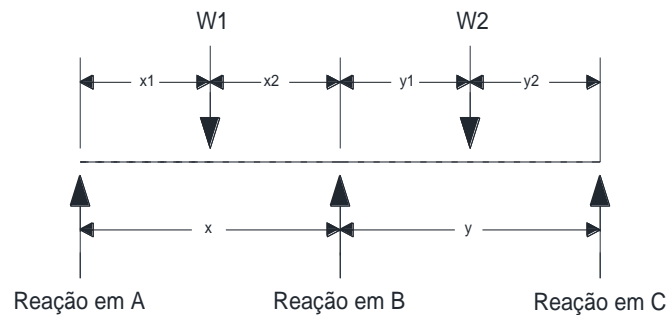


Figura 3.13 – Esquema de uma viga de dois tramos

Método:

- 1 - Colocar suportes com células de carga nas posições 200 mm, 350 mm e 500 mm. No centro utilizar um suporte rijo e que permita assentamento;
- 2 - Fixar os suportes com parafusos apenas à frente;
- 3 - Ligar a célula da esquerda na entrada 1 do medidor digital, a do meio na entrada 2 e a da direita na entrada 3;
- 4 - Colocar a viga ao longo dos três suportes confirmando que está em contacto com as 3 lâminas. Se não estiver, ajustar a altura de uma das lâminas;
- 5 - Selecionar cada leitura à vez e colocar todas a zero com o botão 'Set Zero';
- 6 - Aplicar várias massas em quaisquer pontos da viga (ou seja, variar  $W_1, W_2, x_1, x_2, y_1$  e  $y_2$ ). Anotar as reações  $R_A, R_B$  e  $R_C$ ;
- 7 - Usando as equações dadas, calcular os valores teóricos de  $R_A, R_B$  e  $R_C$ ;
- 8 - Comparar resultados e refazer a experiência para outros carregamentos.

## Fundo Teórico

### Equilíbrio de uma estrutura e reações

Uma estrutura, quando submetida a um carregamento, vai gerar reações nos seus apoios de modo a que esta fique em equilíbrio. Assim, há dois princípios que têm que ser satisfeitos: a resultante de todas as forças tem de ser nula (11.7) e o momento fletor provocado por todas as forças é nulo em qualquer ponto (11.8). Num sistema tridimensional, esses princípios podem ser matematicamente escritos da seguinte forma:

$$\sum P_x = \sum P_y = \sum P_z = 0 \quad (11.7)$$

$$\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0 \quad (11.8)$$

E caso as forças atuem apenas num único plano (bidimensional):

$$\sum P_x = \sum P_y = 0 \quad (11.9)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (11.10)$$

É com base nestas equações que são calculadas as reações de uma estrutura. Se esta for isostática, resume-se a um problema de  $x$  equações a  $x$  incógnitas e portanto possível e determinado, com apenas uma solução. No caso de estruturas hiperestáticas, terão de se usar outros métodos, como o Método dos Deslocamentos ou o Método das Forças, de modo a resolver o sistema, visto que será um sistema possível indeterminado.

### Flecha e deformada de uma viga

Entende-se como flecha a deformação que surge na barra quando esta está submetida a flexão pura. É, portanto, o deslocamento que a barra sofre. Este atinge o máximo em diferentes pontos da barra, dependendo do carregamento e das condições de fronteira.

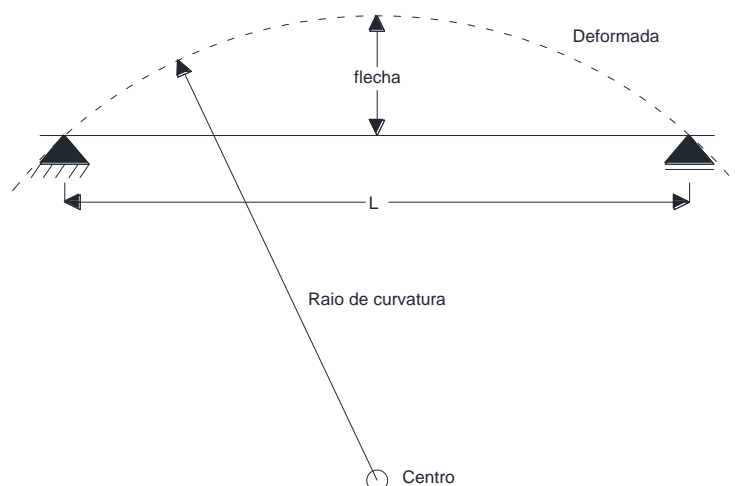


Figura 3.14 - Flecha de uma viga e respetivo raio de curvatura

O centro refere-se à circunferência onde o arco desenhado pela deformada pertence.

A flecha pode ser calculada resolvendo a seguinte equação em ordem a  $f$ :

$$R = \frac{L^2 + 4 * f^2}{8 * f} \quad (11.11)$$

Onde,

R - Raio de curvatura

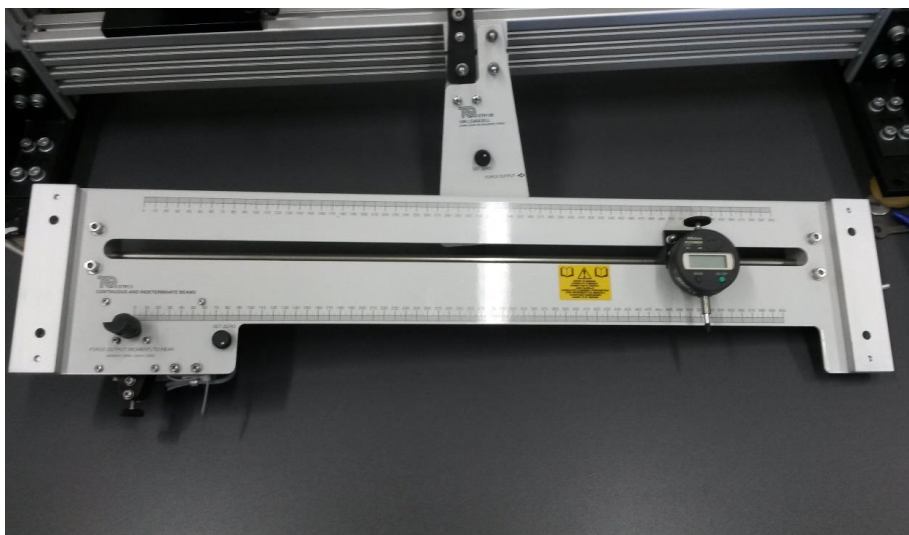
L - Comprimento da viga

f - Flecha

Esta expressão assume que estamos presente flexão circular, que nem sempre será o caso, pelo que os valores obtidos nem sempre serão os reais.

#### **Descrição do equipamento:**

Este equipamento é uma peça bastante versátil que permite aos estudantes confirmar o equilíbrio estático, propriedades das vigas e a relação entre estas e o seu comprimento e flecha. Consiste num sistema de apoio com um indicador para medir deslocamentos, e um mecanismo que mede os momentos fletores de fixação nos extremos da viga. Três suportes com células de carga (*load cells*) medem as reações verticais na viga e pode-se variar a altura de duas delas de modo a permitir apoios em que se possam simular assentamentos. O terceiro suporte possui uma altura fixa e até mesmo um gancho que simula a condição de viga encastrada. Este equipamento inclui ainda duas vigas diferentes, uma grossa e “rígida” e uma fina e “flexível”.



*Figura 3.15 - O equipamento STR13 (sem suporte)*

### 3.1.4 - Equipamento STR4 - Determinação de deslocamentos em vigas

#### Experiência 1 - Flecha de uma viga encastrada

Nesta experiência, mede-se o desvio duma viga encastrada submetida a uma carga pontual que vai aumentando gradualmente. O teste é repetido para três materiais diferentes, permitindo a comparação entre a flecha de cada viga e o módulo de elasticidade do seu material.

Para esta experiência será necessária a seguinte expressão para o cálculo da flecha (cuja obtenção se pode encontrar no anexo):

$$\delta = \frac{WL^3}{3EI} \quad (12.1)$$

Onde,

$\delta$  - Flecha (m)

W - Carga (N)

L - Distância do apoio ao ponto de aplicação da carga (m);

E - Módulo de elasticidade do material (N/m<sup>2</sup>)

I – Momento de inércia da secção da viga (m<sup>4</sup>)

Para as vigas em questão, o momento de inércia é  $4,45 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$

Método:

- 1 - Verificar que nenhuma braçadeira ou apoio laminar está montado no sistema de apoio;
- 2 - Colocar a viga como mostra na Figura 3.16;

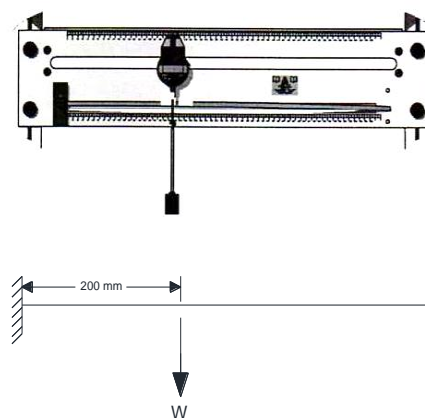


Figura 3.16 - Esquema do equipamento para a experiência 1 adaptado de [45]

- 3 - Deslizar o indicador digital para a posição a 200mm do encastramento (visível também na Figura 3.16);
- 4 - Colocar o suporte laminar para a aplicação da carga sob o indicador digital;
- 5 - Colocar o indicador digital a zero usando o botão 'origin';
- 6 - Adicionar massa ao suporte laminar em incrementos como os da Tabela 12.1;
- 7 - Registrar os valores que aparecem no indicador para cada incremento;
- 8 - Repetir o processo para os outros dois materiais, preenchendo as Tabelas 12.2 e 12.3;
- 9 - Traçar dois gráficos para cada material, um para os resultados práticos e um para os teóricos.

Sugestão: Antes de colocar o indicador digital a zero e entre cada incremento de carga, dar um toque leve no quadro de suporte da experiência.

### **Experiência 2 - Flecha de uma viga simplesmente apoiada**

Na primeira parte desta experiência, mede-se a flecha duma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga pontual que vai aumentando gradualmente. Na segunda parte, iremos variar o comprimento da viga mudando a distância entre os apoios. Assim, poderemos determinar a relação entre a flecha e o comprimento da viga.

Para esta experiência será necessária a seguinte expressão:

$$\delta = \frac{WL^3}{48EI} \quad (12.2)$$

Onde,

$\delta$  – Flecha (m)

W - Carga (N)

L - Distância entre os dois apoios (m);

E - Módulo de elasticidade do material (N/m<sup>2</sup>)

I – Momento de inércia da secção da viga (m<sup>4</sup>)

### Parte 1

Nesta primeira parte a distância entre os apoios será sempre a mesma, incrementando-se, gradualmente, o carregamento.

Método:

1 - Verificar que nenhuma braçadeira está montada no sistema de apoio e montar a viga como indicada na Figura 3.17 (com uma distância de 400 mm entre os apoios);

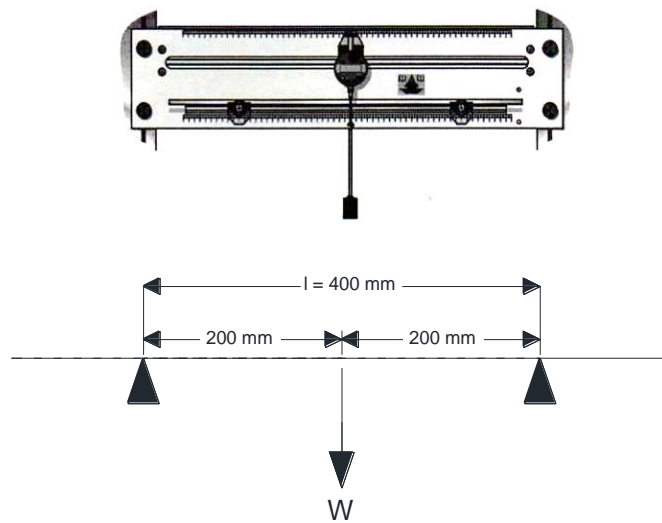


Figura 3.17 - Esquema do equipamento para a parte 1 da experiência 2 adaptado de [45]

- 2 - Deslizar o indicador digital para a posição a 200mm de cada apoio (meio vão da viga);
- 3 - Colocar o suporte laminar para a aplicação da carga sob o indicador digital;
- 4 - Colocar o indicador digital a zero usando o botão 'origin';
- 5 - Adicionar massa ao suporte laminar em incrementos como os da Tabela 12.4;
- 6 - Registrar os valores que aparecem no indicador para cada incremento;

## Parte 2

Nesta parte, o carregamento será sempre o mesmo, variando-se a distância entre os apoios.

1 - Montar a viga como indicada na Figura 3.18 (com uma distância de 200 mm entre os apoios) e confirmar que o indicador digital ainda se encontra a meio vão;

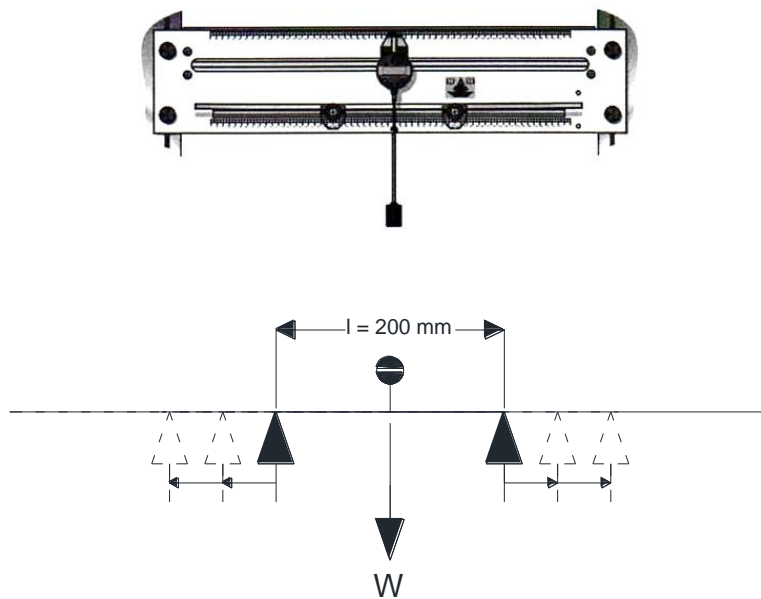


Figura 3.18- Esquema do equipamento para a parte 2 da experiência 2 adaptado de [45]

2 - Colocar o indicador digital a zero usando o botão 'origin';

3 - Aplicar uma carga de 500 g ao suporte laminar e registar o valor do desvio na Tabela 12.5;

4 - Incrementar a distância entre os apoios (de acordo com os valores da Tabela 12.5 e continuar a registar o valor dos desvios).

Finalmente, traçar os gráficos com os dados obtidos e determinar a relação entre a flecha e o comprimento da viga.

Sugestão: Antes de colocar o indicador digital a zero e entre cada incremento de carga, dar um toque leve no quadro de suporte da experiência.



### Experiência 3 - A deformada

Nesta experiência, mede-se o deslocamento transversal da viga em vários pontos ao longo do seu comprimento quando esta está submetida a uma carga a meio vão.

Método:

1 - Verificar que nenhuma braçadeira está montada no sistema de apoio e montar a viga como indicada na Figura 3.19 (com uma distância de 600 mm entre os apoios);

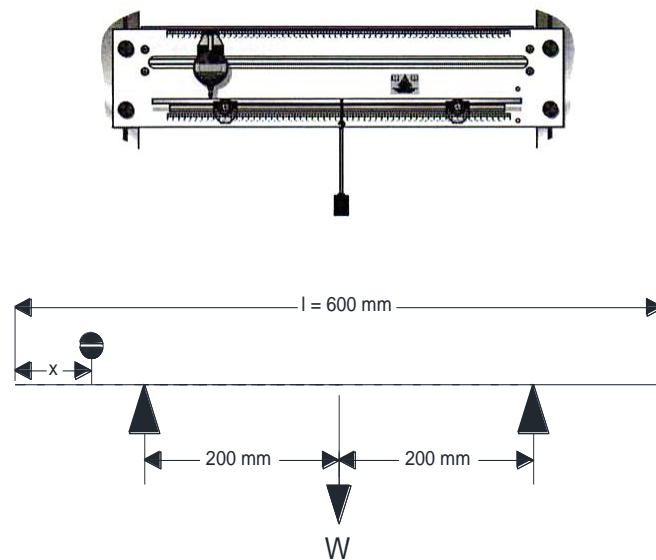


Figura 3.19 - Esquema do equipamento para a experiência 3 adaptado de [45]

2 - Deslizar o indicador digital para a posição zero da viga e, usando o botão '+-', definir que movimentos para baixo sejam lidos como negativos (NÃO fixar o indicador);

3 - Colocar o suporte laminar para a aplicação da carga a meio vão da viga;

4 - Colocar o indicador digital a zero usando o botão 'origin';

5 - Deslizar o indicador ao longo da viga para as posições indicadas na Tabela 12.6 e registar a leitura para cada ponto (o *stylus* do indicador deve passar pela abertura do suporte laminar);

6 - Aplicar uma massa de 500g no suporte e recolocar o indicador na posição 0;

7 - Repetir o passo 5 para a viga agora carregada;

8 - Traçar o gráfico flecha/posição ao longo da viga

Sugestão: Antes de colocar o indicador digital a zero e entre cada medição, dar um toque leve no quadro de suporte da experiência.

#### Experiência 4 - Flexão circular

Nesta experiência, vamos aplicar cargas nos extremos duma viga simplesmente apoiada de forma a introduzir momento fletor na viga e, portanto, produzir flexão circular. Para além de ser útil para estabelecer uma relação importante, esta experiência é um método preciso para calcular o módulo de elasticidade.

Para esta experiência serão necessárias as seguintes expressões:

Ora sabendo que a curvatura é (ver fundo teórico):

$$\chi = \frac{1}{R} \quad (12.3)$$

E que

$$M = EI * \frac{1}{R} \quad (12.4)$$

Então, relacionando as duas expressões anteriores obtém-se

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \quad (12.5)$$

$$R = \frac{C^2 + 4 * h^2}{8 * h} \quad (12.6)$$

Onde,

M – Momento fletor aplicado (Nm)

R - Raio de curvatura (m)

E - Módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>)

I – Momento de inércia da secção da viga (m<sup>4</sup>)

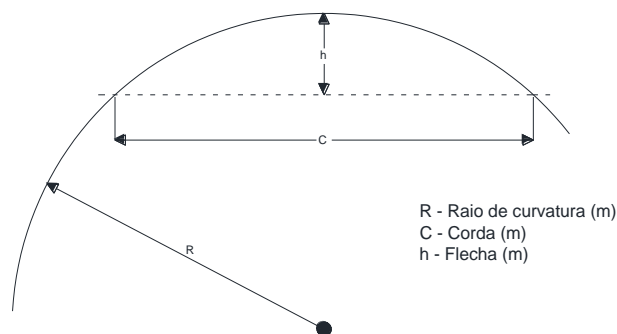


Figura 3.20 - Raio de curvatura, flecha e corda

Método:

- 1 - Verificar que nenhuma braçadeira está montada no sistema de apoio e montar a viga como indicada na Figura 3.21 (com uma distância de 400 mm entre os apoios);
- 2 - Deslizar o indicador digital para a posição a 200mm de cada apoio (meio vão da viga);
- 3 - Colocar um suporte laminar para a aplicação da carga em cada extremo da viga, a 100 mm de cada apoio, como na Figura 3.21;

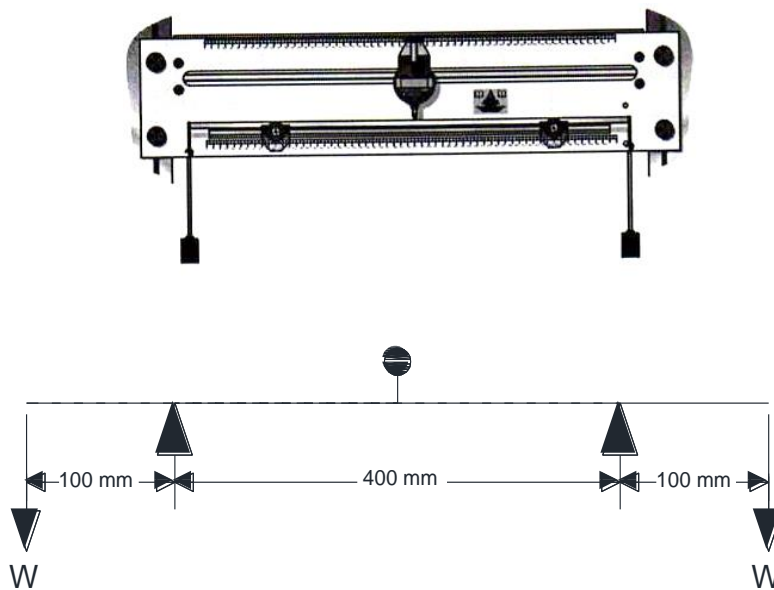


Figura 3.21 - Esquema do equipamento para a experiência 4 adaptado de [45]

- 4 - Colocar o indicador digital a zero usando o botão 'origin';
- 5 - Adicionar carga aos suportes em incrementos como descrito na Tabela 12.7;
- 6 - Registrar os valores que aparecem no indicador para cada incremento;
- 7 - Repetir o processo para os outros dois materiais, preenchendo as Tabelas 12.8 e 12.9;
- 8 - Traçar um gráfico  $M/I$  versus  $1/R$  para cada material e calcular o gradiente desse gráfico (módulo de elasticidade).

### Fundo teórico

Na flexão pura, existe uma relação entre a curvatura de uma viga e o momento fletor (12.7), já mencionada anteriormente:

$$\chi = \frac{M}{EI} \quad (12.7)$$

E sabe-se q a curvatura é o inverso do raio de curvatura (12.8)

$$\chi = \frac{1}{R} \quad (12.8)$$

Há portanto uma relação linear entre a curvatura e o momento fletor. Quando o momento fletor é máximo, a curvatura atinge também o seu máximo e quando o momento fletor é nulo, a curvatura também é.

Entende-se como flecha a deformação que surge na barra quando esta está submetida a flexão pura. É, portanto, o deslocamento que a barra sofre. Este atinge pode atingir o máximo em diferentes pontos da barra, dependendo do carregamento e das condições de fronteira.

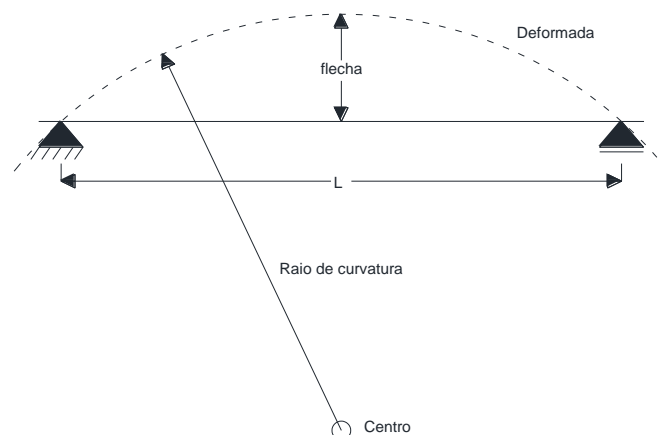


Figura 3.22- Raio de curvatura, flecha e deformada duma viga simplesmente apoiada sujeita à flexão

O centro refere-se à circunferência onde o arco desenhado pela deformada pertence.

A deformação da viga pode ser caracterizada através da equação da linha elástica (12.9), necessária para determinar a deformação máxima (flecha máxima) e a rotação:

$$\chi \approx \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (12.9)$$

Esta equação, em função do carregamento e das condições de apoio de cada viga, quando integrada e resolvida em ordem à deformação,  $y$ , fornece-nos o seu valor para qualquer ponto ao longo da viga,  $x$ .

**Descrição do equipamento:**

Este equipamento permite visualizar e demonstrar os conceitos básicos de flechas em vigas e a influência das condições de apoio, das propriedades das secções do módulo de elasticidade. Consiste num sistema de apoio com um indicador digital. Este indicador está encaixado numa ranhura que lhe permite deslizar para qualquer posição ao longo da viga em estudo. Duas braçadeiras rígidas pertencentes ao sistema de apoio permitem colocar a viga em qualquer posição. Dois apoios laminares também podem ser colocados em quaisquer pontos ao longo da viga. O sistema de apoio possui uma graduação que permite um rápido e preciso posicionamento de todas as restantes peças do equipamento. Um paquímetro simples permite medir a largura e a espessura da viga.



*Figura 3.23 - O equipamento STR4 (sem suporte)*

### 3.1.5 - Equipamento STR18 - Flecha e reações dum pórtico

#### Experiência 1 - Análise dum pórtico sem deslocamento horizontal ao nível do montante

Nesta experiência aplicaremos uma carga vertical crescente a meio vão do montante a fim de investigar como essa carga afetará as reações horizontais e momentos fletores nos apoios.

Nota: O momento de inércia da secção do pórtico é  $8,57 \cdot 10^{-12} \text{m}^4$

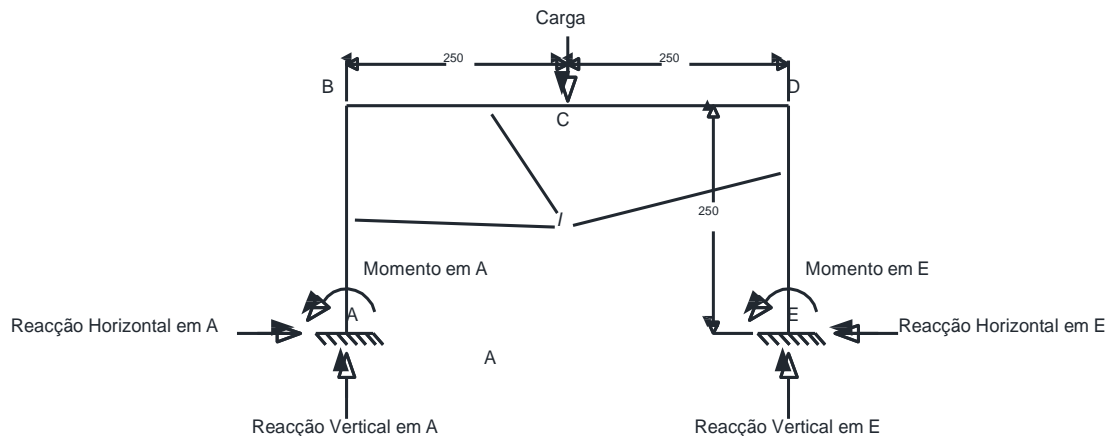


Figura 3.24 - Esquema e sistema de forças do equipamento para a experiência 1

Método:

- 1 - Colocar o suporte laminar a meio vão do montante;
- 2 - Verificar que a leitura da reacção horizontal no apoio é zero;
- 3 - Adicionar uma carga de 100g;
- 4 - Registar as reacções resultantes na Tabela 13.1;
- 5 - Repetir o processo para incrementos de 100g até um total de 500g;
- 6 - Completar a Tabela 13.1 calculando o momento fletor multiplicando a sua força pelo comprimento do "braço", 0,05 m;
- 7 - Traçar os gráficos momento fletor/carga e reacção horizontal/carga
- 8 - Esboçar a deformada da estrutura;
- 9 - Usar o equilíbrio estático e a simetria da estrutura para calcular as reacções verticais nos apoios e as restantes reacções.
- 10 - Traçar os diagramas de esforços da estrutura.

## Experiência 2 - Análise dum pórtico com deslocamento horizontal ao nível do montante

Na experiência anterior a carga era sempre aplicada a meio vão do montante, o que fazia com que não houvesse deslocamento horizontal ao nível do montante. Nesta segunda experiência, vai ser analisada a relação entre esse deslocamento e a assimetria da carga no pórtico.

### Parte A

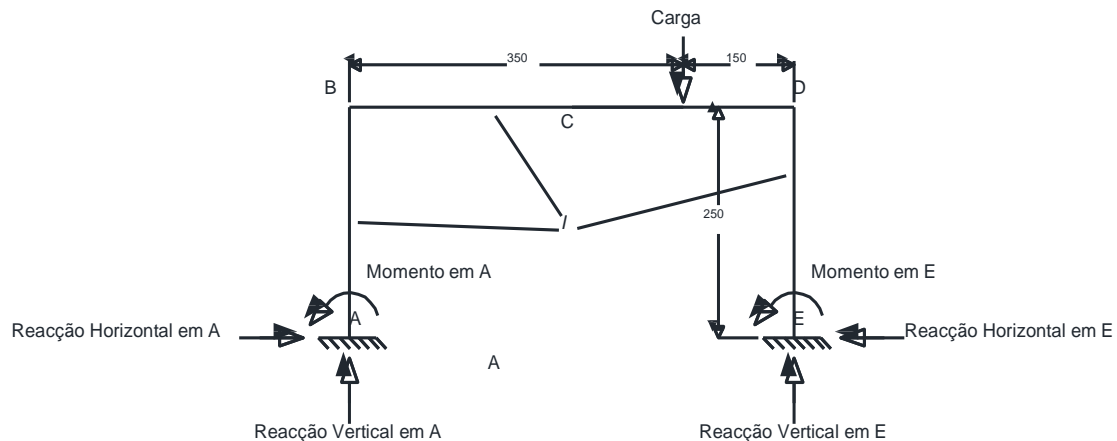


Figura 3.25- Esquema e sistema de forças do equipamento para a parte A da experiência 2

### Método:

- 1 - Colocar o suporte laminar como indicado na Figura 3.25 (a 150 mm do apoio da direita);
- 2 - Verificar que a leitura da reacção horizontal no apoio é zero;
- 3 - Adicionar uma carga de 100g;
- 4 - Registrar as reacções resultantes na Tabela 13.2 e o deslocamento horizontal ao nível da travessa do pórtico na Tabela 13.3;
- 5 - Repetir o processo para incrementos de 100g até um total de 500g;
- 6 - O equipamento só permite a leitura do momento fletor num dos apoios e a reacção horizontal no outro e, ao contrário da experiência anterior, não podemos fazer uso da simetria da estrutura, pelo que o caminho a tomar será colocar a carga na posição simétrica à inicial, fazer a leitura e inverter o sinal;
- 7 - Completar a Tabela 13.2 calculando o momento fletor multiplicando a sua força pelo comprimento do "braço", 0,05 m;
- 8 - Traçar os gráficos para cada uma das reacções medidas versus a carga aplicada;
- 9 - Traçar os diagramas de esforço da estrutura.

## Parte B

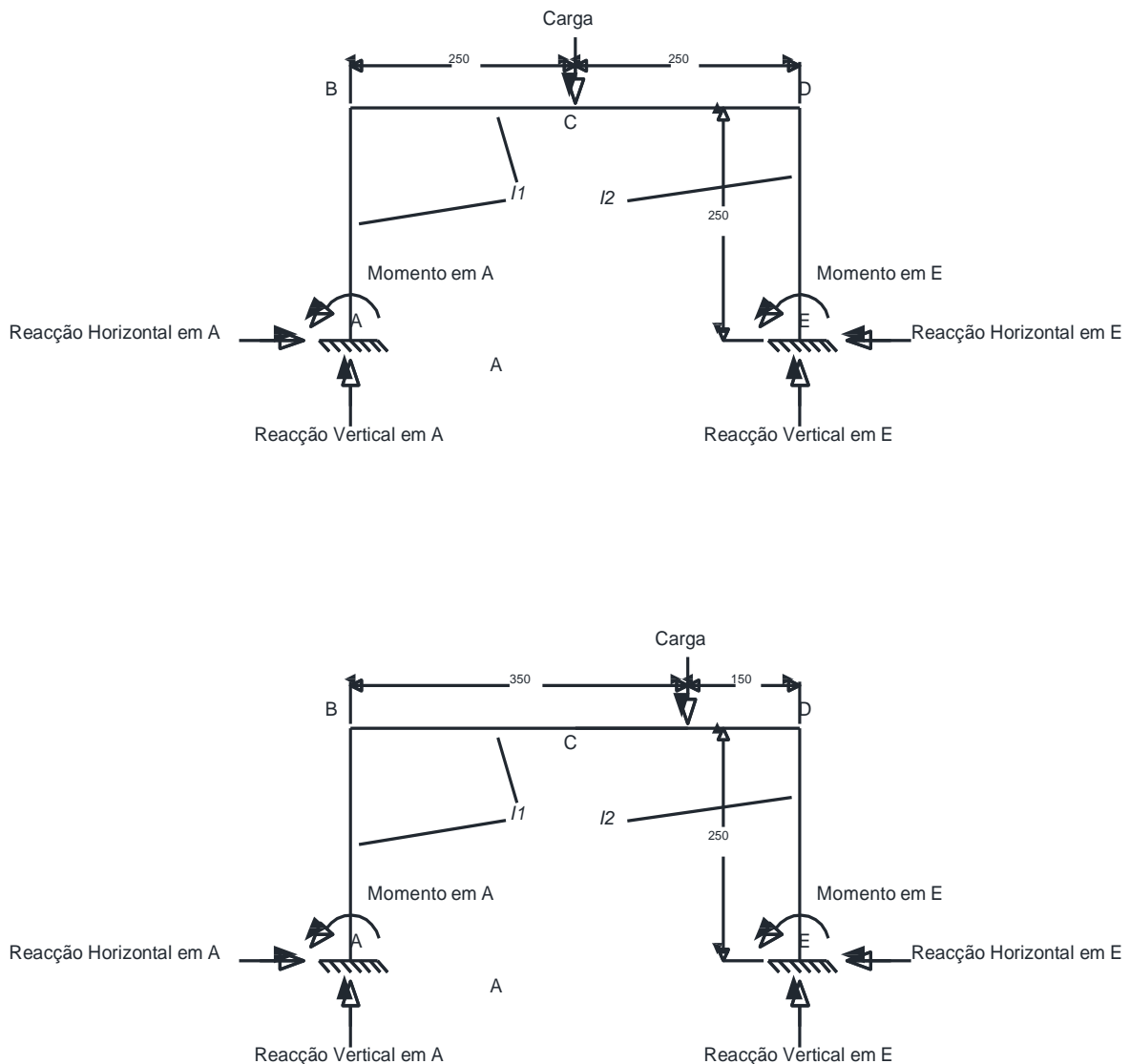


Figura 3.26- Esquemas e sistemas de forças do equipamento para a parte B da experiência 2

Método:

- 1 - Retirar a carga da estrutura e colocar o indicador digital em posição;
- 2 - Retirar o pórtico uniforme e instalar o pórtico não uniforme (o montante com momento de inércia diferente deve ser colocado do lado direito);
- 3 - Repetir os testes feitos anteriormente tanto para a carga central como para a excêntrica (visto que a linearidade das reações em função da carga já foi definida, este passo só necessita ser feito para a carga final, 500g);
- 4 - Preencher as Tabelas 13.4 e 13.5 para cada um dos casos.



**Descrição do equipamento:**

Este equipamento tem como fim o estudo da flecha e reações num pórtico retangular. Consiste num conjunto de dois suportes onde um pórtico, uniforme ou não, de alumínio se apoia. O apoio esquerdo do pórtico está preso ao suporte e está impedido de rodar por um "braço" de momento. Este "braço" está em contacto com uma célula de carga (*load cell*) que controla o momento fletor (que restringe a rotação, reação). O apoio direito do pórtico está apoiado num mecanismo que não permite rotação mas permite o deslocamento horizontal na direção de uma segunda célula de carga. Esta célula reage e mede então a reação horizontal produzida pelo pórtico. Um indicador digital posicionado no canto superior do pórtico mede o deslocamento horizontal ao nível do montante. Uma lâmina de carga serve de suporte para massas de modo a aplicar cargas verticais na estrutura.

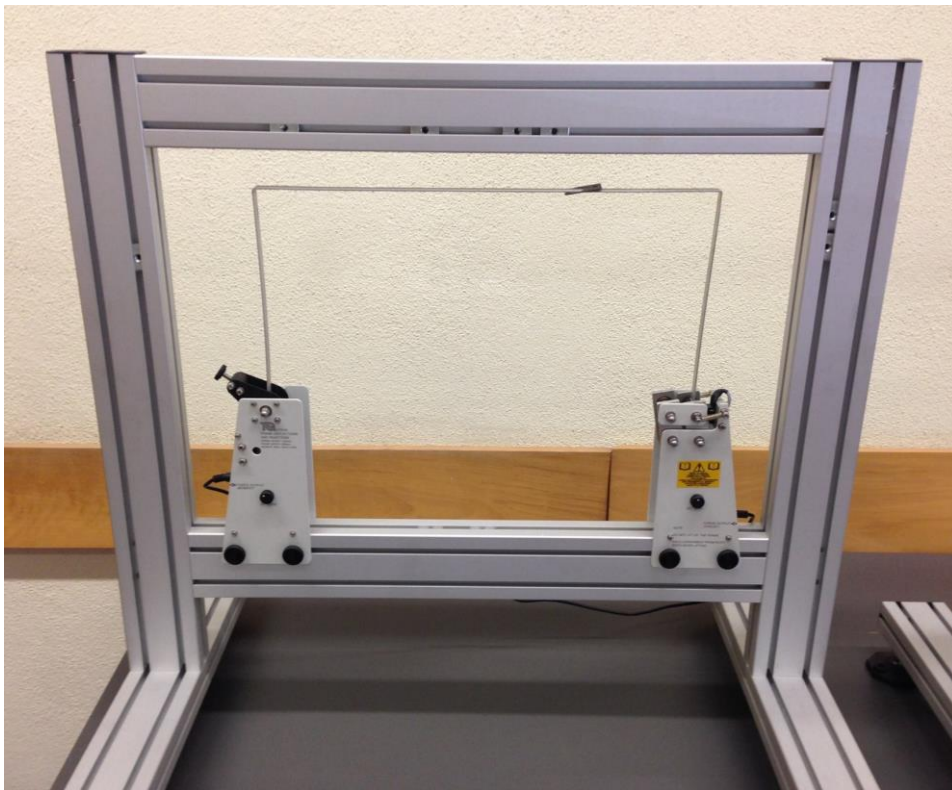


Figura 3.27 - O equipamento STR18

## 3.2 - Análise e Dimensionamento de Estruturas

As Unidades Curriculares finais da fileira de Mecânica Estrutural e Estruturas têm todas como fim o dimensionamento de estruturas, quer estas sejam de betão, aço ou outro material. Para isso é necessário ter em conta os conceitos aprendidos nas Unidades Curriculares anteriores, que nos permitiam calcular esforços e deslocamentos em qualquer elemento e tensões e deformações em qualquer ponto da sua secção. Por exemplo, no que toca a estruturas metálicas ou mistas, as ligações entre os vários elementos duma estrutura são feitas através de parafusos e/ou soldaduras, pelo que é necessário saber analisar os esforços que aí se geram, pois estes novos elementos, de menores dimensões, também vão estar sujeitos a esforços que podem levar à sua rotura.

Além disso, inicialmente, estudou-se estruturas formadas por barras, elementos unidimensionais, em que uma das dimensões, o comprimento, é muito maior que as outras duas dimensões. Na Análise de Estruturas aborda-se pela primeira vez as lajes, elementos estruturais bidimensionais, em que há duas dimensões relevantes sendo a espessura é muito menor que as outras duas dimensões. Por vezes, ao dimensionarmos uma laje, esta pode ser estudada como sendo uma grelha (isto é, uma estrutura plana composta por elementos unidimensionais e sujeita a cargas fora do plano), mas esse nem sempre é o caso e há que ter a noção de como os esforços se distribuem neste tipo de elementos.

Ainda na Análise de Estruturas, estudam-se dois novos métodos para resolver estruturas hiperestáticas de grau superior a um, o Método das Forças e o Método dos Deslocamentos. Na unidade curricular de Dimensionamento de Estruturas é estudado um método mais simples e rápido, o Método de Cross, que se baseia numa relaxação do sistema estrutural, com redistribuição de esforços com base em coeficientes de transmissão de momentos que dependem da rigidez dos elementos. Este método pode ser demonstrado duma forma bastante simples. Tome-se o exemplo da viga encastrada-apoiada da Figura 4.1:



*Figura 4.1 - Viga encastrada-apoiada com momento fletor aplicado no apoio simples*

Se se aplicar um momento fletor no apoio fixo, surgirá uma rotação nesse apoio, e parte desse momento fletor será transmitido ao encastramento. O mesmo aconteceria numa barra bi-encastrada, mas para o mesmo momento fletor aplicado, o transmitido ao outro apoio seria diferente pois a rigidez da barra é também diferente. Este conceito é abordado, mais à frente, numa das experiências deste capítulo.

Um conceito bastante útil para o dimensionamento de estruturas é o da identificação das linha de influência de esforços e/ou deslocamentos. Este surge do Princípio de Muller-Breslau, que afirma que “quando é permitido a uma força causar um deslocamento livre numa estrutura, na sua linha de ação, a deformada da estrutura é a linha de influência dessa mesma força, à escala do deslocamento.”. Este princípio pode ser explicado duma forma bastante simples através do seguinte exemplo:

Linha de influência do esforço transversal a meio vão

Estrutura (Figura 4.2):

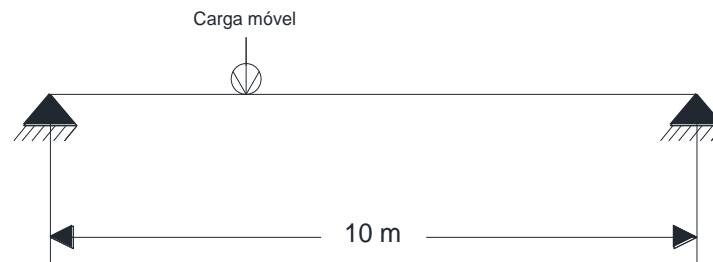


Figura 4.2 - Viga simplesmente apoiada com carga móvel

Linha de influência é um gráfico onde as abcissas representam a posição da carga ao longo da estrutura e as ordenadas o valor da função de influência. Define-se como função de influência de um determinado efeito, o valor desse efeito (esforço, deslocamento ou reação) em função da posição de uma carga móvel unitária.

Assim, obtém-se a seguinte Linha de Influência para o esforço transversal a meio vão da estrutura anterior (Figura 4.3):

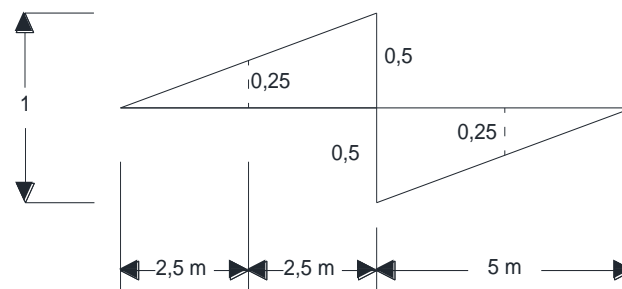


Figura 4.3 - Linha de influência do esforço transversal a meio vão para uma viga simplesmente apoiada

Como se pode ver, o deslocamento total a meio vão é 1, tendo metade desse valor num sentido e metade no outro (0,5). A um quarto de vão, o deslocamento é metade do deslocamento parcial a meio vão, 0,25, havendo proporcionalidade direta entre estes valores. O valor do deslocamento no ponto em questão é unitário pois este teorema faz uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Agora, é possível ler a linha de influência. Visto que esta foi feita para o esforço transversal a meio vão, então todos os valores da deformada dizem respeito ao esforço transversal nessa secção do meio vão, tomando valores diferentes em função do local de aplicação da carga móvel. Ou seja, se a carga estiver aplicada a meio vão, o esforço transversal nesse ponto será igual a metade da carga (0.5). Por outro lado, se estiver aplicada a um quarto de vão, o esforço transversal a meio vão será um quarto da carga (0.25).

É ainda de elevada importância referir que neste exemplo se falou de cargas pontuais. Se quisermos saber o valor do esforço transversal a meio vão para uma carga distribuída bastaria calcular a área sob a linha de influência correspondente à parcela ocupada pela carga distribuída. Por exemplo, para uma carga distribuída uniforme na primeira metade da viga, o valor do esforço transversal seria

$$A_{triângulo} * q = \frac{5 * 0,5}{2} * q = 1,25q$$

Onde 5 é metade do tamanho total da viga (base do triângulo), 0.5 é o valor do deslocamento (altura do triângulo) e “q” o valor da carga distribuída uniforme.

De referir que no caso das estruturas hiperestáticas, quando se insere a libertação a estrutura não formará um mecanismo (a não ser que seja um mecanismo parcial), pelo que o deslocamento imposto implicará a deformação/encurvatura das próprias barras da estrutura.

### 3.2.1 - Equipamento HDM2 - Momento fletor quando ocorre assentamento dum apoio

#### Experiência - Momento fletor quando há assentamento dum apoio

Esta experiência tem como objetivo demonstrar o momento fletor que se cria quando há um assentamento de apoio.

A base deve estar montada com um suporte A e um suporte C.

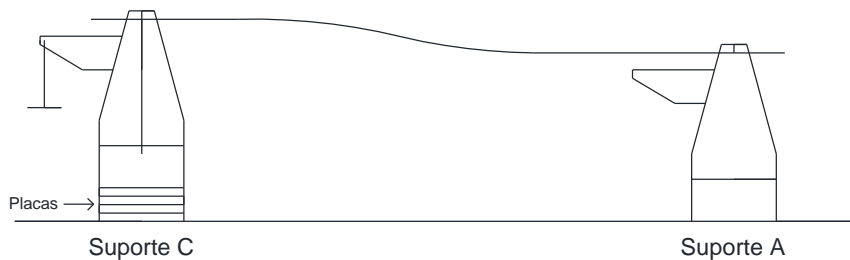


Figura 4.4 - Esquema do equipamento para a experiência

#### Método

- 1 - Colocar um gancho de carga no braço de momento e colocar a cavilha no apoio da direita de modo a impedir a rotação. Colocar o indicador de rotações a zero;
- 2 - Afrouxar as porcas do suporte da esquerda e inserir uma das placas de plástico. Apertar as porcas. Assim, o apoio foi elevado 10 mm;
- 3 - Adicionar carga ao gancho de modo a que o indicador de rotações volte a zero (serão necessários cerca de 3,2 N);
- 4 - Repetir os passos 2 e 3 até ter inserido as 4 placas;
- 5 - Retirar a cavilha do apoio da direita e reparar que a carga necessária para que o indicador de rotações volte a zero é metade da que era anteriormente.

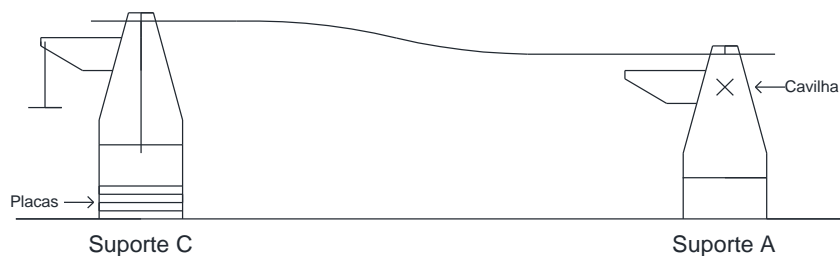


Figura 4.5 - Esquema do equipamento com a cavilha inserida

### Fundo teórico

O momento fletor de apoio que se gera quando uma barra bi-encastrada sofre um assentamento no valor de  $\Delta$  é (valor tabelado):

$$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (14.1)$$

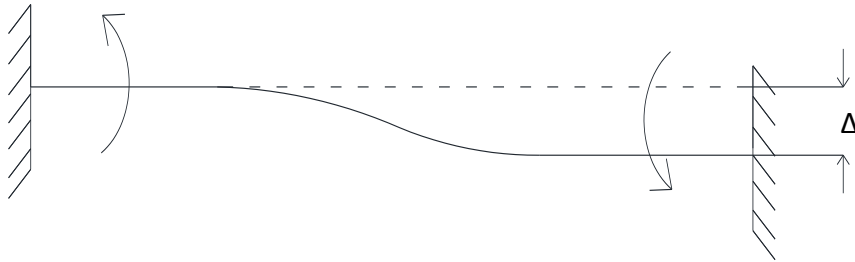


Figura 4.6 - Assentamento numa viga bi-encastrada

Sendo que neste caso é

$$M_A = \frac{6 * 3170 * 10}{600^2} = 317 \text{ N mm} \quad (14.2)$$

Uma barra bi-encastrada tem assim momentos fletores de apoio iguais.

$$M_A = M_B = -M \quad (14.3)$$

Se o encastramento em B passar a ser um apoio simples, então  $M_B=0$ . Ou seja, adiciona-se  $+M$  em B e portanto há a transferência de  $+1/2M$  para A.

$$M_A = -M + \frac{1}{2}M = -\frac{1}{2}M \quad (14.4)$$

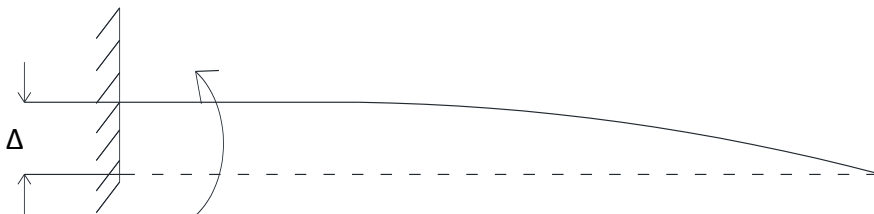


Figura 4.7 - Assentamento numa viga encastrada-apoiada

Ou seja, no caso da barra encastrada-apoiada, o momento que se gera é metade de no caso da barra bi-encastrada.

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa viga simplesmente apoiada, ou seja, a rotação nos apoios é permitida, bem como o deslocamento horizontal num dos apoios (que neste caso é irrelevante). Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. Em cada um dos apoios existe um braço de momento, onde se aplicam os ganchos de carga. O apoio da esquerda possui um indicador ajustável para a medição de rotações (em radianos) e está montado sobre uma placa de base que permite a elevação do apoio inserindo placas de plástico por baixo. Existem um total de 4 placas de plástico com 10 mm de espessura cada uma.

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e 600 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$

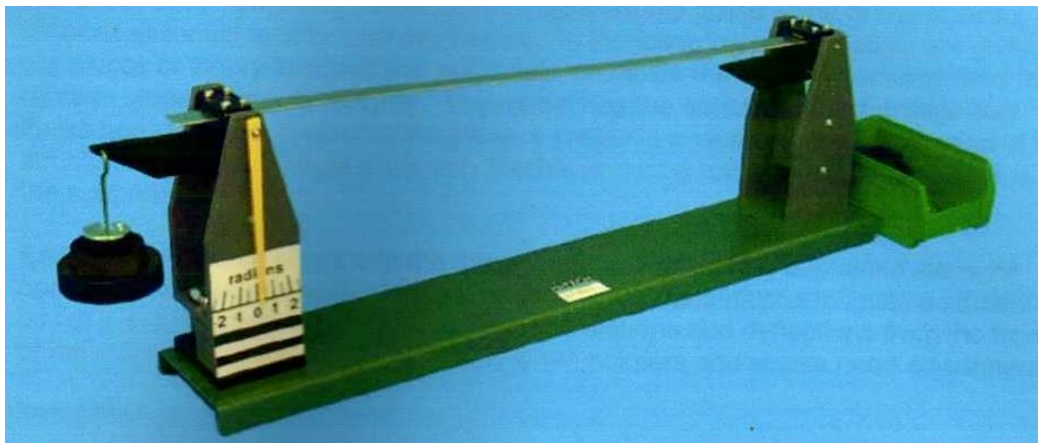


Figura 4.8 - O equipamento HDM2 retirado de [16]

### 3.2.2 - Equipamento STR 17 - Treliça

#### Experiência 1 - Esforços numa treliça isostática

Nesta experiência vamos examinar a treliça com o elemento redundante desligado, fazendo com que esta seja uma estrutura isostática, ou seja, pode ser analisada usando métodos simples como o método dos nós.

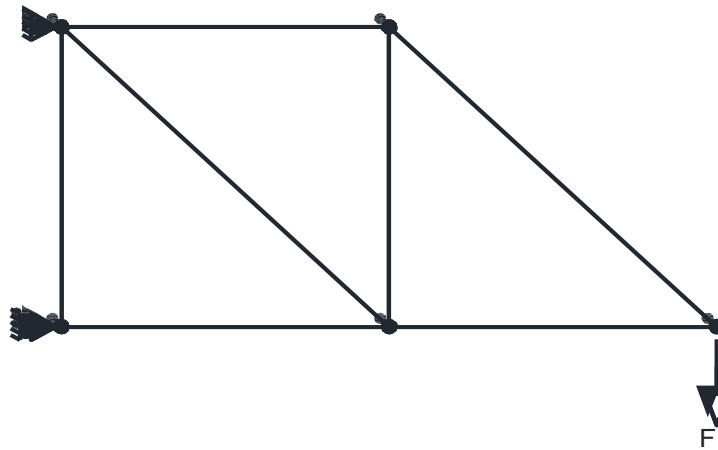


Figura 4.9 - Esquema do equipamento para a experiência 1

Preparação da experiência:

- 1 - Confirmar que o elemento redundante não está ligado;
- 2 - Aplicar um pré-carregamento de 100 N no sentido descendente, recolocar a célula de carga a zero (mantendo o pré-carregamento) e cuidadosamente colocar o indicador digital também a zero (no topo da treliça);
- 3 - Aplicar um carregamento de 250 N e confirmar que a base está estável e segura;
- 4 - Recolocar a célula de carga a zero (mantendo os 100 N de pré-carregamento) e voltar a confirmar que o indicador digital está a zero.

Método:

- 1 - Aplicar carregamentos de acordo com a Tabela 15.1 e completá-la, anotando a deformação de cada elemento e o deslocamento do nó onde está aplicado o indicador digital;
- 2 - Completar a Tabela 15.2 subtraindo as deformações iniciais (atenção aos sinais);



3 - Escolher um membro (exceto o 6) e usando os mesmos eixos, traçar um gráfico para cada Deformação no elemento versus Carregamento para os valores das Tabelas 15.1 e 15.2. Fazer isto para dois membros diferentes;

4 - Traçar um gráfico Deslocamento versus Carregamento;

5 - Usando as seguintes equações, calcular os esforços em cada elemento e completar a segunda coluna da Tabela 15.3 (quando carregamento = 250 N):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (15.1)$$

Onde,

E - Módulo de elasticidade (N/m<sup>2</sup>) (neste caso, elementos de aço, E = 210 GPa ou 210x10<sup>9</sup> N/m<sup>2</sup>)

$\sigma$  – Tensão no elemento (N/m<sup>2</sup>)

$\varepsilon$  – Deformação

E ainda,

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (15.2)$$

Onde,

N - Esforço axial no elemento (N)

A - Área da secção transversal do elemento (m<sup>2</sup>)

6 - Usando um método de cálculo (como o método dos nós) calcular os valores teóricos para os esforços dos elementos da treliça com um carregamento de 250 N e completar a Tabela 15.3;

7 - Tecer um comentário sobre os gráficos desenhados e a Tabela 15.3. Identificar que elementos estão à compressão e à tração.

### **Experiência 2 - Esforços numa treliça hiperestática**

Nesta experiência vai ser estudada a treliça com um elemento redundante, tornando-se numa estrutura hiperestática (estaticamente indeterminada).

Como se viu na Experiência 1, esta estrutura consegue suportar o carregamento numa forma adequada, portanto, porquê incluir um elemento redundante? Esta experiência responderá a essa pergunta assim como dará algum esclarecimento sobre um método para analisar estruturas hiperestáticas, o método das forças (ver fundo teórico).

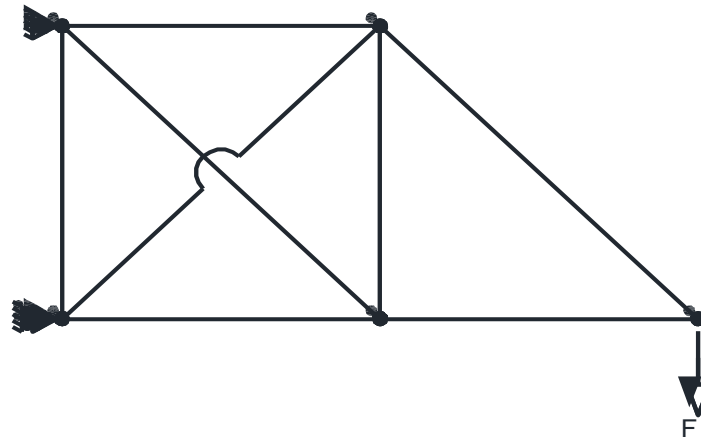


Figura 4.10 - Esquema do equipamento para a experiência 2

Preparação da experiência:

- 1 - Confirmar que o elemento redundante está ligado (não utilizar nenhuma ferramenta para apertar a porca);
- 2 - Aplicar um pré-carregamento de 100 N no sentido descendente, recolocar a célula de carga a zero (mantendo o pré-carregamento) e cuidadosamente colocar o indicador digital também a zero (no topo da treliça);
- 3 - Aplicar um carregamento de 250 N e confirmar que a base está estável e segura;
- 4 - Recolocar a célula de carga a zero (mantendo os 100 N de pré-carregamento) e voltar a confirmar que o indicador digital está a zero.

Método:

- 1 - Aplicar carregamentos de acordo com a Tabela 15.4 e completá-la, anotando a deformação de cada elemento e o deslocamento do nó onde está aplicado o indicador digital (notar que as leituras serão diferentes das da experiência 1 devido à presença do elemento redundante);
- 2 - Completar a Tabela 15.5 subtraindo as deformações iniciais (atenção aos sinais);
- 3 - Usando as mesmas equações da experiência 1, calcular os esforços em cada elemento e completar a segunda coluna da Tabela 15.6 (quando carregamento = 250 N):
- 4 - Traçar o gráfico Deslocamento versus Carregamento nos mesmos eixos usados na Experiência 1 para o mesmo efeito;

Desta vez, calcular os valores teóricos para os esforços é mais complicado que quando a treliça era isostática pois não é possível utilizar métodos que se baseiem apenas no equilíbrio estático, é preciso ter em conta as deformações que se desenvolvem nas peças lineares e os respetivos esforços por recurso às relações tensões-deformações. Caso se tentasse, resultaria no típico problema de demasiadas incógnitas para as equações (de equilíbrio) disponíveis.

Assim, usaremos o método da carga unitária que recorre ao conceito da energia de deformação. Este método baseia-se no facto de que a energia armazenada na estrutura, para o mesmo carregamento, seria a mesma, independentemente da existência do elemento redundante. Na prática, os esforços são calculados sem o elemento redundante e depois calculados com um esforço unitário no local do elemento redundante. Os valores de ambos são combinados, por sobreposição, para calcular a força no elemento redundante e depois nos restantes elementos.

O esforço no elemento redundante é dado por:

$$P = \sum \frac{f n l}{n^2 l} \quad (15.3)$$

E o esforço nos restantes elementos é dado por:

$$\text{Esforço no membro} = P n + f \quad (15.4)$$

Onde,

P - Esforço no elemento redundante (N)

l - Razão do comprimento do elemento com o elemento mais pequeno

n - Esforço em cada elemento devido à carga unitária no local do elemento redundante

f – Esforço em cada elemento sem o elemento redundante na estrutura

A Figura 4.11 mostra os esforços na estrutura quando o elemento redundante não está presente, para um carregamento de 250 N. Estes valores já devem ter sido calculados na Experiência 1.

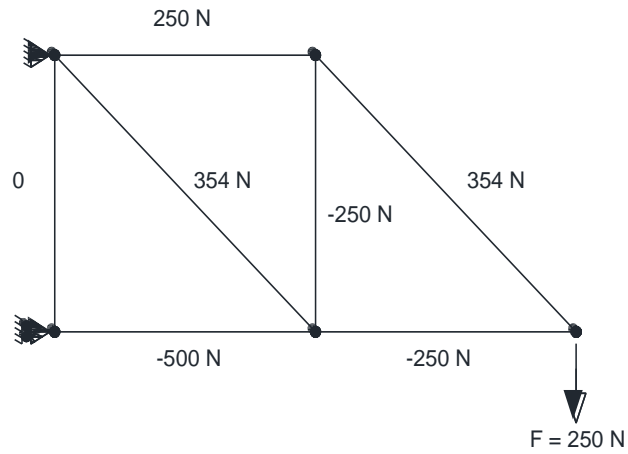


Figura 4.11 - Esforço axial nos vários elementos da estrutura devido ao carregamento real

Na Figura 4.12 estão os esforços devidos à carga unitária aplicada no local da força redundante.

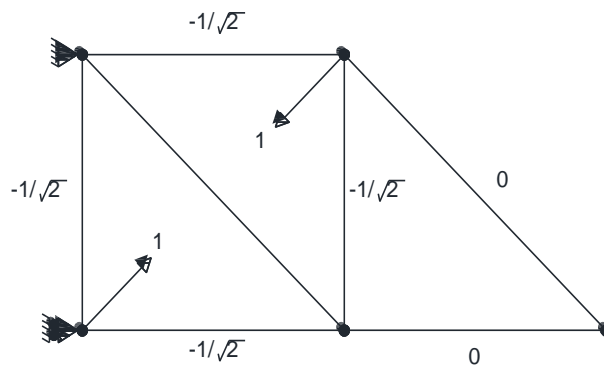


Figura 4.12 - Esforço axial nos vários elementos da estrutura devido à carga unitária

Os cálculos são muito mais simples se se usar um método tabular para somar todos os termos  $fnl$  e  $n^2l$ .

Usar a Tabela 15.7 para cuidadosamente calcular todos os termos necessários. Quando esta estiver totalmente preenchida é possível completar a Tabela 15.6 com os valores teóricos dos esforços.

## Fundo teórico

### Método dos nós

A resolução de treliças planas pelo método dos nós consiste em verificar o equilíbrio da cada nó da treliça.

O método geral segue os seguintes passos:

- Determinação das reações de apoio;
- Identificação do tipo de solitação em cada barra (tração ou compressão);
- Verificação do equilíbrio em cada nó da treliça, iniciando sempre os cálculos pelo nó que tem o menor número de incógnitas.

Resolver o equilíbrio em cada nó faz-se recorrendo às equações básica de somatório de forças verticais (15.5) e horizontais (15.6).

$$\sum F_H = 0 \quad (15.5)$$

$$\sum F_V = 0 \quad (15.6)$$

### Tensão normal e deformação

Tensão normal é a distribuição de forças por unidade de área num determinado ponto dentro de um corpo contínuo (15.7).

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (15.7)$$

A unidade SI é o Pascal que equivale a Newton por metro quadrado.

Deformação de um corpo é qualquer mudança da configuração geométrica do corpo que leve a uma variação da sua forma ou das suas dimensões após a aplicação de uma ação externa (15.8).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (15.8)$$

Depende da tensão atuante no corpo e das características físicas do material que o compõe.

### Método da carga unitária

Para a aplicação desse método, devem ser considerados dois sistemas de carregamento:

- 1º sistema: consiste na estrutura submetida ao carregamento real, mudanças de temperatura ou outros fatores que provoquem deslocamento.

- 2º sistema: consiste em uma carga unitária que atua sozinha na estrutura.

Por carga unitária entende-se uma carga fictícia, introduzida para se calcular o deslocamento  $\Delta$  da estrutura causado pelas forças reais, podendo este ser uma translação ou rotação, relativas ou não.

Quando a carga unitária atua na estrutura, como em qualquer outro carregamento, surgem reações nos apoios e tensões nos membros ( $N_U$ ,  $M_U$ ,  $V_U$  e  $T_U$ ) e que, combinadas com a carga unitária e as reações, formam um sistema de forças em equilíbrio.

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, ao impor uma pequena deformação virtual, o trabalho virtual das forças externas será igual ao trabalho virtual das forças internas (15.9). O método da carga unitária correlaciona-se com este princípio na medida em que é preciso escolher adequadamente a deformação virtual. Neste caso, tomam-se as deformações reais da estrutura causada pelo primeiro sistema de carregamento e as deformações virtuais impostas pelo segundo sistema. Assim:

$$W_{Ext} = 1 \times \Delta \quad (15.9)$$

Já o trabalho virtual interno é realizado pelas tensões virtuais resultantes, quando os elementos da estrutura são deformados virtualmente (15.10). Entretanto, as deformações virtuais são escolhidas para serem as mesmas das deformações reais que ocorrem na estrutura que suporta as cargas reais. Logo:

$$W_{Int} = \int N_U \delta S + \int M_U \delta \theta + \int V_U \delta \lambda + \int T_U \delta \phi \quad (15.10)$$

Como  $W_{Ext} = W_{Int}$ , então temos a equação fundamental do método da carga unitária:

$$\Delta = \int N_U \delta S + \int M_U \delta \theta + \int V_U \delta \lambda + \int T_U \delta \phi \quad (15.11)$$

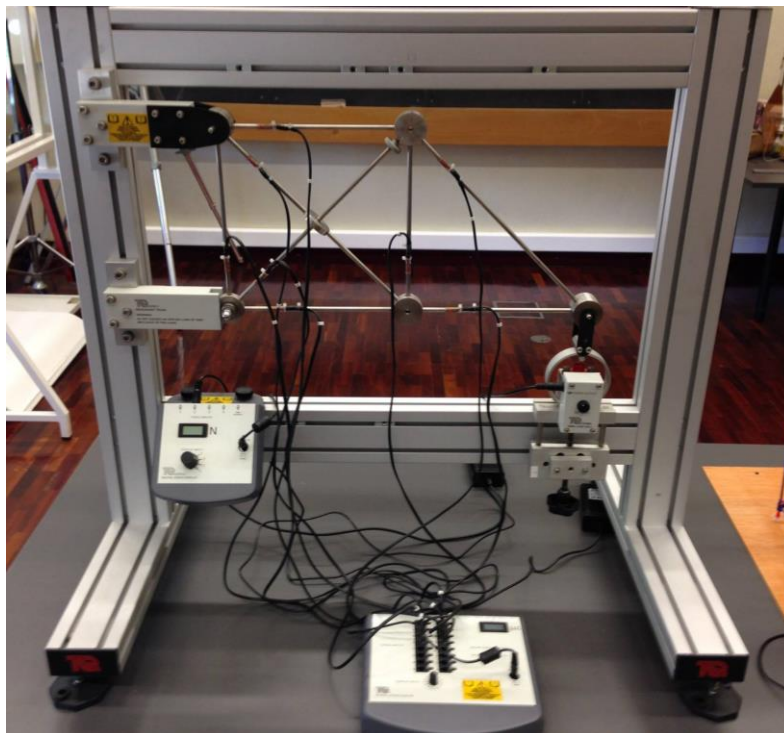
**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa treliça (isto é, uma estrutura composta por peças lineares biarticuladas unidas em nós e sujeitas, essencialmente, a cargas nodais) apoiada numa base. Neste caso, há dois tipos de elementos especiais. Um deles pode ser desligado da treliça desapertando uma porca. Este é o elemento redundante, ou seja, pode fazer parte da estrutura mas não é necessário para impedir que esta se transforme num mecanismo. O outro elemento especial tem um anel central para permitir ao elemento redundante que o atravesse, tentando garantir assim que todos os elementos estão no mesmo plano.

A treliça possui dois apoios, um livre (que permite apenas a rotação) e um deslizante (permitindo a rotação e translação numa direção), representando assim as condições ideais para o caso em estudo.

O carregamento é aplicado à treliça através de uma célula de carga no extremo direito da treliça, e o seu valor pode ser medido no mostrador digital. Para além disso, é ainda possível medir o deslocamento vertical de um dos pontos da treliça, usando o indicador digital montado no apoio superior.

Cada um dos elementos da treliça tem um conjunto de sensores ligado à sua superfície que servem para medir as deformações axiais que se geram em cada um desses elementos. Assim, através de uns cálculos simples, é possível obter-se o valor do esforço axial em cada um dos elementos da treliça.



*Figura 4.13 - O equipamento STR17*

### 3.2.3 - Equipamento HDM4 - Teorema de Maxwell-Betti

#### Experiência - Teorema de Maxwell-Betti

A base deve estar montada com dois suporte A e um suporte B.

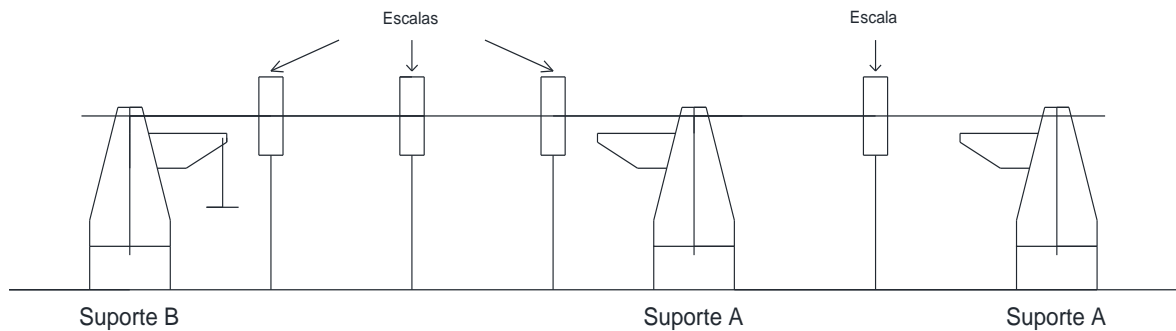


Figura 4.14 - Esquema do equipamento para a experiência

#### Parte 1

O objetivo desta parte da experiência é verificar o teorema da reciprocidade no que toca a deslocamentos e rotações segundo Maxwell, relacionado o deslocamento num ponto com a força aplicada nesse ponto.

#### Parte 1A

Método:

1 - Colocar ganchos de carga a meio de cada um dos vãos e um terceiro a um quarto de vão. Colocar as escalas de deslocamento a zero;

2 - Aplicar uma carga de 10 N em cada um dos ganchos, um de cada vez, e, para cada caso, anotar os deslocamentos no local de cada um dos outros ganchos (usar a seguinte convenção: deslocamentos para baixo são negativos);

Deve-se emparelhar os resultados desta forma, de acordo com o requisito do teorema:

Carga no ponto A – Deslocamento no ponto B

Carga no ponto B – Deslocamento no ponto A

Serão três pares ao todo. Estes valores devem ser confirmados pelo método teórico.



## Parte 1B

Método:

- 1 - Colocar ganchos de carga nos três braços de momento e colocar os indicadores de rotação a zero;
- 2 - Aplicar uma carga de 15 N em cada um dos ganchos, um de cada vez, e, para cada caso, anotar as rotações em cada um dos outros apoios (usar a seguinte convenção: rotação no sentido dos ponteiros dos relógios é positiva);

Mais uma vez, deve-se emparelhar os resultados de forma análoga à anterior e confirmá-los pelo método teórico.

## Parte 2

Desta vez o objetivo é verificar o teorema segundo Betti, com sistemas mistos de forças e deslocamentos.

## Parte 2A

Método:

- 1 - Colocar ganchos de carga a meio de ambos os vãos e um terceiro no braço de momento do apoio exterior do maior vão. Colocar as escalas de deslocamento e os indicadores de rotação a zero;
- 2 - Aplicar uma carga de 10 N no braço de momento do apoio e anotar o deslocamento a meio do vão mais próximo. Anotar os sentidos das forças e dos deslocamentos;
- 3 - Mover a carga para o meio vão onde foi feita a leitura anteriormente e anotar a rotação no apoio;
- 4 - Repetir os passos 1, 2 e 3 para o outro vão.

Mais uma vez, os dados retirados devem ser emparelhados e, neste caso, devem ser multiplicados da seguinte forma:

Momento fletor em A \* Deslocamento em B

Carga em B \* Rotação em A

Verificar que as unidades são consistentes e comparar resultados. Verificar os resultados através do método teórico.

## Parte 2B

Método:

1 - Usando o equipamento como base, esboçar dois sistemas de forças, por exemplo:

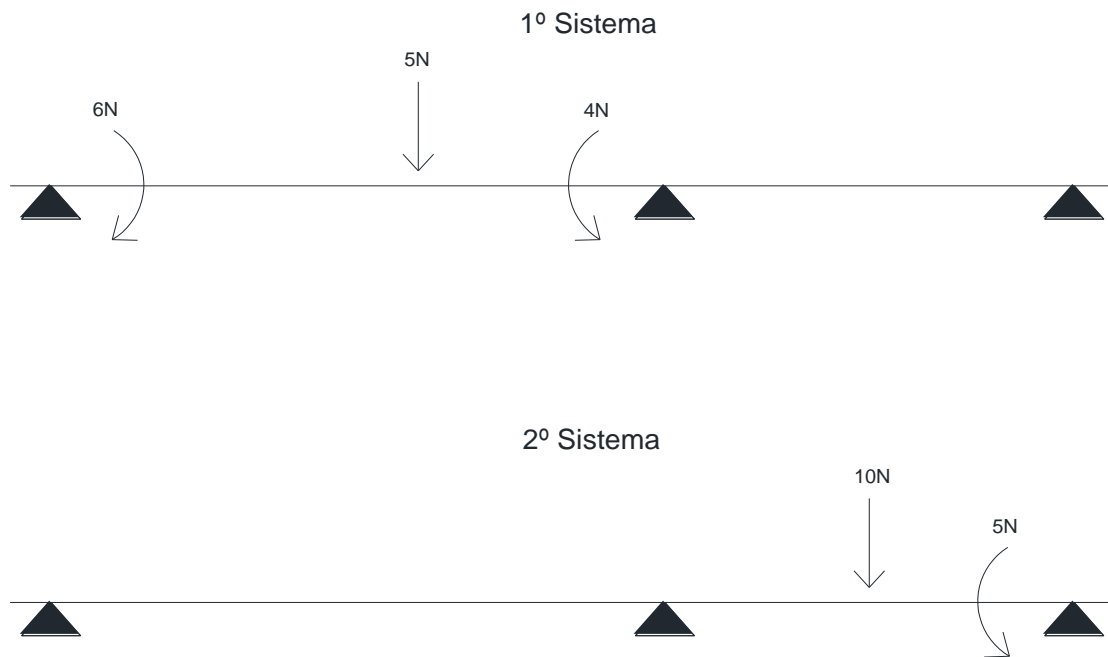


Figura 4.15 - Exemplos de sistemas de forças

2 - Colocar os ganchos de carga de acordo com o sistema 1 e colocar a zero as escalas e indicadores correspondentes às forças do sistema 2;

3 - Aplicar um conjunto de forças no sistema 1 apontando os valores dessas forças e ainda as rotações e deslocamentos nos locais correspondentes às forças do sistema 2;

4 - Repetir os passos 2 e 3 trocando o sistema 1 pelo 2 e vice-versa (Nota: usar uma convenção de sinais consistente, por exemplo: para baixo positivo e no sentido dos ponteiros dos relógios positivo);

5 - Repetir o método para outro par de sistemas;

Fazer a mesma multiplicação que na parte 2A. Somar os produtos como demonstrado na equação de Betti. Qual a proximidade entre os valores de ambos os lados da equação para os dois casos?

### Parte 3

O objetivo desta última parte da experiência é estudar um caso especial do método das forças para analisar estruturas hiperestáticas.

Em primeiro lugar, tome-se a viga contínua como encastrada em ambos os extremos. De seguida liberta-se uma das extremidades de modo a que permita apenas a rotação. Ambos os sistemas são então definidos por:

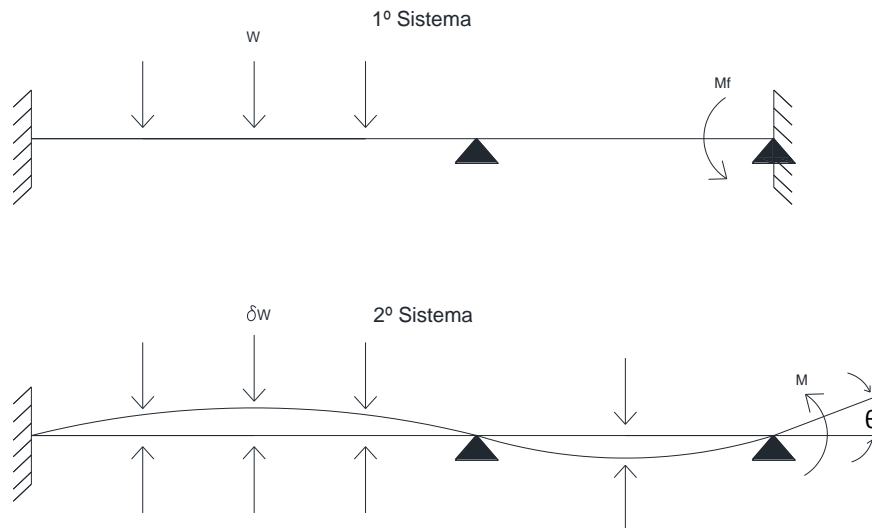


Figura 4.16 - Exemplos de sistemas de forças para a nova configuração da estrutura

Sendo que, no sistema (1), o valor de  $M_f$  é tal que a rotação nesse ponto seja nula (encastramento) quando o carregamento  $W$  atua. No sistema (2) é aplicado um momento fletor para criar o deslocamento correspondente à redundância libertada.

Método:

- 1 - Colocar ganchos de carga em todas as posições. Colocar a zero as escalas. Inicialmente ambos os extremos devem estar encastrados, como no sistema (1);
- 2 - Aplicar o carregamento  $W$  de 15 N na viga (em qualquer uma das 3 posições possíveis) e determinar o momento fletor de fixação necessário para colocar as escalas de novo a zero;
- 3 - Libertar a rotação num dos extremos e aplicar um momento fletor como se vê no sistema (2). Apontar os deslocamentos e rotações no ponto de aplicação do carregamento  $W$  do sistema (1);
- 4 - Repetir o processo para as outras duas posições de  $W$  para as quais  $M_f$  pode ser determinado. Apontar também o deslocamento a meio vão do vão mais pequeno para o sistema (2);

À semelhança das partes anteriores da experiência, multiplicar os resultados obtidos de forma a obter valores experimentais para  $M_f$  e comparar estes resultados com os valores medidos, quando possível.

## Fundo Teórico

### Teorema de Maxwell-Betti

O teorema da reciprocidade de Maxwell e o teorema generalizado atribuído a Betti são ambos aplicáveis a qualquer estrutura elástica linear. Assim, o teorema de Maxwell pode ser escrito da seguinte forma:

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (16.1)$$

Onde  $f_{ij}$  se refere ao deslocamento causado numa direção específica no ponto  $i$  devido á aplicação duma carga no ponto  $j$ . Ou seja “O deslocamento numa determinada direção no ponto  $i$  duma estrutura elástica linear devido a um carregamento numa determinada direção no ponto  $j$  é igual ao deslocamento na mesma direção no ponto  $j$  quando o mesmo carregamento é aplicado na mesma direção em  $i$ .”

Isto pode ser provado da seguinte forma:

Tendo dois carregamentos,  $P_1$  e  $P_2$ , aplicados nos pontos 1 e 2 duma estrutura elástica linear, se  $P_1$  é aplicado antes de  $P_2$ , o trabalho produzido é

$$U = \frac{1}{2} * f_{11} * P_1^2 + \frac{1}{2} * f_{22} * P_2^2 + P_1 * f_{12} * P_2 \quad (16.2)$$

Quando  $P_1$  é aplicado depois de  $P_2$ , o trabalho produzido é

$$U = \frac{1}{2} * f_{22} * P_2^2 + \frac{1}{2} * f_{11} * P_1^2 + P_2 * f_{21} * P_1 \quad (16.3)$$

Como o trabalho total tem de ser o mesmo,

$$f_{12} = f_{21} \quad (16.4)$$

Segundo Betti, numa estrutura com comportamento elástico linear, se se considerar dois sistemas de forças,  $f_{Fi}$  e  $f_{Gi}$ , que provocam dois campos de deslocamentos,  $d_{Fi}$  e  $d_{Gi}$ , então o produto das forças do sistema F com o deslocamento no ponto de aplicação da força obtido no sistema G é igual ao produto das forças do sistema G com o deslocamento no ponto de aplicação da força obtido no sistema F:

$$\sum_i f_{Fi} * d_{Gi} = \sum_i f_{Gi} * d_{Fi} \quad (16.5)$$

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa viga contínua apoiada de dois vãos cujos apoios permitem a rotação. Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. Em cada um dos apoios existe um braço para aplicar ou medir momentos fletores. Para além disso, todos estão equipados com um indicador ajustável para medição de rotações (em radianos).

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e com vãos de 600 mm e de 400 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$



*Figura 4.17 - O equipamento HDM4 com os vários suportes para as experiências*

A viga possui ainda quatro braçadeiras móveis onde se aplicam os ganchos de carga.

No vão de 600 mm existem três postes verticais, igualmente espaçados, com escalas verticais de deslocamento móveis. Existe uma quarta escala a meio do vão de 400 mm.

### 3.2.4 - Equipamento HDM5 - Princípio de Muller-Breslau: momento fletor de extremidade

#### Experiência - Princípio Muller-Breslau: momento fletor de extremidade

O objetivo desta experiência é obter as linhas de influência para o momento fletor na extremidade da viga.

A base deve estar montada com dois suporte A e um suporte D.

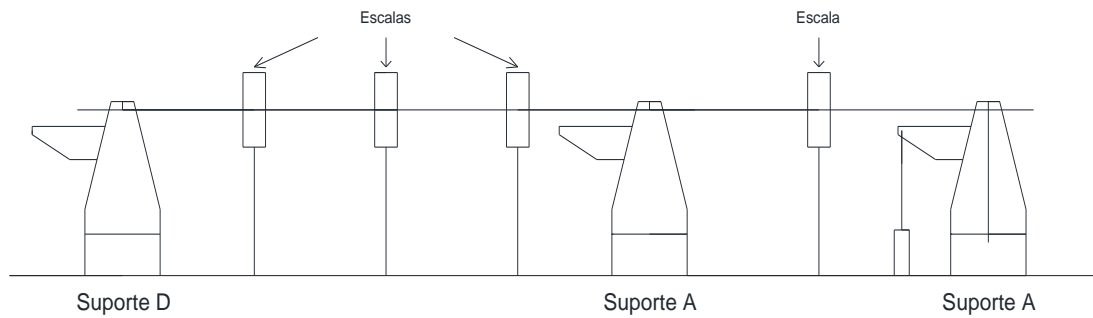


Figura 4.18 - Esquema do equipamento para a experiência

#### Parte 1

- 1 - Com a rotação livre em todos os apoios, colocar o indicador de rotação e as escalas a zero;
- 2 - Com uma régua milimétrica, medir a distância entre a viga e a base nos sete pontos a meia distância entre as escalas verticais ou uma escala e um apoio;
- 3 - Impor uma rotação tão grande quanto possível no apoio de extremidade do menor vão e apontar os deslocamentos da viga.

Usar esses deslocamentos para traçar a linha de influência para o momento fletor do apoio de extremidade.

#### Parte 2

Fixar a rotação no apoio de extremidade do menor vão e repetir o processo anterior.

#### Parte 3

Fixar a rotação no apoio intermédio para obter as linhas de influência para o momento fletor num apoio de extremidade para uma viga simples de um vão.

Por último, calcular as linhas de influência através do método teórico e comparar resultados.

### Fundo teórico

O princípio de Muller-Breslau afirma que quando é permitido a uma força causar um deslocamento livre numa estrutura, na sua linha de ação, a deformada da estrutura é a linha de influência dessa mesma força, à escala do deslocamento. Isto pode ser ilustrado, duma forma simples, através dos seguintes exemplos:

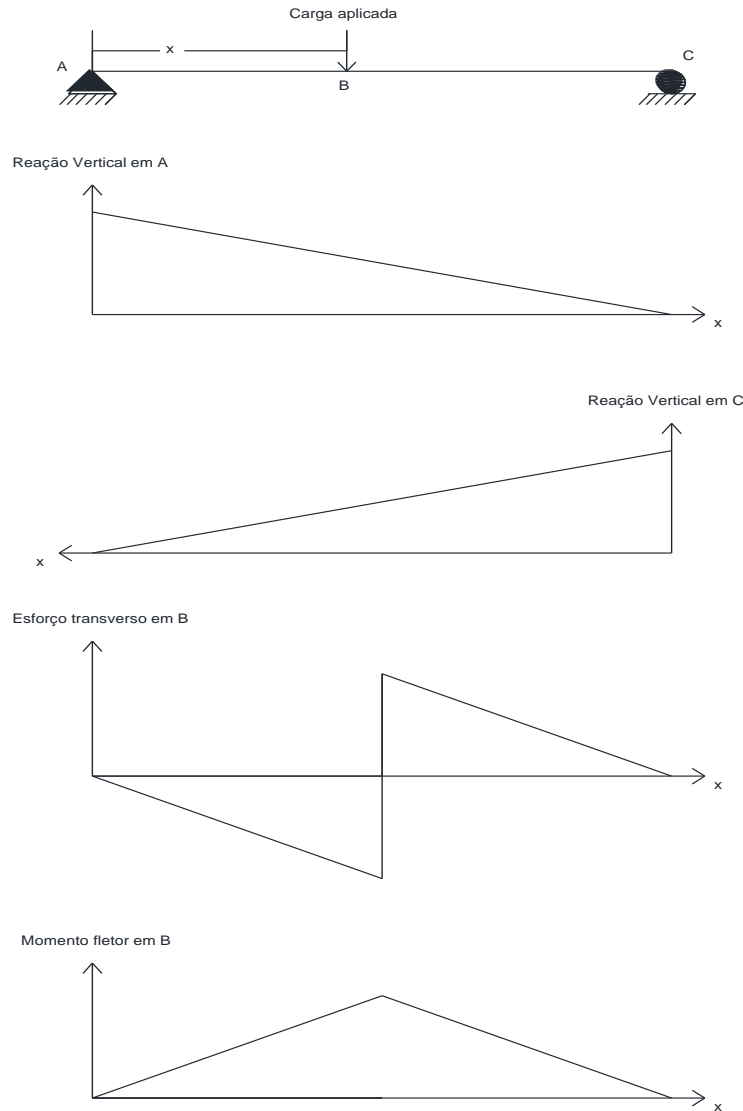


Figura 4.19 - Linhas de influência para as reações e para o momento fletor a meio vão da viga

No primeiro exemplo, liberta-se a reação vertical no apoio A, fazendo com que a carga aplicada provoque o deslocamento desse ponto. Nos restantes liberta-se a reação vertical em C, o esforço transverso em B e o momento fletor em B, respetivamente.

Este princípio é especialmente útil para determinar linhas de influência para forças redundantes em estruturas indeterminadas.

Este fundo teórico é também utilizado para as duas experiências seguintes, Princípio de Muller-Breslau, momento fletor interior e reações.

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa viga continuamente apoiada de dois vãos cujos apoios permitem a rotação. Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. Em cada um dos apoios existe um braço para aplicar ou medir momentos fletores. O apoio de extremidade do menor vão está equipado com um medidor ajustável para medição de rotações (em radianos) e com um dispositivo para puxar o braço de momento de modo a impor uma rotação fixa.

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e com vãos de 600 mm e de 400 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$



*Figura 4.20 - O equipamento HDM5 com os vários suportes para as experiências*

A viga possui ainda quatro braçadeiras móveis onde se aplicam os ganchos de carga.

No vão de 600 mm existem três postes verticais, igualmente espaçados, com escalas verticais de deslocamento móveis. Existe uma quarta escala a meio do vão de 400 mm.



### 3.2.5 - Equipamento HDM6 - Princípio de Muller-Breslau: momento fletor interior

#### Experiência - Princípio de Muller-Breslau: momento fletor interior

O objetivo desta experiência é obter as linhas de influência para o momento fletor num ponto no interior da viga.

A base deve estar montada com um suporte A, um suporte B e um suporte E.

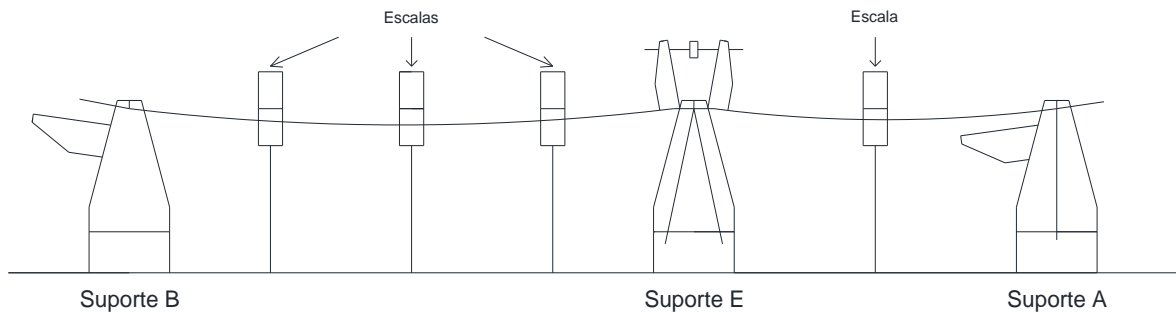


Figura 4.21 - Esquema do equipamento para a experiência

#### Parte 1

- 1 - Com a rotação livre nos apoios de extremidade, fechar os dois braços de momento no apoio intermédio e colocar os indicadores a zero;
- 2 - Com uma régua milimétrica, medir a distância entre a viga e a base nos sete pontos a meia distância entre as escalas verticais ou uma escala e um apoio;
- 3 - Anotar as rotações lidas nos indicadores preto e laranja;
- 4 - Impor uma rotação tão grande quanto possível usando o parafuso especial nos braços de momento do apoio intermédio.

Anotar as rotações e deslocamentos e voltar a medir as distâncias entre a viga e a base como anteriormente. Usar estes valores para traçar a linha de influência para momento fletor num ponto interno.

#### Parte 2

Fixar as rotações nos apoios de extremidade e repetir o processo anterior.

Por último, calcular as linhas de influência através do método teórico e comparar resultados.

**Descrição do equipamento:**

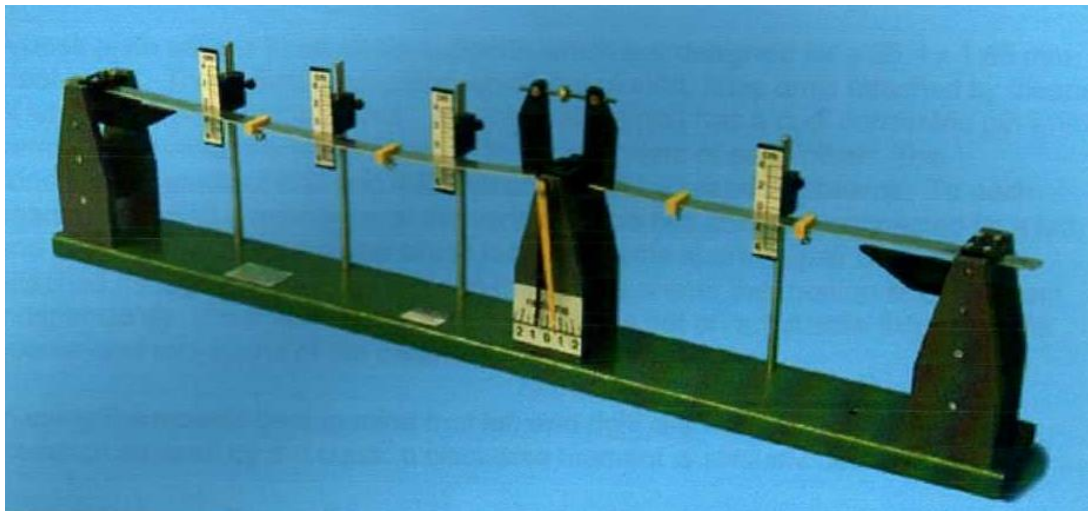
O equipamento consiste numa viga continuamente apoiada de dois vãos cujos apoios exteriores permitem a rotação. Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. O apoio interior possui a capacidade de, também através de cavilhas concêntricas, tornar os vãos independentes um do outro.

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e com vãos de 600 mm e de 400 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$



*Figura 4.22 - O equipamento HDM6 retirado de [20]*

Cada viga possui um braço de momento. Um par de indicadores ligados às vigas através cavilhas concêntricas mostram a rotação para cada viga, independentemente.

No vão de 600 mm existem três postes verticais, igualmente espaçados, com escalas verticais de deslocamento móveis. Existe uma quarta escala a meio do vão de 400 mm.

### 3.2.6 - Equipamento HDM7 - Princípio de Muller-Breslau: reações

#### Experiência - Princípio de Muller-Breslau: reações

O objetivo desta experiência é obter as linhas de influência para as reações verticais duma viga contínua de dois vãos.

A base deve estar montada com um suporte B, um suporte C e um suporte D.

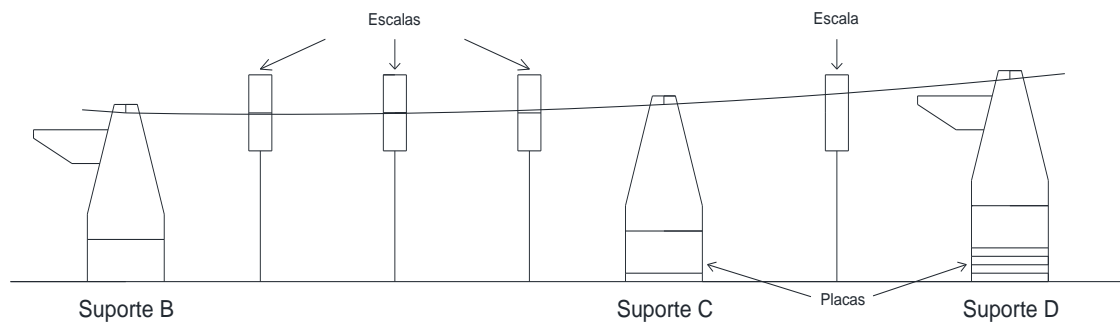


Figura 4.23 - Esquema do equipamento para a experiência

Método:

#### Parte 1

- 1 - Começar a experiência sem nenhuma das placas de plástico inseridas;
- 2 - Com os apoios exteriores fixos ou não, colocar as escalas a zero;
- 3 - Com uma régua milimétrica, medir a distância entre a viga e a base nos sete pontos a meia distância entre as escalas verticais ou uma escala e um apoio;
- 4 - Inserir as quatro placas de plástico sob o apoio interior;
- 5 - Anotar os deslocamentos de modo a que a deformada possa ser traçada.

#### Parte 2

- 1 - Colocar o apoio interior à altura inicial;
- 2 - Repetir os passos 4 e 5 da Parte 1 para o apoio exterior que pode ser elevado.

### Parte 3

- 1 - Colocar os apoios todos à altura inicial outra vez;
- 2 - Retirando os 4 parafusos na parte inferior da base, trocar os dois apoios exteriores (provavelmente será necessário desmontar e montar os rolamentos da viga);
- 3 - Repetir os passos 4 e 5 da Parte 1 para o apoio exterior que pode ser elevado.

Por último, traçar as linhas de influência e comparar valores com os obtidos através do método teórico.

#### Descrição do equipamento:

O equipamento consiste numa viga continuamente apoiada de dois vãos cujos apoios permitem a rotação. Nos apoios exteriores, esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. O apoio interior e um dos exteriores podem ser elevados inserindo umas placas de plástico por baixo do suporte (cada placa tem 10mm de espessura).

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e com vãos de 600 mm e de 400 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$

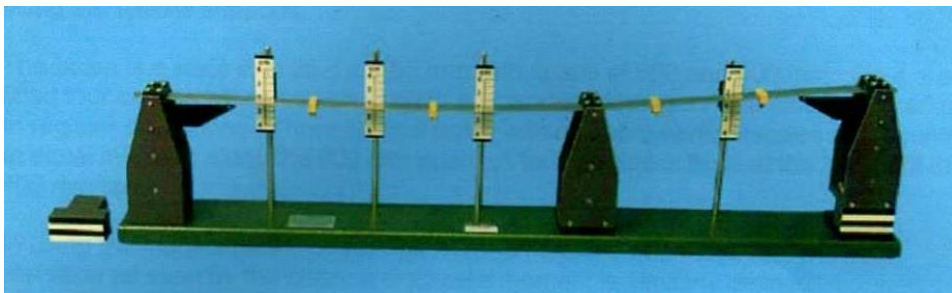


Figura 4.24 - O equipamento HDM7 retirado de [21]

A viga possui ainda quatro braçadeiras móveis onde se aplicam os ganchos de carga.

No vão de 600 mm existem três postes verticais, igualmente espaçados, com escalas verticais de deslocamento móveis. Existe uma quarta escala a meio do vão de 400 mm.

### 3.2.7 - Equipamento HDM1 - Coeficiente de distribuição de momentos fletores

#### Experiência 1 - Demonstração da rigidez da viga

Através desta experiência, com base nas rigidezes de barras tabeladas, podemos demonstrar o valor da rigidez da barra anteriormente referido.

A base deve estar montada com dois suportes A.

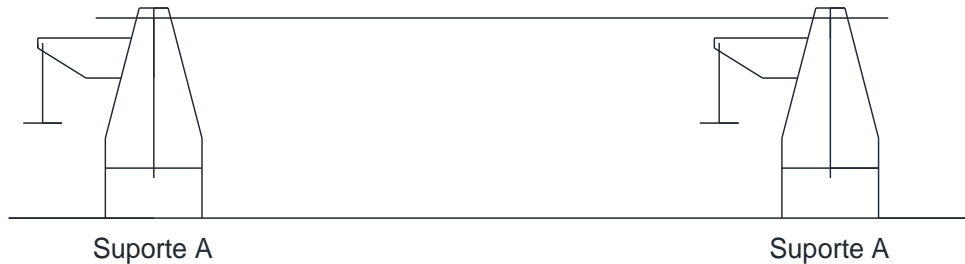


Figura 4.25 - Esquema do equipamento para a experiência 1

Método:

- 1 - Colocar um gancho de carga no braço de momento do apoio da esquerda e inserir a cavilha no suporte da direita para impedir a sua rotação. Colocar o indicador de rotações a zero;
- 2 - Carregar o gancho com quatro pesos de 5 N apontando o incremento de rotação para cada um deles (a rotação deverá ser 0,04 radianos por cada 5 N);
- 3 - Retirar o gancho de carga e a cavilha, colocar o indicador de rotações novamente a zero;
- 4 - Repetir o 2º passo (sendo que agora a rotação deverá ser 0,053 radianos por cada 5N).



Figura 4.26 - Esquema do equipamento com a cavilha inserida

## Experiência 2 - Transferência de momento

Com esta experiência pretende-se demonstrar a transferência de momento que ocorre entre os apoios da estrutura.

Método:

- 1 - Colocar um gancho de carga em ambos os braços de momento e colocar os indicadores de rotação a zero;
- 2 - Carregar o gancho da esquerda com 5 N e o da direita com metade desse valor (2,5 N). Verificar que o indicador de rotação da direita se encontra a zeros, como se estivesse fixo. O coeficiente de transferência de momento é a relação entre ambos os carregamentos;
- 3 - Repetir o 2º passo de modo a confirmar o coeficiente.



Figura 4.27 - Esquema do equipamento para a experiência 2

## Fundo teórico

### Experiência 1

Quando a cavilha está colocada, a viga tem uma rigidez de

$$\frac{M}{\theta} = \frac{4EI}{L} \quad (20.1)$$

Comportando-se como uma barra bi-encastada com imposição de rotação.

Quando a cavilha não está colocada, a viga tem uma rigidez de

$$\frac{M}{\theta} = \frac{3EI}{L} \quad (20.2)$$

Comportando-se como uma barra encastada-rotulada com imposição de rotação.

Os braços de momento têm um comprimento de 100 mm, aplicando um momento fletor de 500 Nmm por cada peso de 5 N no gancho de carga. Assim,

$$\theta = \frac{ML}{4EI} = \frac{500}{4 * 3170} = 0,04 \text{ rad} \quad (20.3)$$

Para o primeiro caso

E

$$\theta = \frac{ML}{3EI} = \frac{500}{3 * 3170} = 0,053 \text{ rad} \quad (20.4)$$

Para o segundo caso.

## Experiência 2

Tome-se o caso duma viga de um tramo, apoiada no extremo A e encastrada no extremo B. Aplicando um momento fletor  $M_A$  no extremo A, surgirá uma rotação nesse extremo uma rotação  $\theta_A$ . Sabendo o momento fletor que se gerou em B,  $M_B$ , sabe-se o coeficiente de transferência de momento:

$$C_{AB} = \frac{M_B}{M_A} \quad (20.5)$$

Ora, no caso duma viga de comprimento L com secção constante e rigidez EI tem-se

$$M_A = 4 \frac{EI}{L} \theta_A + 2 \frac{EI}{L} \theta_B = 4 \frac{EI}{L} \theta_A \quad (20.6)$$

$$M_B = 2 \frac{EI}{L} \theta_A + 4 \frac{EI}{L} \theta_B = 2 \frac{EI}{L} \theta_A \quad (20.7)$$

E portanto,

$$C_{AB} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{2} \quad (20.8)$$

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa viga simplesmente apoiada, ou seja, a rotação nos apoios é permitida. Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. Em cada um dos apoios existe um braço para aplicar ou medir momentos fletores. Para além disso, ambos estão equipados com um indicador ajustável para medição de rotações (em radianos).

A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e 600 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$

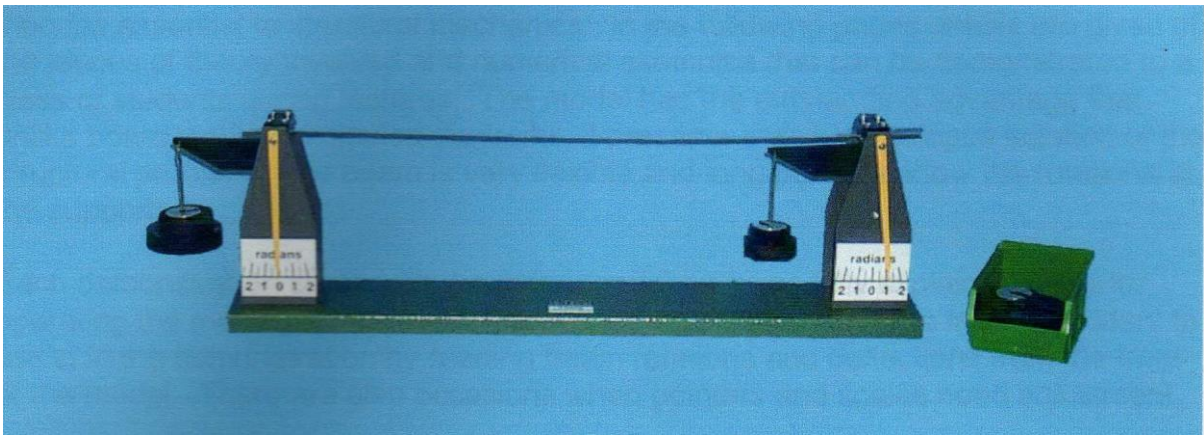


Figura 4.28 - O equipamento HDM1 retirado de [15]



### 3.2.8 - Equipamento HDM3 - Momentos de fixação

#### Experiência 1 - Momentos de fixação numa viga bi-encastrada

Esta experiência tem o intuito de demonstrar as reações de momento fletor que se criam quando uma carga concentrada é aplicada no vão duma viga bi-encastrada.

A base deve estar montada com um suporte A e um suporte B.

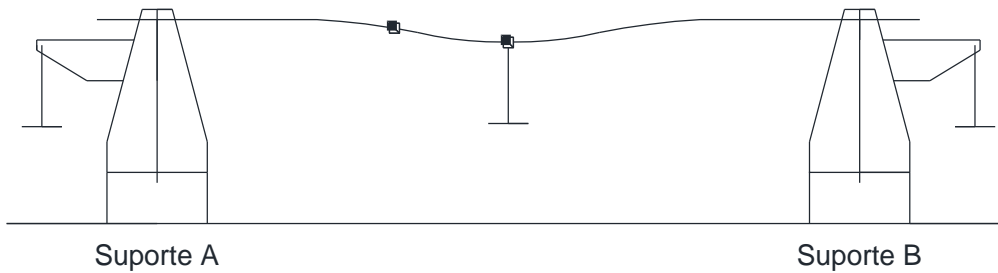


Figura 4.29 - Esquema do equipamento para a experiência 1

Método:

1 - Fixar ambos os apoios inserindo as cavilhas. Colocar as braçadeiras a meio vão e a 200 mm do apoio da esquerda. Colocar ganchos de carga nos braços de ambos os apoios e um terceiro na braçadeira a meio vão. Colocar os indicadores de rotações a zero;

2 - Aplicar uma carga de 10 N a meio vão e aplicar cargas em ambos os apoios de modo a que as rotações voltem a zero (o valor deverá ser 7,5 N em ambos). Notar que momento fletor aplicado num dos apoios implica rotação em ambos;

3 - Remover todas as cargas e colocar o gancho que estava a meio vão na outra braçadeira a 200 mm do apoio da esquerda. Colocar os indicadores de rotações a zero.

4 - Aplicar uma carga de 10 N no novo ponto e aplicar cargas em ambos os apoios de modo a que as rotações voltem a zero (os valores deverão ser 8,9 N no apoio da esquerda e 4,4 N à direita).

### **Experiência 2 - Momentos de fixação numa viga encastrada-apoiada**

Esta experiência surge imediatamente no seguimento do 4º passo da experiência anterior.

Método:

1 - Para reduzir o apoio da direita a um apoio simples, o momento fletor é cancelado “adicionando” um de valor igual e sentido oposto, removendo a carga aplicada no vão e portanto introduzindo um momento fletor negativo (anti-horário);

2 - Numa viga uniforme, o coeficiente de transmissão de momento fletor é 0,5. Para introduzir o momento fletor negativo no apoio da esquerda a carga deve ser então aumentada em  $0,5 \cdot 4,4 = 2,2$  N (o valor 4,4 foi obtido na experiência anterior) e isto deve fazer com que a rotação nesse apoio volte a zero;

3 - Para dar ênfase ao resultado, retirar todas as cargas do equipamento e colocar o gancho de carga de novo a meio vão. Colocar os indicadores de rotações a zero;

4 - Aplicar uma carga de 10 N a meio vão e aplicar carga apenas no apoio da esquerda, deixando B livre para rodar. O valor necessário para que a rotação no apoio da esquerda volte a zero pode ser comparado com o resultado obtido na Experiência 1 (e deve ser  $1,5 \cdot 7,5 = 11,25$  N).

### **Experiência 3 - Sobreposição de efeitos**

Esta experiência serve para demonstrar como múltiplas cargas podem ser resolvidas em separado e somar os resultados no fim (sobreposição de efeitos).

Método:

1 - Fixar ambos os apoios inserindo as cavilhas. Colocar ganchos de carga em ambas as braçadeiras no vão da viga e no apoio da esquerda. Colocar os indicadores de rotação a zero;

2 - Aplicar 10 N em cada gancho no vão da viga. O valor das cargas a aplicar em cada um dos apoios de modo a que os indicadores de rotações voltem a zero devem ser o somatório dos obtidos nos passos 2 e 4 da experiência 1.

#### Experiência 4 - Momento externo

Com esta experiência é possível ilustrar (mas não medir) como incluir uma consola no processo de distribuição de momentos.



Figura 4.30 - Esquema do equipamento para a experiência 4

Método:

- 1 - Com a rotação livre em ambos os apoios, colocar um gancho de carga no braço de momento do Suporte B. Tratar isto como uma carga concentrada numa consola;
- 2 - Notar que o apoio B deve ser tratado como um apoio de continuidade e que, portanto, a rigidez da viga é  $3EI/L$  (rigidez duma viga encastrada-apoiada);
- 3 - Tendo em conta que a distribuição de momentos se aplica a momentos de fixação, notar que apesar da carga na consola provocar um momento fletor no sentido horário, o momento fletor de fixação que se gera no lado direito do apoio B é anti-horário;
- 4 - Assim, de forma a manter o equilíbrio, do lado esquerdo de B terá de haver um momento fletor de igual valor e com sentido horário;
- 5 - Seguindo a mesma lógica da experiência 2, metade desse momento fletor em B será transmitido ao apoio A.
- 6 - Aplicar 10 N na consola e demonstrar que para que A volte à posição inicial é necessário um momento fletor no sentido horário.



Figura 4.31 – Transferência de momentos

### Fundo teórico

As expressões gerais para uma carga concentrada aplicada em qualquer ponto numa viga bi-encastada são as seguintes:

$$M_A = \frac{Wab^2}{L^2} \quad (21.1)$$

$$M_B = \frac{Wa^2b}{L^2} \quad (21.2)$$

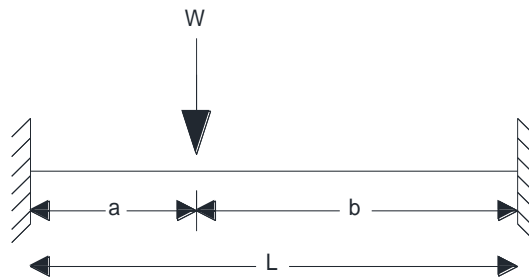


Figura 4.32 - Viga bi-encastada com uma carga pontual aplicada

Que para uma carga a meio vão tomam a seguinte forma:

$$M_A = M_B = \frac{WL}{8} \quad (21.3)$$

**Descrição do equipamento:**

O equipamento consiste numa viga simplesmente apoiada, ou seja, a rotação nos apoios é permitida. Esta rotação pode ser impedida inserindo uma cavilha. Em cada um dos apoios existe um braço para aplicar e medir momentos fletores. Para além disso, ambos estão equipados com um indicador ajustável para medição de rotações (em radianos).

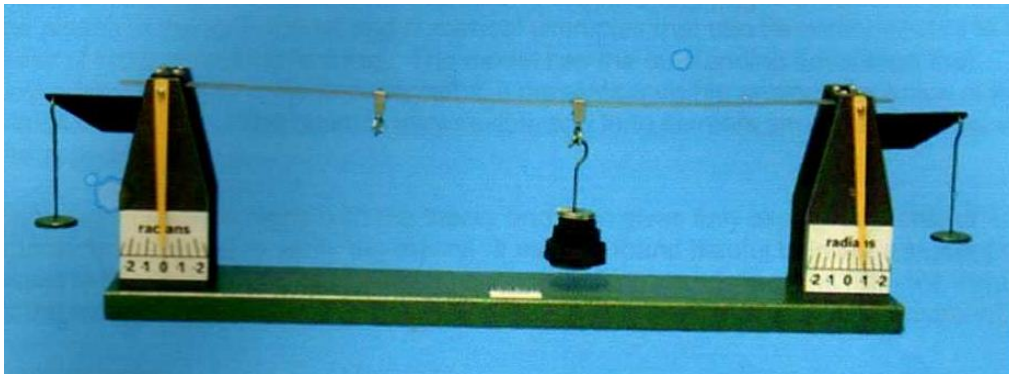
A viga consiste numa barra de aço com uma secção de 25,4 x 1,65 mm e 600 mm de comprimento. Tendo em conta um módulo de elasticidade na ordem dos 200 kN/mm<sup>2</sup>, sabe-se que

$$EI = 1,9 * 10^6 \text{ Nmm}^2$$

e portanto a viga tem uma rigidez de

$$\frac{EI}{L} = 3170 \text{ Nmm}$$

A viga possui ainda duas braçadeiras móveis onde se aplicam os ganchos de carga.



*Figura 4.33 - O equipamento HDM3 retirado de [17]*

## 4 - Novas experiências e equipamentos

Uma vez terminada a primeira parte deste trabalho, a qual consistiu, numa primeira fase, em identificar e organizar todos os equipamentos do Laboratório de Mecânica Estrutural do DECivil e, numa segunda fase, elaborar guias para mais de quarenta experiências que podem ser incluídas no planeamento de várias disciplinas, pode passar-se à apresentação de outras experiências relevantes.

Esta última parte do trabalho tem, fundamentalmente, como objetivo explorar novas experiências que possam ser adicionadas ao repertório já existente. Isto pode ser abordado de duas formas: tentando criar novas experiências utilizando o material já existente ou pesquisando novos equipamentos, tendo em conta que estes poderão ter diferentes graus de complexidade.

Experiências mais simples e de preferência com um equipamento facilmente transportável são o ideal para serem usadas no dia-a-dia de um Professor que tem de repetir a mesma aula para diferentes turmas em salas diferentes. Assim, objetos de pequenas dimensões, por exemplo, pêndulos de Newton, giroscópios e alguns Legos são bastante interessantes e, acima de tudo, relativamente fáceis de obter.

## 4.1 - Com o equipamento já existente no IST

### Airtrack

Com o equipamento de *Airtrack*, já existente no laboratório, é ainda possível fazer mais uma experiência simples, demonstrar que a aceleração de um corpo é proporcional à força aplicada. Utilizando o mesmo *set-up* que na experiência para determinar a aceleração da gravidade, se variarmos a massa aplicada no cordel, verifica-se que a aceleração do corpo também varia, calculando-a com base nas leituras dos *Light Gates*.

### IST – e-lab

No Instituto Superior Técnico existe um laboratório onde várias experiências estão montadas e instaladas fisicamente, e prontas a ser usadas remotamente. Recorrendo à página do *e-lab* (<http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/elab.asp>), é possível que a imagem dos acontecimentos (vídeos) seja transmitida, direta ou indiretamente, a um computador que a difundirá através da Internet. Estas experiências estão associadas a um ambiente virtual, a sala de controlo, que, à semelhança das experiências presentes nesta tese, possuem um protocolo experimental, sugestões de variantes à experiência, explicações e análise dos dados e ainda um *chat*, onde é possível trocar informação, tecer comentários, etc. sobre a experiência. Cada experiência é controlada por um administrador que será um dos membros da lista de utilizadores interessados. Há ainda a possibilidade da experiência ser realizada por um professor, sendo a imagem transmitida em tempo real aos alunos, que poderão estar num local fisicamente diferente.

## 4.2 - Experiências de outras Universidades

De seguida apresenta-se algumas experiências implementadas noutras universidades e uma simples proposta de aquisição, quando possível:

### 4.2.1 - University of the Sunshine Coast (Austrália)

#### Centro de massa

A posição do centro de massa de um objeto construído através da combinação de formas simples pode ser encontrada somando o momento estático das várias formas e dividindo essa soma pela soma das áreas. Isto pode ser demonstrado utilizando um método muito básico com recortes em cartão das formas simples. O método consiste em prender a forma resultante da junção das outras formas mais simples com um alfinete a um quadro. Nesse alfinete deve estar uma massa suspensa por um fio e deve ser traçado no cartão a linha que o fio produz sobre a forma. Repetir o processo para o alfinete noutra ponto do corpo. O centro de massa será a interseção das linhas;



*Figura 5.1 – Equipamento para determinar a posição de centro de massa retirado de [27]*

**Proposta de aquisição:** este “equipamento” tem um investimento que se pode considerar residual, sendo que os materiais necessários se resumem a cartão, alfinetes, fio e um quadro de cortiça (por exemplo). Além disso, recortar as formas de cartão é um trabalho bastante simples.



## Reações

É possível demonstrar que as reações de apoio numa viga simplesmente apoiada podem ser calculadas através do somatório de momentos fletores, utilizando balanças de cozinha, uma pequena viga de madeira e alguns pesos com os quais se confirmariam os resultados obtidos analiticamente.



*Figura 5.2 - Equipamento para o cálculo de reações retirado de [27]*

**Proposta de aquisição:** adquirir balanças de cozinha e uma pequena peça de madeira que se possa comportar como uma viga é bastante fácil e representará um investimento mínimo, e pesos já existe uma panóplia deles no Laboratório.

## Deformação em vigas

Para o estudo da deformação em vigas, foram construídos cinco modelos diferentes de vigas em alumínio (todos com 1m de comprimento) que são então apoiadas nuns suportes. É colocado um pistão por baixo da viga que permite medir a deformação desta. Os valores obtidos na experiência seriam então comparados com os calculados analiticamente. Esta foi das experiências que os alunos mais gostaram, resultando num elevado grau de interação da parte deles.



*Figura 5.3 - Equipamento para observar a deformação em vigas retirado de [27]*

**Proposta de aquisição:** as bases são muito simples, qualquer peça com alguma estabilidade pode fazer o seu papel, e as vigas de alumínio podem ser produzidas facilmente. Mais uma vez, já existem bastantes pesos no Laboratório, assim como formas de medir a deformação da viga.

## Colunas

Estudar o caso das colunas (elementos esbeltos à compressão), utilizando arames de diferentes materiais (aço, aço macio e alumínio), sendo ainda possível simular várias condições de apoio, de modo a observar os efeitos que estas causam. Assim como em muitas experiências ao longo deste trabalho, os resultados obtidos seriam comparados com os calculados previamente numa forma analítica.



Figura 5.4 – Equipamento para o estudo de colunas retirado de [27]

**Proposta de aquisição:** Não havia muita informação sobre esta experiência em específico, mas fazer algo semelhante não deve ser complicado: as ‘colunas’ serão peças com as mesmas dimensões mas de materiais diferentes e as condições de apoio facilmente podem ser simuladas recorrendo a métodos semelhantes aos dos equipamentos já existentes (apoios com cavilhas, por exemplo). Mais à frente neste, nesta tese, encontram-se outros modelos para o estudo da deformada de colunas.

### 4.2.2 - Nagoya University (Japão)

#### Ações dinâmicas em estruturas

Como já foi mencionado anteriormente, a Engenharia Civil tem como base a estática, mas os fenómenos dinâmicos são igualmente importantes. No entanto, estes, na maioria dos casos, são mais difíceis de compreender, pelo que qualquer apoio didático é especialmente importante. Assim, na Nagoya University, foi desenvolvido um conjunto de experiências e equipamentos chamado Bururu que abrangem fenómenos de vibrações, muito importantes no estudo dos efeitos dos sismos em edifícios. O Bururu pode ser dividido em duas partes: equipamentos educacionais para experiências de vibrações e um *software* simulador em *Flash* (não abordado neste texto).

A primeira parte é um conjunto de seis equipamentos, de dimensões variáveis, sendo que os de maiores dimensões são elétricos. No âmbito desta tese, é apenas abordado o equipamento mais versátil, de dimensões médias, possível de ser transportado com alguma facilidade.

O equipamento consiste numa base que contém um mecanismo que transforma o movimento rotativo de uma manivela num movimento de translação. A base, que serve ainda de contentor para todo o equipamento, contém vários modelos como um pêndulo, uma estrutura de dois andares, uma parede resistente a sismos, contraventamentos, um amortecedor e um simulador de liquefação de solo. É ainda possível combinar vários destes modelos obtendo-se um elevado número de experiências.

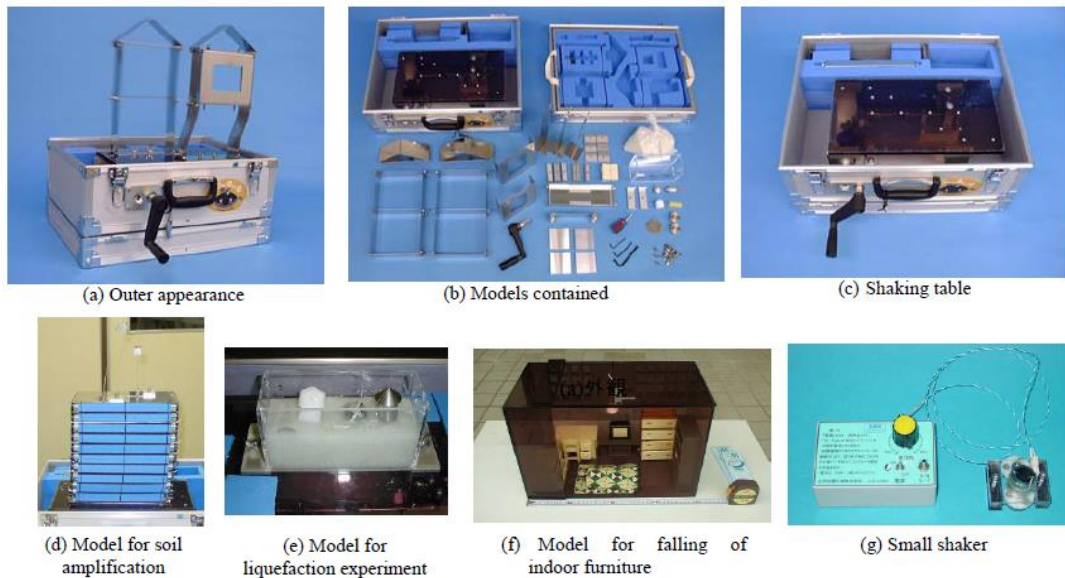


Figura 5.5 – O equipamento Bururu retirado de [8]

**Proposta de aquisição:** não foi possível encontrar informação sobre como adquirir um exemplar. É ainda um modelo algo complexo, pelo que não será tão fácil, como noutros casos, de construir algo semelhante com base na pouca informação disponível.

#### 4.2.3 - FEUP (Portugal)

Num laboratório à parte da sala de aula, é construído um quadro didático dedicado ao ensino da Mecânica Estrutural e Resistência de Materiais. O equipamento é de dimensões consideráveis, sendo que a comunicação é feita de uma forma remota, durante a aula, para as mais variadas demonstrações, utilizando uma câmara PTZ (*pan-tilt-zoom*) via *Skype*. Desta forma, é possível comunicar, explorar, analisar e partilhar informação em tempo real com outro aluno pré-treinado presente no laboratório. Assim, surge um diálogo entre a aula e o laboratório, sendo que o Professor apenas serve como mediador e condutor da apresentação. Para além disso, foi ainda desenvolvida uma ferramenta virtual para complementar a experiência.

Com este equipamento é possível realizar as seguintes experiências:

- Cálculo de reações em vigas isostáticas;
- Cálculo da flecha em vigas;
- Estudar estruturas hiperestáticas e calcular a linha de influência de vigas continuamente apoiadas.



*Figura 5.6 - O equipamento existente na FEUP retirado de [28]*

**Proposta de aquisição:** Para além do investimento para o equipamento, será necessário uma sala e ainda estabelecer a comunicação entre esta e a sala onde a aula estará a decorrer.

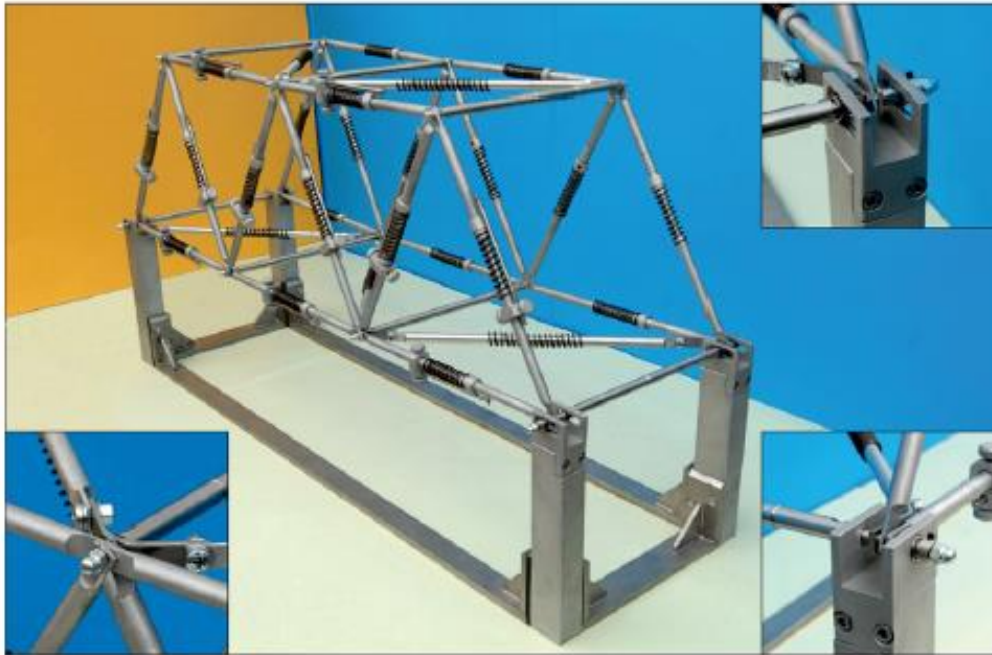
#### 4.2.4 - University of Trento (Itália)

Um dos modelos estruturais mais importantes utilizados na Engenharia Civil são as treliças, que, apesar de serem constituídas apenas por elementos sujeitos a esforço axial, podem, contudo, apresentar uma distribuição desses esforços mais ou menos complexa, isto é, nem sempre é simples prever quais as barras tracionadas e comprimidas. No laboratório do IST existe um equipamento que nos permite estudar uma treliça (isostática ou hiperestática) mas apenas do ponto de vista dos esforços que se geram na estrutura e em 2D, visto que as deformações não são visíveis a olho nu. Na Universidade de Trento foi desenvolvido um modelo 3D com o intuito de demonstrar como uma treliça se deforma quando carregada. Este é constituído por elementos (Figura 5.7) com molas e amortecedores que permitem o seu encurtamento/alongamento, e contêm ainda um pequeno apontador que permite a medição dessas deformações. Os elementos são unidos por junções aparafusadas que, no caso em questão, têm todas as mesmas dimensões.



Figura 5.7 - Dimensões dos elementos da treliça retirado de [1]

Para além disso, a estrutura assenta num suporte que pode simular diferentes condições de apoio: simples ou deslizante. Este modelo, por ser 3D (Figura 5.8), tem a particularidade de demonstrar a necessidade de contraventamento para evitar instabilidade tridimensional, algo que não seria possível com modelos 2D. Aplicando-se um conjunto de pesos à estrutura, semelhantes aos utilizados nos equipamentos presentes no nosso Laboratório, o modelo deforma de forma visível, sendo óbvio quais os elementos que estão à tração ou compressão.

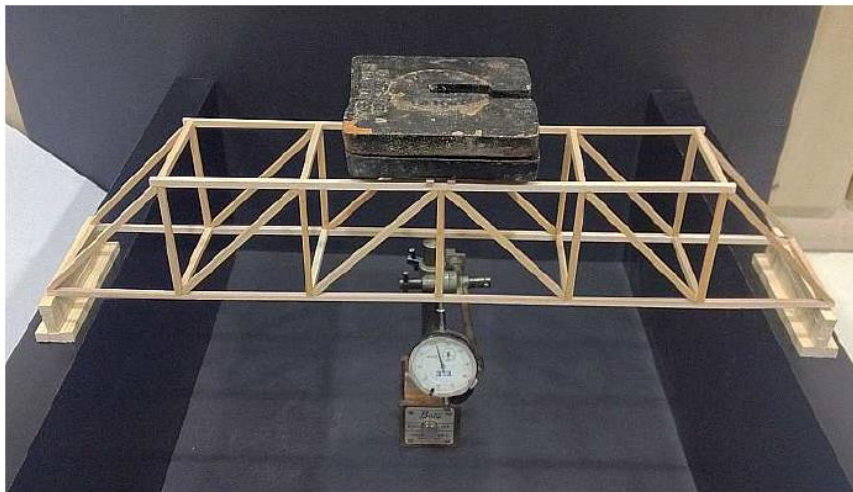


*Figura 5.8 - A treliça 3D retirado de [1]*

**Proposta de aquisição:** Não foi possível encontrar uma forma de obter um exemplar deste equipamento mas, tendo as dimensões e desenho das peças numa forma tão específica, poderá ser possível a sua produção.

#### 4.2.5 - Istambul Kultur University (Turquia)

Ainda relativamente às treliças, neste caso, a abordagem é feita doutra forma, também bastante interessante e que fomenta mais a interação dos alunos: é-lhes pedido que construam treliças recorrendo a elementos de madeira que lhes são fornecidos. Essas treliças são depois testadas com pesos e os alunos tentam analisar que elementos estão à tração ou compressão, visto que, para o material em questão, as deformações não serão tão visíveis como no modelo anterior. Finalmente, é feita uma pequena discussão em grupo sobre os fatores que influenciam a eficiência da treliça, remetendo para os vários modelos criados pelos alunos. Há ainda a possibilidade de se utilizar *softwares* como o *ForcePad* ou o *Pointsketch2D* para analisar como o carregamento se distribui pelos vários elementos.



*Figura 5.9 - Treliça construída com elementos de madeira retirado de [56]*

**Proposta de aquisição:** sendo uma experiência que se baseia na criação da estrutura pela mão dos alunos, seria algo a repetir todos os anos letivos, tendo que se proceder à aquisição de mais material. De qualquer forma, este consiste apenas em peças de madeira e cola, cujo custo é bastante baixo.

#### 4.2.6 - Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil)

Márcio Sequeira de Oliveira desenvolveu “uma nova maneira de estudar e ensinar o comportamento das estruturas”, o projeto Mola. Este consiste num equipamento que demonstra duma forma “tátil e visual” o comportamento de uma estrutura, simulando-o, através de um conjunto de peças moduladas que se ligam por imãs, havendo ainda a possibilidade de tornar algumas ligações rígidas.

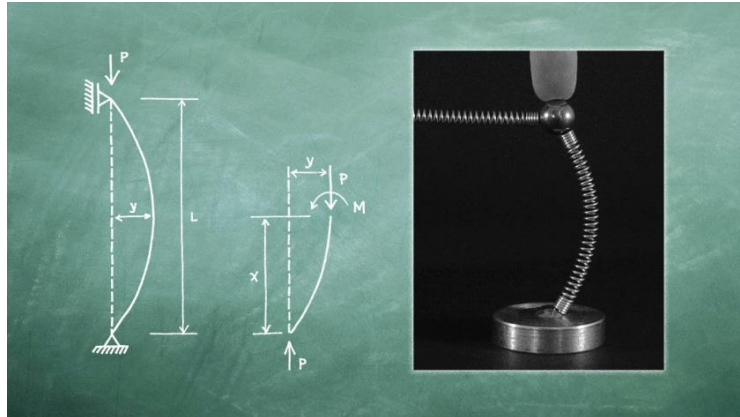


Figura 5.10 - Deformada de uma coluna vista no equipamento Mola retirado de [32]

O kit contém não só o material necessário para construir mais de 100 estruturas diferentes (2D ou 3D) mas também um livro com vários exemplos. Tem ainda a vantagem de ser portátil, e toda a montagem ser feita manualmente, sem dificuldade.

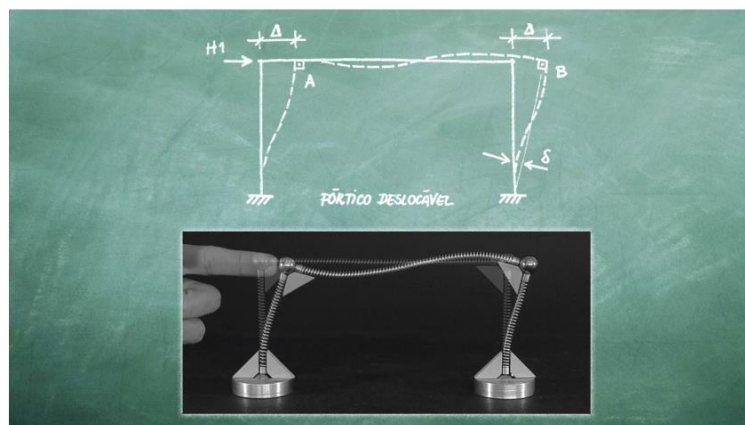


Figura 5.11 - Deformada de um pórtico vista no equipamento Mola retirado de [32]

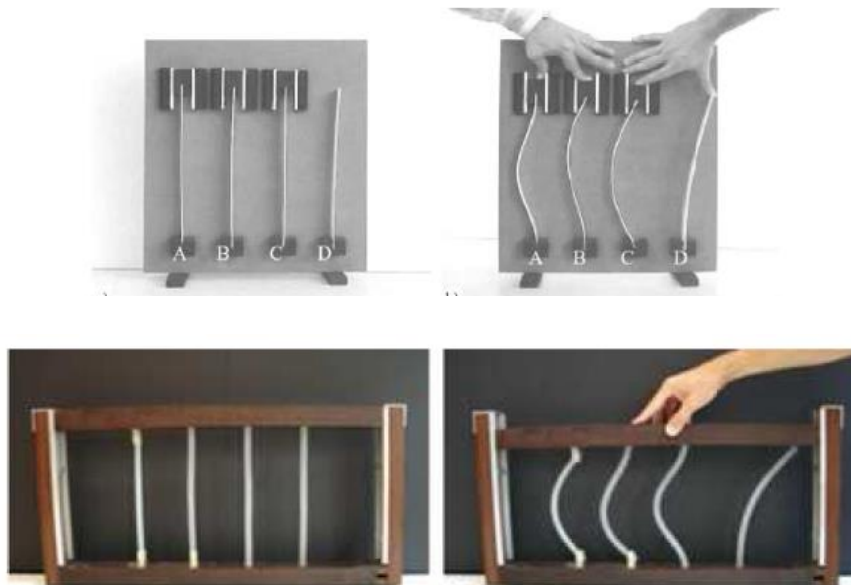
**Proposta para aquisição do material:** De momento o projeto encontra-se na fase final do *Crowdfunding* (<https://www.catarse.me/mola>) utilizado para fundar o projeto.



### 4.3 - Outras Experiências

Por último, numa forma mais sintética, referem-se algumas experiências simples, facilmente reproduzíveis:

#### Modelos de deformação de colunas

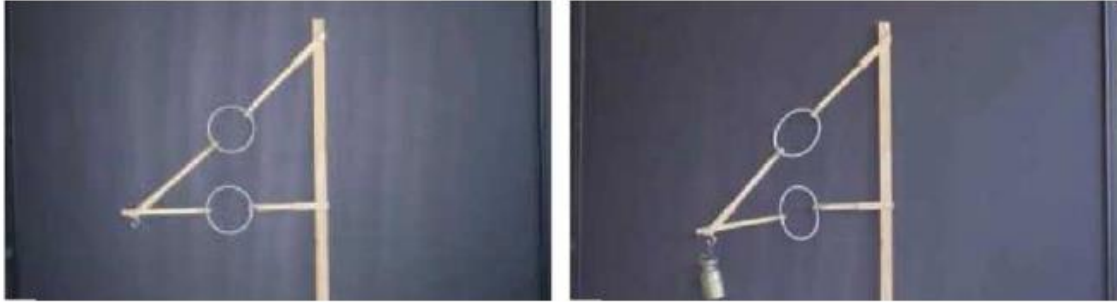


*Figura 5.12 - Exemplos de equipamentos para observar as deformadas de colunas*

Com um sistema simples como os da Figura 5.12, é possível demonstrar o comportamento de colunas à compressão em função das suas condições de apoio. Ambas as soluções são facilmente transportáveis e não implicam trabalhos de montagem, sendo ideais para ser usados durante uma aula.

## Treliças

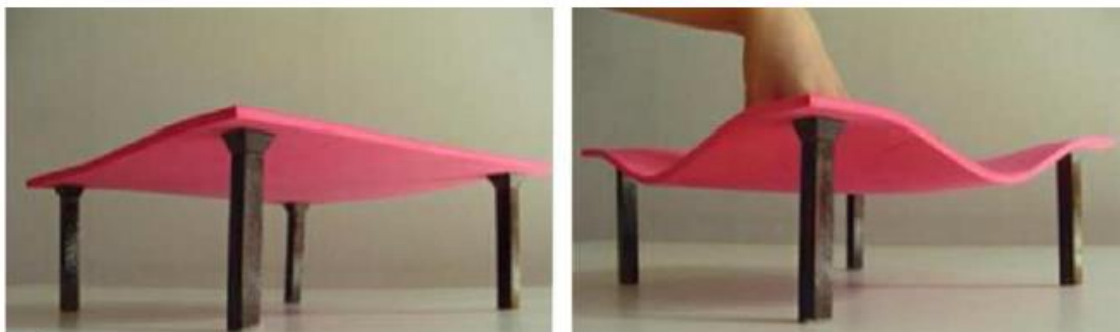
Uma estrutura e equipamento bastante simples como o da Figura 5.13 permite facilmente observar como uma treliça, quando carregada, fica com alguns elementos sujeitos a tração e outros a compressão. Ao aplicar-se um peso na estrutura vê-se claramente o elemento que está à tração, o arco está esticado, e o elemento que está à compressão, o arco está comprimido.



*Figura 5.13 - Modelo de treliça que permite observar que elementos estão à tração e à compressão*

## Lajes

Lajes é talvez uma das matérias mais difíceis de visualizar o que realmente acontece apenas com base na teoria, pelo que experiências como a da Figura 5.14, são especialmente úteis, para além de ser bastante fácil criar algo semelhante. Uma superfície feita de um material maleável e com propriedades elásticas como o neopreno, fixada em quatro apoios capazes de suportar uma pequena carga serve para demonstrar como essa carga, mesmo que pontual, influencia toda a laje.



*Figura 5.14 - Equipamento simulando a ação de uma carga pontual numa laje*

### Modelo de viga de Euler-Bernoulli

Recorrendo a um material maleável e com propriedades elásticas como o neopreno, já mencionado no exemplo anterior, criar uma peça com uma forma prismática, de forma a simular uma viga, permitindo, ao moldar a peça, confirmar que, na hipótese dos pequenos deslocamentos, planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação.

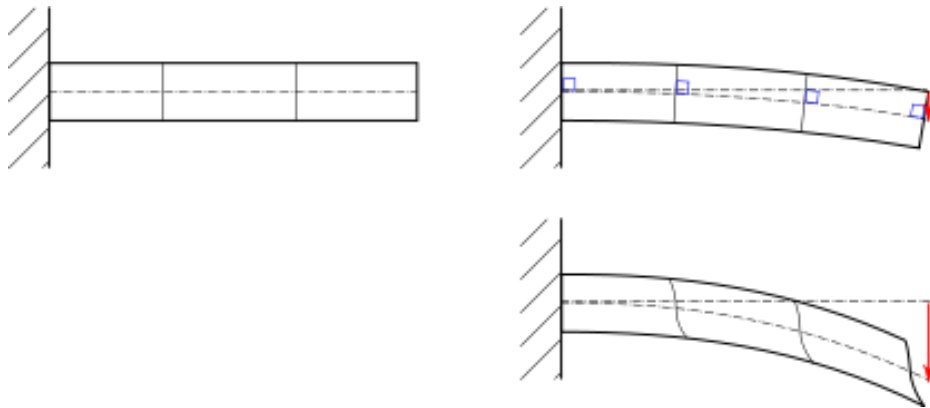


Figura 5.15 - Deformada de uma viga à flexão. Hipótese de pequenos deslocamentos (em cima) e para grandes deslocamentos (em baixo) retirado de wikipedia.com (2015)

### Quantidade de movimento linear

A conservação da quantidade de movimento linear pode ser demonstrado, empiricamente, por um pêndulo de Newton, um pequeno equipamento bastante versátil e cativante que pode ser facilmente transportado para uma sala de aula pelo docente.

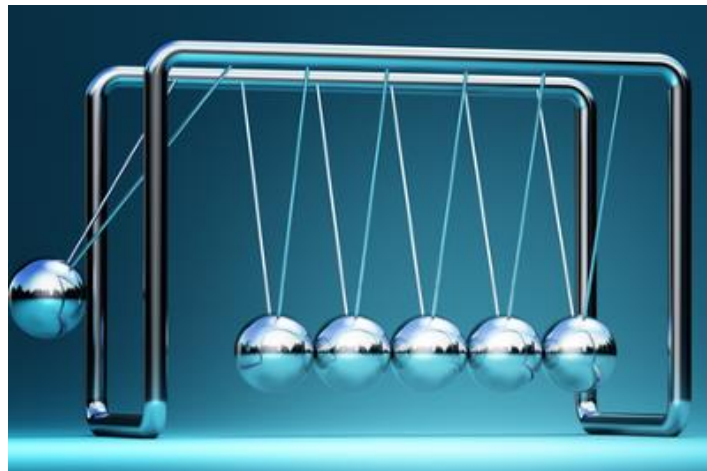


Figura 5.16 - O pêndulo de Newton

### Equilíbrio de forças coplanares

Para demonstrar o equilíbrio de forças coplanares, uma experiência mais simples e transportável do que a que existe no nosso Laboratório pode ser construída recorrendo a dois dinamómetros, clips, pesos, uma régua e um suporte. Assim, constrói-se algo do género da Figura 5.17.

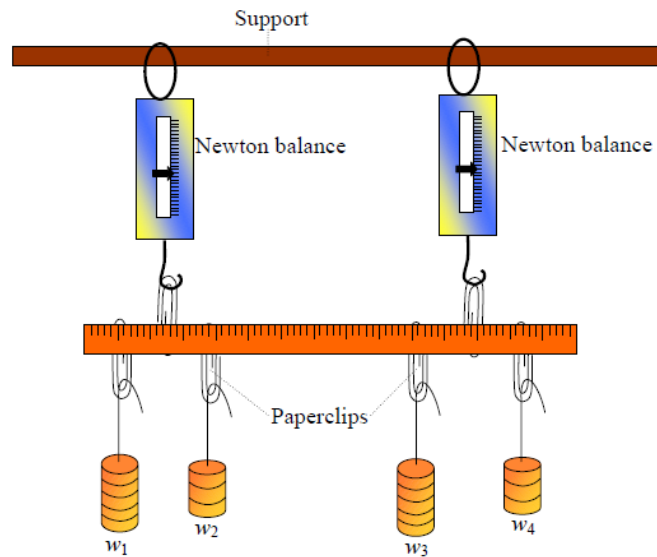


Figura 5.17 - Modelo para demonstrar o equilíbrio de forças coplanares

Primeiro há que determinar a posição do centro de massa da régua e o seu peso, que pode ser feito com um dos dinamómetros. Depois aplica-se uma série de pesos ao longo da régua até que esta fique em equilíbrio, na horizontal. Apontar as leituras dos dinamómetros e a posição e valor de cada peso. O somatório de momentos fletores provocados por todas as forças, no centro de massa, deverá ser zero, havendo portanto equilíbrio, mantendo a estrutura na horizontal.

## 5 - Conclusão

Na atualidade, é cada vez mais importante dinamizar o ensino com recurso a métodos experimentais, transformando a típica aula em algo mais apelativo o que, por sua vez, facilitará a aprendizagem. Com essa ideia em mente, e fazendo uso da constante evolução da tecnologia, é possível recorrer a métodos e equipamentos bastante versáteis, como os existentes no Laboratório de Mecânica Estrutural do IST, para criar experiências simples e cativantes. Terminada a primeira parte desta tese, o Laboratório de Mecânica Estrutural do Instituto Superior Técnico possui agora guias para mais de quarenta experiências que podem ser incluídas no planeamento de várias disciplinas.

A última parte desta tese consistiu numa pesquisa por outras experiências com o intuito de serem, possivelmente, replicadas no curso de Engenharia Civil do IST. A maioria dos resultados foram obtidos através de outras universidades, sendo que esta intenção de dinamizar o ensino já está bastante difundida. Tome-se o exemplo da FEUP, onde a base do problema era como cativar um grande grupo de alunos com *backgrounds* diferentes num ambiente onde a tentação para usar o telemóvel durante a aula era grande devido à internet *wireless*. A solução passou pelo uso da tecnologia para demonstrações didáticas. Para testar a sua eficiência, o equipamento foi utilizado no ensino das linhas de influência aos alunos de 3º ano de Engenharia Civil da FEUP, notando-se uma melhoria de 10% na classificação obtida no exercício relativo a matéria no exame e os alunos deram ainda um excelente *feedback* no que toca ao aumento da facilidade em compreender essa matéria e do interesse na aula.

No exemplo anterior pode-se considerar que o equipamento utilizado é de elevada complexidade, visto necessitar de uma sala própria, câmaras e até uma segunda pessoa para o manipular. No Instituto Superior Técnico, nos laboratórios da Unidade Curricular de Mecânica e Ondas, que não faz parte do plano curricular do curso de Engenharia Civil, também é utilizada uma câmara, com um *software* especial, neste caso não como meio de comunicação entre duas partes mas a própria câmara faz a leitura dos valores da experiência.

Na última década, tem havido uma grande tendência, em especial nos cursos de Engenharia, para o uso da tecnologia no ensino. São várias as Universidades que desenvolveram laboratórios de acesso remoto, como a FEUP, ou até mesmo *softwares* didáticos. Apesar de estes terem obtido bons resultados, no sentido em que as notas dos alunos que lhes tiveram acesso foram melhores que as dos que não tiveram, verificou-se que tal abordagem foi também feita por motivos de economia de tempo e dinheiro. Experiências ao vivo envolvem outro tipo de preparação, quer pela necessidade de mover pessoas, equipamentos ou até mesmo pela necessidade de repor materiais descartáveis. Uma experiência que tenha sido, por exemplo, filmada e complementada com um *software* ou uns *slides*, possui as vantagens de poder ser revista pelos alunos tantas vezes quanto estes quiserem e de ser usada ao longo dos vários semestres, mas a experiência ao vivo é o método que obtém melhores resultados. Assim, o principal objetivo do capítulo anterior foi a pesquisa de experiências ao vivo que sejam simples em termos de transporte e utilização e de baixo custo. Uma experiência utilizada para explicar uma matéria complexa não tem necessariamente de também ser complexa, sendo que se for complementada com *slides* ou com a própria palestra do Professor durante a aula, pode ser o suficiente para os alunos conseguirem compreender a matéria muito mais fácil e rapidamente.

Na University of Sunshine Coast, Austrália, foram desenvolvidas algumas experiências deste tipo, mais simples e ao vivo, de modo a promover a interação dos alunos. Os japoneses, em Nagoya, desenvolveram um equipamento um pouco mais complexo mas de uma utilidade enorme, sendo que não só faculta um elevado número de experiências como aborda um dos temas com que os alunos têm mais dificuldade. O equipamento Mola (Brasil) é sem dúvida bastante cativante, tendo ainda a particularidade de ser facilmente transportável, como pretendido.

Em suma, julga-se que este trabalho poderá contribuir para que, no âmbito do curso de Engenharia Civil do IST, se dinamize um pouco mais o uso da componente laboratorial no ensino da mecânica estrutural, recorrendo aos guias que foram desenvolvidos ao longo desta tese e, se possível, adquirindo alguns equipamentos mencionados no último capítulo ou construindo algo semelhante.

## 6 - Referências

1. Bigoni D. et al., "A Teaching Model for Truss Structures", Trento, 2012
2. Cabrita Neves I., "O Princípio dos Trabalhos Virtuais", Lisboa, 2002
3. Cabrita Neves I., "Teoria dos Sistemas de Vectores", Lisboa, 2002
4. Camotim D., "Apontamentos de Esforços em Peças Lineares", Lisboa, 1990
5. Camotim D., "Apontamentos de Tração e Compressão", Lisboa, 2009
6. Camotim D., Dinis P. B., "Apontamentos de Mecânica dos Corpos Deformáveis", Lisboa, 2008
7. Correia A. A., "Vibrações de Sistemas com 1 Grau de Liberdade", Lisboa, 2007
8. Fukuwa N. et al., "Development of Vibration Experiment Education Materials for Structural and Soil Dynamics", Nagoya
9. Glez J. H. C. et al., "Material Fotoelastico para estúdio de elementos reforçados com acero", 2007
10. Gomes A., Ferreira Pinto A. P., "Materiais de Construção I Apontamentos da Aulas Teóricas", Lisboa, 2010
11. G.U.N.T. Hamburg, Equipment for Engineering Education, "SE 111 Universal Test Frame and Stand, Steel Tube Version", Barsbüttel
12. G.U.N.T. Hamburg, Equipment for Engineering Education, "TM 150.01 Vibration Sensor for Universal Vibration System", Barsbüttel
13. G.U.N.T. Hamburg, Equipment for Engineering Education, "TM 151 Sensor Supply Module", Barsbüttel
14. G.U.N.T. Hamburg, Equipment for Engineering Education, "TM 155 Free and Forced Vibration Apparatus", Barsbüttel
15. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM1 Moment Distribution Coefficient", Hampshire
16. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM2 Displacement Fixing Moments", Hampshire
17. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM3 Fixed End Moments", Hampshire
18. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM4 Maxwell-Betti theorems", Hampshire
19. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM5 Muller-Breslau: End Moment", Hampshire
20. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM6 Muller-Breslau: Internal Moment", Hampshire
21. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM7 Muller-Breslau: Reactions", Hampshire
22. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HDM8 Lecturers Demonstration Kit", Hampshire
23. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HST1 Hi-Plan 2 Universal Frame and Stand", Hampshire
24. Hi-Tech Education, "Instruction Manual HST ACE 1 Equilibrium of Forces", Hampshire
25. Leitão V., "Mecânica II Apontamentos", Lisboa, 2014
26. Leitão V., "Mecânica I Apontamentos de Cinemática", Lisboa, 2015
27. Lucke T., "Using Hands-On Activities to Engage Students in Engineering Mechanics", Maroochydhore

28. Marques J. C. et al., "Structural Mechanics: A Didactic Experimental Set-Up and Its Virtual Tool", Porto
29. Martins J. A. C., "Apontamentos de Equações de Lagrange", Lisboa
30. Página da Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Main\\_Page](https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page), consultada várias vezes ao longo do período de escrita desta tese
31. Pires E. B., Camotim D., Dinis P. B., "Apontamentos de Flexão Elástica de Peças Lineares", Lisboa, 2010
32. Sequeira de Olivera M., "Modelo Estrutural Qualitativo para Pré-Avaliação do Comportamento de Estruturas Metálicas", Ouro Preto, 2008
33. Spinelli H. A., "Aplicação da fotoelasticidade na análise estrutural de uma junta rebitada de uso aeronáutico", São Paulo
34. TASK Technology And Science Kits, "Airtrack – MM4", Nottingham
35. TASK Technology And Science Kits, "Dynamics Kit – MM2", Nottingham
36. TASK Technology And Science Kits, "Inclined Plane Kit – MM3", Nottingham
37. TASK Technology And Science Kits, "Simple Mechanisms Kit – MM7", Nottingham
38. TASK Technology And Science Kits, "TASK Universal Frame – UF", Nottingham
39. TQ Education and Training Ltd, "STR1/STR1A Structures Test Frame and Digital Force Display", Nottingham
40. TQ Education and Training Ltd, "STR2 Bending Moment in a Beam: Lecturer's Guide", Nottingham
41. TQ Education and Training Ltd, "STR2 Bending Moment in a Beam: Student's Guide", Nottingham
42. TQ Education and Training Ltd, "STR3 Shear Force in a Beam: Lecturer's Guide", Nottingham
43. TQ Education and Training Ltd, "STR3 Shear Force in a Beam: Student's Guide", Nottingham
44. TQ Education and Training Ltd, "STR4 Deflections of Beams and Cantilevers: Lecturer's Guide", Nottingham
45. TQ Education and Training Ltd, "STR4 Deflections of Beams and Cantilevers: Student's Guide", Nottingham
46. TQ Education and Training Ltd, "STR5 Bending Stress in a Beam: Lecturer's Guide", Nottingham
47. TQ Education and Training Ltd, "STR5 Bending Stress in a Beam: Student's Guide", Nottingham
48. TQ Education and Training Ltd, "STR13 Continuous and Indeterminate Beams: Lecturer's Guide", Nottingham
49. TQ Education and Training Ltd, "STR13 Continuous and Indeterminate Beams: Student's Guide", Nottingham
50. TQ Education and Training Ltd, "STR17 Redundant Truss Experiment: Lecturer's Guide", Nottingham
51. TQ Education and Training Ltd, "STR17 Redundant Truss Experiment: Student's Guide", Nottingham
52. TQ Education and Training Ltd, "STR18 Frame Deflections and Reactions: Lecturer's Guide", Nottingham



53. TQ Education and Training Ltd, "STR18 Frame Deflections and Reactions: Student's Guide", Nottingham
54. TQ Education and Training Ltd, "STR2000 Automatic Data Acquisition (ADA) Unit User Guide", Nottingham
55. Vishay Research & Education "The Stress-Opticon – Instruction Manual", Romulus, Michigan
56. Yazici G., Seçkin E., "A Learning By Doing Approach in Teaching the Fundamentals of the Structural Design of Trusses", Istanbul

## QUADROS DOS ENSAIOS

## 2.1.2 - Equipamento STR3 - Esforço transversal numa viga

### Resultados

#### Experiência 1 - Variação do esforço transversal com o incremento duma carga pontual

Massa (g)	Carregamento (N)	Transverso experimental (N)	Transverso teórico (N)
0			
100			
200			
300			
400			
500			

Tabela 2.1

#### Experiência 2 - Variação do esforço transversal para vários carregamentos diferentes

Figura	$W_1$ (N)	$W_2$ (N)	Força (N)	Transverso experimental (N)	$R_A$ (N)	$R_B$ (N)	Transverso teórico (N)
2.1	3,92						
2.2	1,96	3,92					
2.3	4,91	3,92					

Tabela 2.2

### 2.1.3 - Equipamento STR2 - Momento fletor numa viga

#### Resultados

##### Experiência 1 - Variação do momento fletor no ponto de aplicação da carga

Massa (g)	Carregamento (N)	Força (N)	Momento experimental (Nm)	Momento teórico (Nm)
0				
100				
200				
300				
400				
500				

Tabela 3.1

##### Experiência 2 - Variação do momento fletor aplicando cargas noutros pontos da viga

Figura	$W_1$ (N)	$W_2$ (N)	Força (N)	Momento experimental (Nm)	$R_A$ (N)	$R_B$ (N)	Momento teórico (Nm)
2.1	3,92						
2.2	1,96	3,92					
2.3	4,91	3,92					

Tabela 3.2

## 2.1.4 - Equipamento MM3 - Plano Inclinado

### Resultados

Experiência 1 - Um corpo em aceleração ao longo duma rampa

Inclinação	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )
5	
10	
15	
20	
25	

Tabela 4.1

Massa do carrinho:

## 2.2.2 - Equipamento MM4 - Airtrack

### Resultados

#### Experiência 1 - Aceleração devido à gravidade

Massa (g)	Velocidade 1 (m/s)	Velocidade 2 (m/s)	$\Delta t$ (s)	Aceleração (m/s <sup>2</sup> )	(M+m)a
20					
40					
60					
80					
100					

Tabela 6.1

A massa do veículo, M, é 200g como já mencionado no método.

Expressão para o cálculo da aceleração:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (6.8)$$

**Experiência 2A - Colisão Elástica**

Massa (kg)	$v_{1i}$ (m/s)	$v_{2i}$ (m/s)	$v_{1f}$ (m/s)	$v_{2f}$ (m/s)

Tabela 6.2

Nota: só existe uma coluna para a massa porque esta deve ser igual para ambos os veículos

Massa (kg)	$p_{1i}$ (kgm/s)	$p_{2i}$ (kgm/s)	$p_{1f}$ (kgm/s)	$p_{2f}$ (kgm/s)

Tabela 6.3

A Tabela 6.3 surge na continuação da Tabela 6.2. De modo a confirmar a conservação do momento linear, tal deve ser verificado para cada caso:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f} \quad (6.9)$$

### Experiência 2B - Colisão Inelástica

$M_{1i}$ (kg)	$M_{2i}$ (kg)	$v_{1i}$ (m/s)	$v_{2i}$ (m/s)	$p_{1i}$ (kgm/s)	$p_{2i}$ (kgm/s)

Tabela 6.4

$M_f$ (kg)	$v_f$ (m/s)	$p_f$ (kgm/s)

Tabela 6.5

Quando há colisão inelástica os corpos unem-se, seguindo como um só após isso, pelo que nesta experiência não é tão importante que os veículos tenham a mesma massa. As massas de ambos os veículos vão-se somar e portanto, para que se confirme a conservação do momento linear:

$$p_f = p_{1i} + p_{2i} \quad (6.10)$$



## 2.2.3 - Equipamento MM2 - Kit de Dinâmica

### Resultados

#### Experiência 1 - O Pêndulo Simples

Comprimento do pêndulo (m)	10 oscilações (s)	Período - 1 oscilação (s)

Tabela 7.1

#### Experiência 2 - Mola Oscilante

Massa (Kg)	10 oscilações (s)	Período - 1 oscilação (s)	Frequência (Hz)
0,1			
0,2			
0,3			
0,4			
0,5			

Tabela 7.2

### 3.1.2 - Equipamento STR5 - Estado de tensão em vigas à flexão

#### Resultados

##### Experiência - Flexão numa viga

Indicador de tensão	Carregamento (N)					
	0	100	200	300	400	500
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

Tabela 10.1

Indicador de tensão	Momento fletor (Nm)					
	0	17,5	35	52,5	70	87,5
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					
5	0					
6	0					
7	0					
8	0					
9	0					

Tabela 10.2

Indicador de tensão	Posição vertical nominal (mm)	Posição vertical real (mm)	Momento fletor (Nm)			
			0			
1	0					
2,3	6,4					
4,5	23					
6,7	31,7					
8,9	38,1					

Tabela 10.3

### 3.1.3 - Equipamento STR13 - Viga contínua

#### Resultados

##### Experiência 1A - Reações de apoio numa viga simplesmente apoiada

Distância A (mm)	Carregamento W (N)	R <sub>A</sub> (N)	R <sub>B</sub> (N)	R <sub>A</sub> + R <sub>B</sub> (N)
40	4,9			
80	4,9			
120	4,9			
160	4,9			
200	4,9			
240	4,9			
280	4,9			
320	4,9			
360	4,9			

Tabela 11.1

Distância A (mm)	Carregamento W (N)	R <sub>A</sub> (N)	R <sub>B</sub> (N)	R <sub>A</sub> + R <sub>B</sub> (N)
40	4,9			
80	4,9			
120	4,9			
160	4,9			
200	4,9			
240	4,9			
280	4,9			
320	4,9			
360	4,9			

Tabela 11.2

### Experiência 1B - Flecha numa viga simplesmente apoiada

Massa (g)	Carregamento W (N)	Flecha (mm)
0	0	
100	0,98	
200	1,96	
300	2,94	
400	3,92	
500	4,9	

Tabela 11.3

Vão da viga L (mm)	$L^3$	Flecha (mm)
400		
350		
300		
250		
200		

Tabela 11.4

**Experiência 2 - Reações numa viga encastrada-apoiada e bi-encastrada**

Distância A (mm)	Carregamento W (N)	Força no braço de momento (N)	$M_A$ (N)	$R_B$ (N)
40	4,9			
80	4,9			
120	4,9			
160	4,9			
200	4,9			
240	4,9			
280	4,9			
320	4,9			
360	4,9			

*Tabela 11.5*

Distância A (mm)	Carregamento W (N)	Força no braço de momento (N)	$M_A$ (N)	$R_B$ (N)
40	4,9			
80	4,9			
120	4,9			
160	4,9			
200	4,9			
240	4,9			
280	4,9			
320	4,9			
360	4,9			

*Tabela 11.6*

### 3.1.4 - Equipamento STR4 - Determinação de deslocamentos em vigas

#### Resultados

#### Experiência 1 - Flecha de uma viga encastrada

Massa (g)	Flecha prática (mm)	Flecha teórica (mm)
0		
100		
200		
300		
400		
500		

Tabela 12.1

Massa (g)	Flecha prática (mm)	Flecha teórica (mm)
0		
100		
200		
300		
400		
500		

Tabela 12.2

Massa (g)	Flecha prática (mm)	Flecha teórica (mm)
0		
100		
200		
300		
400		
500		

Tabela 12.3

## Experiência 2 - Flecha de uma viga simplesmente apoiada

Massa (g)	Flecha prática (mm)	Flecha teórica (mm)
0		
100		
200		
300		
400		
500		

Tabela 12.4

Distância entre os apoios (mm)	Flecha (mm)
200	
250	
300	
350	
400	
450	
500	

Tabela 12.5



### Experiência 3 - A deformada

Posição do indicador – x (mm)	Leitura descarregada	Leitura carregada	Flecha (mm)
0			
20			
40			
60			
80			
100			
150			
200			
250			
300			
350			
400			
450			
500			
550			
600			

Tabela 12.6

**Experiência 4 - Flexão circular**

Material: _____		E: _____ N/m <sup>2</sup>	b: _____ mm	d: _____ mm	I: _____ m <sup>4</sup>
Massa em cada extremo (g)	Flecha (mm)	Momento aplicado (Nm)	Raio de curvatura (m)	1/R	MII (x 10 <sup>9</sup> )
0					
100					
200					
300					
400					
500					

Tabela 12.7

Material: _____		E: _____ N/m <sup>2</sup>	b: _____ mm	d: _____ mm	I: _____ m <sup>4</sup>
Massa em cada extremo (g)	Flecha (mm)	Momento aplicado (Nm)	Raio de curvatura (m)	1/R	MII (x 10 <sup>9</sup> )
0					
100					
200					
300					
400					
500					

Tabela 12.8

Material: _____		E: _____ N/m <sup>2</sup>	b: _____ mm	d: _____ mm	I: _____ m <sup>4</sup>
Massa em cada extremo (g)	Flecha (mm)	Momento aplicado (Nm)	Raio de curvatura (m)	1/R	MII (x 10 <sup>9</sup> )
0					
100					
200					
300					
400					
500					

Tabela 12.9

### 3.1.5 - Equipamento STR18 - Flecha e reações dum pórtico

#### Resultados

##### Experiência 1 - Análise dum pórtico sem deslocamento horizontal ao nível do montante

Massa (g)	Reação Horizontal, $H_E$ (N)	Força do Momento (N)	Reação de Momento, $M_A$ (Nm)
0	0	0	0
100			
200			
300			
400			
500			

Tabela 13.1

## Experiência 2 - Análise dum pórtico com deslocamento horizontal ao nível do montante

### Parte A

Massa (g)	Reação Horizontal, $H_E$ (N)	Força do Momento em A (N)	Reação de Momento, $M_A$ (Nm)	Reação Horizontal, $H_A$ (N)	Força do Momento em E (N)	Reação de Momento, $M_E$ (Nm)
0	0	0	0	0	0	0
100						
200						
300						
400						
500						

Tabela 13.2

Massa (g)	Deslocamento horizontal do pórtico (mm)
0	0
100	
200	
300	
400	
500	

Tabela 13.3

### Parte B

Massa (g)	Reação Horizontal, $H_E$ (N)	Força do Momento em A (N)	Reação de Momento, $M_A$ (Nm)	Reação Horizontal, $H_A$ (N)	Força do Momento em E (N)	Reação de Momento, $M_E$ (Nm)	Deslocamento horizontal do pórtico (mm)
500 (4,9 N)							

Tabela 13.4

Massa (g)	Reação Horizontal, $H_E$ (N)	Força do Momento em A (N)	Reação de Momento, $M_A$ (Nm)	Reação Horizontal, $H_A$ (N)	Força do Momento em E (N)	Reação de Momento, $M_E$ (Nm)	Deslocamento horizontal do pórtico (mm)
500 (4,9 N)							

Tabela 13.5

### 3.2.2 - Equipamento STR 17 - Treliça

#### Resultados

#### Experiência 1 - Esforços numa treliça isostática

Carregamento (N)	Deformação nos elementos ( $\mu\epsilon$ )								Deslocamento (mm)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
0						0			
50						0			
100						0			
150						0			
200						0			
250						0			

Tabela 15.1

Carregamento (N)	Deformação nos elementos ( $\mu\epsilon$ )							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
50						0		
100						0		
150						0		
200						0		
250						0		

Tabela 15.2

Elemento	Esforço experimental (N)	Esforço teórico (N)
1		
2		
3		
4		
5		
7		
8		

Tabela 15.3

**Experiência 2 - Esforços numa treliça hiperestática**

Carregamento (N)	Deformação nos elementos ( $\mu\epsilon$ )								Deslocamento (mm)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
0									
50									
100									
150									
200									
250									

Tabela 15.4

Carregamento (N)	Deformação nos elementos ( $\mu\epsilon$ )							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
50						0		
100						0		
150						0		
200						0		
250						0		

Tabela 15.5

Elemento	Esforço experimental (N)	Esforço teórico (N)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

Tabela 15.6

Elemento	Comprimento	f	n	fnl	n <sup>2</sup> l	Pn	Pn+f
1	1						
2	1						
3	1						
4	1						
5	1						
6	1.414						
7	1.414						
8	1.414						
<b>TOTAL</b>							

Tabela 15.7