Gravitoelectromagnetismo:
Um Novo Teste da Relatividade Geral

Vasco Miguel Roldão Manteigas

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Física Tecnológica

Jurí

Presidente: Professora Ana Maria Vergueiro Monteiro Cidade Mourão
Orientação: Professor Vítor Manuel dos Santos Cardoso
Vogal: Professor Paolo Pani

Fevereiro de 2014

Resumo:

A presente dissertação serve de introdução a um modelo de gravitação que é um caso particular da Teoria da Relatividade Geral que foi desenvolvido para explicar de forma satisfatória os efeitos gravíticos criados por corpos celestes em rotação.

Este modelo foi baptizado de Gravitoelectromagnetismo, porque a aproximação aplicada nessa teoria baseada na Relatividade Geral recria um conjunto de equações similares às Equações de Maxwell do Electromagnetismo.

Nesta dissertação mostraremos como podemos derivar o formalismo gravitoelectromagnético a partir da linearização da Teoria da Relatividade Geral. Salienta-se que o modelo gravitoelectromagnético é uma analogia formal com a electrodinâmica clássica, e cria uma base teórica fundamental para o estudo da precessão geodésica de De Sitter e da precessão de Lense-Thirring.

A melhor evidência experimental dos efeitos gerados pelo campo gravito-magnético resultaram da análise dos dados experimentais obtidos por vários satélites em órbita da Terra, como o LAGEOS e OPTIS, mas somente uma sonda dedicada conhecida por Gravity Probe B, conseguiria obter uma medição experimental da precessão de Lense-Thirring e De Sitter.

Mashhoon também explorou uma delicada fronteira entre a Gravidade e a Mecânica Quântica, ao conjecturar um efeito gravitacional similar ao efeito de Stern-Gerlach que Mashhoon prevê que exista na interacção entre partículas com spin e o campo gravitomagnético da Terra.

Este fenómeno pode ser derivado a partir da teoria de Einstein-Cartan com a quantificação do momento angular, mas trata-se de um resultado que iremos referir brevemente como uma curiosidade.

Conceitos: Teoria da Relatividade Geral, Gravito-electromagnetismo, Precessão de Lense-Thirring, Precessão de De Sitter, Gravity Probe B, Efeito de Stern-Gerlach Gravito-magnético.

Abstract:

This thesis was written as a brief introduction of a gravitation model that works as an approximation of General Relativity Theory to explain some gravitational effects of spinning celestial bodies, which some researchers called Gravitoelectromagnetism because of the similarity of the field equations with those of Maxwell's theory of Electromagnetism.

The main sucess of this model was to explain the geodetic precession (De Sitter) and frame-dragging precession (Lense-Thirring), which can be derived from the Linearized Einstein's Field Equations, and reinterpreted from the Gravitoelectromagnetism framework.

Experimental evidence of gravitomagnetic effects was hinted by experimental data from several satelites orbiting the Earth, like the LAGEOS and OPTIS, but a highly precise measurement was only achived by a custom probe labeled Gravity Probe B, which gave us a better measurement of Lense-Thirring and De Sitter precession.

Mashhoon's works on Gravitoelectromagnetism hinted some possible effects in Particle Physics, since he predict a Stern-Gerlach like effect, since the gravitomagnetic field can couple the particle's spin in the same way as the magnetic field with the spin like the conventional Stern-Gerlach effect. Using the Einstein-Cartan's Theory and the quantification of angular momentum, this conjecture is physically consistent, but deserves a little discussion as a curiosity.

Keywords: General Relativity, Gravitoelectromagnetism, Lense-Thirring Precession, De Sitter Precession, Gravity Probe B, Gravitomagnetic Stern-Gerlach Effect.

Índice do Dissertação

Introdução: O que é o Gravitoelectromagnetismo?

O Gravitoelectromagnetismo (GEM) é um modelo de Gravitação desenvolvido nos trabalhos de Bahram Mashhoon [1] para estudar determinados efeitos previstos pela Teoria da Relatividade Geral (RG), quando restringimos perturbações da métrica na primeira ordem de expansão.

Este termo foi cunhado porque podemos criar um conjunto de “Equações de Maxwell” para este caso particular da RG quando aplicamos um determinado conjunto de aproximações e definições formais que são similares à teoria da electrodinâmica clássica, embora não sejam mais que uma reinterpretação formal das equações linearizadas derivadas da Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein.

A principal motivação deste modelo de Gravitação é estender o campo Newtoniano gerado pela massa de um corpo celeste com um novo campo gravitomagnético criado pelo movimento intrínseco do mesmo astro.

Historicamente, a ideia da existência de um campo gravitomagnético gerado pelos corpos celestes ocorreu nos finais do século XIX, quando Oliver Heaviside propos generalizar a Teoria de Newton ao introduzir um campo vectorial com características similares ao campo magnético, mostrando que esta hipótese surge naturalmente quando admitimos que a gravidade se propaga como um campo com velocidade finita [2].

A ideia original de O. Heaviside seria tentar explicar as anomalias observadas na órbita de Mercúrio, e mais de 20 anos depois Einstein mostrou que o modelo de Heaviside estava mais perto da realidade que os astrofísicos julgavam. Einstein também derivou o campo gravito-electromagnético naturalmente das equações da Relatividade Geral [1].

A divulgação do modelo do Gravito-electromagnetismo (GEM) gerou, infelizmente, alguns trabalhos científicos patológicos (registando alguns num nível pseudo-científico), levando a que a sua divulgação crie alguma confusão entre o seu verdadeiro significado, que é um caso particular da Relatividade Geral sobre um formalismo que imita o Electromagnetismo.

Esta dissertação principia pela revisão das bases da Teoria da Relatividade Geral, para justificar a determinação da primeira ordem de expansão das respectivas equações de campo.

Mostraremos que a partir das equações linearizadas da RG podemos criar um conjunto logicamente coerente de definições formais que vão derivar as "Equações de Maxwell" do GEM. São estas equações que formam o cerne do modelo gravito-electromagnético.

Posteriormente, discutiremos os efeitos gravitomagnéticos previstos por esta teoria, destacando os efeitos de Lense-Thirring, de De Sitter e outros fenómenos relacionados, utilizando o quanto possível os dois formalismos (GEM e RG) conforme a sua validade.

Também discutiremos as principais experiências lançadas para estudar estes importantes efeitos da Relatividade Geral, quando restringidas à primeira ordem de expansão.

Dada a sua curiosidade e importância, o próprio modelo gravitoelectromagnético serviu de motivação para um conjunto de experiências futuras destinadas a testar a Teoria da Relatividade Geral, quando ultrapassamos o domínio das aproximações de primeira ordem. Mas esse tema não faz parte do âmbito deste trabalho.

No entanto vamos explorar um resultado teórico interessante que Mashhoon [1] publicou a respeito de uma experiência conceptual inspirada na célebre experiência de Stern-Gerlach com o spin, usando o campo gravito-magnético no lugar do magnético.

A explicação "semi-clássica" deste fenómeno pode ser interpretado como uma alusão superficial da "gravidade quântica", porque o efeito de Stern-Gerlach só pode ser explicado pela Mecânica Quântica. Independentemente do método experimental futuro, esta hipótese descrita por Mashhoon seria genuinamente o primeiro efeito gravítico quântico que podíamos determinar experimentalmente [1].

Dado o carácter peculiar desta previsão teórica, será estudada num capítulo próprio e remetido como uma curiosidade (capítulo 5).

1. Derivação das "Equações de Maxwell" do Modelo Gravitoelectromagnético

O primeiro passo para construir o modelo gravito-electromagnético descrito por Mashhoon [1], depende da demonstração de que a linearização das Equações de Campo da Teoria da Relatividade Geral de Einstein resultem um conjunto de "Equações de Maxwell" que justifique a analogia com a Electrodinâmica Clássica.

Equações de Campo da Teoria da Relatividade Geral (breve revisão)

Para conceptualizar a demonstração do GEM iremos rever os conceitos fundamentais da Teoria da Relatividade Geral que estão presentes em qualquer livro de RG.

Nesta dissertação vamos seguir preferencialmente o texto de Sean M. Carroll [3] que é adequado para justificar as definições e procedimentos que iremos aplicar ao longo desta secção.

As equações fundamentais da Teoria da Relatividade Geral são as equações de campo de Einstein [3]:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

Segundo (1.1), trata-se de uma equação que relaciona a métrica com a matéria, determinando assim os efeitos recíprocos entre elas.

No lado direito da equação, define-se o tensor energia-momento, que na Astrofísica (mais comum na Cosmologia) é comum admitir o modelo de um corpo fluído perfeito sem pressão [3] porque numa escala cósmica, a maioria dos corpos celestes em movimento são adequadamente descritas por isso.

Assim, o tensor energia-momento será determinado pela seguinte definição:

$$T^{\mu\nu}=\rho\, u^{\mu}\, u^{\nu} \tag{1.2}$$

Geralmente a densidade ρ depende do raio do objecto, do tempo ou de outras coordenadas que o definem no espaço. Como estamos a operar no limite não-relativista, os tetra-vectores da velocidade e posição podem ser aproximados por:

$$u^{\sigma}=\frac{dx^{\sigma}}{d\tau}\approx\frac{1}{c}\frac{dx^{\sigma}}{dt} \tag{1.3}$$

$$x^{\sigma}=(ct,\vec{x}) \tag{1.4}$$

Relativamente aos tensores presentes no lado esquerdo da equação (1.1), estes correspondem aos tensores fundamentais presentes na Geometria Diferencial, que podemos aqui recordar [3]:

Tomando a métrica local $g_{\mu\nu}$ como a variável fundamental do sistema físico, podemos a partir desta métrica definir a conexão de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\rho\lambda}\left(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}g_{\lambda\mu}-\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}\right) \tag{1.5}$$

A curvatura local do sistema físico é calculável a partir do tensor de Riemann:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}=\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}-\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}+\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}-\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{1.6}$$

Pode-se verificar em [3] que o tensor de Riemann é o equivalente a um comutador de derivadas covariantes de um potencial de gauge, tomando a métrica local no lugar do potencial.

O tensor de Riemann possuí várias simetrias internas, pelo que justifica que a principal contracção do tensor de Riemann seja o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu}=R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{1.7}$$

Por fim, resta introduzir o escalar de Ricci:

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \tag{1.8}$$

Na Teoria da Relatividade Geral, a representação explícita dos tensores (1.5) a (1.8) serve apenas de referência para os cálculos das equações de campo, e são uma forma de evitar escrever explicitamente o emaranhado de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem da métrica, sem o qual dificultaria as aplicações da teoria.

Linearização dos Tensores da Geometria Diferencial (revisão)

Segundo a Relatividade Geral, a métrica local actua formalmente como um potencial tensorial, porque se trata de um tensor de segunda ordem, tornando a métrica o potencial fundamental da interacção gravitacional.

O Gravitoelectromagnetismo não é mais que um formalismo matemático em relação às Equações de Einstein linearizadas. Para deduzir as respectivas equações, temos que aplicar uma perturbação linear ao potencial gravitacional, que segundo a RG trata-se da própria métrica local.

Como a derivação das Equações de Einstein linearizadas está devidamente fundamentado em [3], vamos resumir os cálculos ao essencial.

Para derivar a equação de campo da RG linearizada, vamos admitir que o potencial gravítico obedece ao limite não-relativista $(v/c \to 0)$ e para um observador localizado numa distância superior ao raio da fonte (R>>r), o potencial pode ser visto como uma perturbação da métrica de fundo de Minkowski. A aplicação desta condição relativamente ao tensor de métrica deve ter em atenção a sua forma covariante ou contravariante [1,3]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.9}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{1.10}$$

A métrica local é constituída pela métrica de fundo de Minkowski mais uma perturbação que seja muito menor que o determinante de uma matriz unitária:

$$\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1), |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{1.11}$$

A interpretação deste potencial é simples: estamos a cortar perturbações da métrica iguais ou superiores à segunda ordem de expansão. A métrica de Minkowski (η) assume como métrica local de fundo, ou potencial fundamental (ordem zero), que é um tensor constante e reconhecido como a métrica realista para sistemas cujas interacções gravíticas são desprezáveis [3].

O primeiro termo de expansão (h) corresponde às interacções gravíticas de primeira ordem, e convencionamos que o seu determinante é muito menor que a unidade, de modo a garantir a linearização das equações de Einstein.

Efectuando os cálculos tendo em conta os infinitésimos e suas derivadas, verifica-se imediatamente que a conexão de Christoffel valerá [3] :

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\left(\partial_{\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda} h_{\mu\nu}\right) \tag{1.12}$$

Embora fosse possível determinar explicitamente os termos do tensor de Riemann (1.6), verifica-se que sem perda de generalidade, é mais conveniente utilizar a forma covariante do tensor de Riemann [3]:

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu} = g_{\lambda\rho}\left(\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\right) \tag{1.13}$$

Aplicando a métrica linearizada definida em (1.9) e (1.10) com a aproximação (1.11), resulta [3] :

$$R_{\lambda\sigma\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\lambda\nu}-\partial_\mu\partial_\lambda h_{\nu\sigma}-\partial_\nu\partial_\sigma h_{\lambda\mu}+\partial_\nu\partial_\lambda h_{\mu\sigma}\right) \tag{1.14}$$

O procedimento continua com a simplificação do tensor de Ricci segundo (1.7) do qual é imediato adaptá-lo para a contracção do tensor de Riemann covariante: $R_{\sigma\nu} = R^{\mu}{}_{\sigma\mu\nu} = g^{\tau\lambda}R_{\tau\sigma\lambda\nu}$.

$$R_{\sigma\nu}=\frac{1}{2}\left(\partial_\tau\partial_\sigma h^\tau_\nu+\partial_\nu\partial_\tau h^\tau_\sigma-\Box h_{\nu\sigma}-\partial_\nu\partial_\sigma h\right) \tag{1.15}$$

Para nossa conveniência introduzimos o traço que pode ser definido por $h=h^\tau{}_\tau$, e o operador D'Alembertiano, $\Box=\partial_\mu\partial_\nu\eta^{\mu\nu} = -\partial^2{}_t+\Delta$.

Para concluir a demonstração, determinamos o escalar de Ricci (1.8):

$$R=\partial_\nu\partial_\sigma h^{\sigma\nu}-\Box h \tag{1.16}$$

Verifica-se que se não existissem campos gravíticos, $|h|\rightarrow 0$, o escalar de Ricci seria nulo, como seria de esperar [3].

O próximo passo é combinar os tensores (1.14), (1.15) e (1.16) para derivar as equações de Einstein linearizadas, que serão o verdadeiro ponto de partida para o derivar o modelo gravito-electromagnético de Mashhoon.

Equações de Campo de Einstein Linearizadas (revisão)

As equações de Einstein Linearizadas são facilmente deduzidas baseando na simplificação dos tensores da Geometria Diferencial que derivamos no tópico anterior [3] :

Definindo convenientemente o tensor de Einstein [3] :

$$G_{\sigma\nu}=R_{\sigma\nu}-\frac{1}{2}R g_{\sigma\nu} \tag{1.17}$$

E substituindo os tensores dados em (1.14), (1.15) e (1.16) na equação (1.17), determinamos:

$$G_{\sigma\nu}=R_{\sigma\nu}-\frac{1}{2}R\eta_{\sigma\nu}=\frac{1}{2}\left(\partial_\tau\partial_\sigma h^\tau_\nu+\partial_\nu\partial_\tau h^\tau_\sigma-\Box h_{\nu\sigma}-\partial_\nu\partial_\sigma h-\partial_\tau\partial_\lambda\eta_{\sigma\nu}h^{\tau\lambda}+\eta_{\sigma\nu}\Box h\right) \tag{1.18}$$

A expressão que derivamos é linear em relação ao potencial perturbativo, mas não se encontra desacoplado devido às problemáticas derivadas cruzadas.

Para resolver este problema, vamos determinar uma gauge que mantenha a conexão invariante, o que implica simplificar a equação $g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}=0$. Portanto aplicamos (1.5) e derivamos:

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}h_{\lambda\mu}-\partial_{\lambda}h_{\mu\nu}\right)=0 \quad (1.19)$$

$$\partial_{\mu}h^{\mu\rho}+\partial_{\nu}h^{\nu\rho}-\partial_{\lambda}h^{\lambda\rho}=0 \quad (1.20)$$

$$\partial_{\mu}h^{\mu\rho}=0 \quad (1.21)$$

O resultado simplificado (1.21) obtem-se por cálculo directo, e representa uma lei de conservação do campo gravitacional no regime perturbativo [3].

Para obter a lei de conservação na forma covariante, temos que multiplicar (1.21) por um tensor da métrica e efectuar os cálculos:

$$\eta_{\rho\alpha}\left(\partial_{\mu}h^{\mu\rho}+\partial_{\nu}h^{\nu\rho}-\partial_{\lambda}h^{\lambda\rho}\right)=\partial_{\mu}h^{\mu}_{\alpha}+\partial_{\nu}h^{\nu}_{\alpha}-\partial_{\alpha}h=0 \quad (1.22)$$

$$2\,\partial_{\tau}h^{\tau}_{\alpha}-\partial_{\alpha}h=0\Leftrightarrow\partial_{\tau}h^{\tau}_{\alpha}-\frac{1}{2}\partial_{\alpha}h=0 \quad (1.23)$$

Para contrair a gauge representada na forma de tensores mistos, temos que multiplicar mais tensores de métrica e repetir o mesmo processo:

$$\eta^{\nu\alpha}\eta_{\mu\nu}\partial_{\tau}h^{\tau}_{\alpha}-\frac{1}{2}\eta^{\nu\alpha}\eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}h=0\Leftrightarrow\partial^{\nu}h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\partial^{\nu}\eta_{\mu\nu}h=0 \quad (1.24)$$

Se definirmos o seguinte tensor, designado potencial retardado, de acordo com (1.24):

$$\overline{h_{\mu\nu}}=h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (1.25)$$

Então podemos simplificar (1.24), e obtemos a forma covariante da lei de conservação:

$$\partial^{\nu}\overline{h_{\mu\nu}}=0 \quad (1.26)$$

Inserindo (1.26) de acordo com (1.25), e igualmente (1.23) na equação (1.18), obtemos:

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h-\Box h_{\mu\nu}\right)=\frac{-1}{2}\Box\overline{h_{\mu\nu}} \quad (1.27)$$

Substituindo (1.27) na equação de campo (1.1), derivamos as equações de Einstein linearizadas:

$$\Box\overline{h_{\mu\nu}}=\frac{-16\pi G}{c^{2}}T_{\mu\nu} \quad (1.28)$$

O sistema de equações (1.28) são um conjunto de equações diferenciais que são independentes entre si, resultado uma boa conveniência e simplicidade quando essa aproximação é aplicável.

Para resolver (1.28) em função dos potenciais Einsteinianos, aplicamos o método dos potenciais retardados utilizando funções de Green [1] (A resolução encontra-se em anexo).

A forma geral para a representação integral dos potenciais Einsteinianos serão:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{c^2}\int\frac{T_{\mu\nu}\left(t-\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c},\vec{y}\right)}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^3y \tag{1.29}$$

Admitindo que o observador do sistema físico localiza-se longe das fontes, então aproximamos o seguinte módulo pelo escalar: $|\vec{x}-\vec{y}|\approx R$, que representa igualmente a distância do observador à fonte, determinando:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{Rc^2}\int T_{\mu\nu}(t-R/c,\vec{y})d^3y \tag{1.30}$$

Até aqui nada diverge do procedimento descrito em [3] para derivar a solução integral das equações dos potenciais retardados, embora seja a peça fulcral para construir o modelo GEM.

Soluções para os potenciais gravitomagnéticos segundo a Relatividade Geral

O modelo gravito-electromagnético considera que as fontes do campo gravítico são um corpo com simetria esférica em rotação, do qual a densidade, massa e velocidade são muito pequenas em relação à velocidade da luz, e que o raio da fonte é muito maior que o raio de Schwarzschild.

A resolução da equação (1.26) para os potenciais gravitoelectromagnéticos ($\overline{h_{00}};\overline{h_{0i}}$) varia de dificuldade, do qual o primeiro caso resolve-se numa linha e o segundo requer algum trabalho.

De facto, é quase trivial determinar nestas condições uma solução para $\overline{h_{00}}$:

$$\overline{h_{00}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{Rc^2}\int T_{00}(t-R/c,\vec{y})d^3y \tag{1.31}$$

Segundo (1.2) e (1.3) o termo temporal do tensor energia-momento é simplesmente a densidade local do corpo celeste, e a integração da densidade pelo volume é a massa M da fonte gravitacional:

$$\overline{h_{00}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{Rc^2}\int\rho\, d^3y=\frac{4GM}{Rc^2} \tag{1.32}$$

Uma vez que é um resultado que depende apenas de quantidades escalares, considera-se que o potencial retardado $\overline{h_{00}}$ é Newtoniano.

Mas o cálculo para os potenciais não-diagonais $\overline{h_{0i}}, i=1,2,3$ vai obrigar a um procedimento mais cuidadoso, utilizando as propriedades das leis de conservação até poder simplificar a expressão.

A partir da lei de conservação (1.26), derivamos (ou confirmamos) a lei de conservação de energia-momento;

$$\partial^{\mu} T_{\mu\nu}=0 \qquad (1.33)$$

Isto significa que as leis de conservação (1.26) e (1.33) admitem as seguintes substuições:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T_{0i}}{\partial t}=\sum_{j=1}^{3}-\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \qquad (1.34)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \overline{h}_{0i}}{\partial t}=\sum_{j=1}^{3}-\frac{\partial \overline{h}_{ji}}{\partial x_j} \qquad (1.35)$$

Considerando as equações de equivalência (1.34) e (1.35), podemos determinar (1.30) para o caso não-diagonal, principiando o delicado cálculo com uma simples integração por partes (Ver [3]):

$$\overline{h}_{ij}=\frac{4G}{Rc^2}\int T_{ij}\, d^3 y=\frac{4G}{Rc^2}(\underbrace{\int \partial_k (y_i T_{kj})\, d^3 y}_{=0}-\int y_i(\partial_k T_{kj})\, d^3 y)\approx-\frac{4G}{Rc^2}\int y_i(\partial_k T_{kj})\, d^3 y \quad (1.36)$$

O primeiro termo é um integral de superfície do qual ao aplicar o Teorema de Gauss, obtemos um valor que tende para zero quando a distância ao observador tende para infinito, uma vez que se trata de uma fonte isolada. Por outro lado, podemos aplicar a relação $\partial_0 T_{0j}=-\partial_k T_{kj}$ e factorizar os termos simétricos do tensor energia-momento (que é igualmente um tensor simétrico).

$$\overline{h}_{ij}=\frac{4G}{Rc^2}\int y_i(\partial_0 T_{0j})\, d^3 y=\frac{2G}{Rc^2}\int \left(y_i(\partial_0 T_{0j})+y_j(\partial_0 T_{0i})\right) d^3 y \qquad (1.37)$$

Isto permite aplicar novamente uma nova integração por partes e eliminar o termo que corresponde a um integral de superfície que tende para zero, porque as fontes são isoladas [3].

$$\overline{h}_{ij}=\frac{2G}{Rc^2}\int (\underbrace{\partial_l(y_j y_i(\partial_0 T_{0l}))}_{=0}-y_i y_j(\partial_l \partial_0 T_{0l}))\, d^3 y=\frac{2G}{Rc^2}\int \partial_0\partial_0 y_i y_j T_{00}\, d^3 y \qquad (1.38)$$

Basicamente demonstramos que os outros componentes do tensor energia-momento podem ser vistos como derivadas e transformações lineares do termo de densidade do mesmo tensor, do qual é simplesmente consequência das leis de conservação.

Agora definiremos o tensor densidade do momento de inércia,

$$I_{ij}=\rho\, y_i y_j \qquad (1.39)$$

E a equação para os potenciais podem ser descritos em função de (1.39):

$$\overline{h_{ij}}=\frac{2G}{Rc^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho\, y_i\, y_j\, d^3\, y=\frac{2G}{Rc^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int I_{ij}\, d^3\, y \qquad (1.40)$$

Determinamos uma expressão com significado físico para o termo $\overline{h_{ij}}$, que revelou ser "apenas" a segunda derivada temporal do tensor de inércia. Contudo, o que pretendemos é determinar o termo $\overline{h_{0i}}$, cuja tarefa é facilitada pela lei de gauge: $\partial_0 \overline{h_{0i}}=-\partial_j \overline{h_{ji}}$.

Aplicando a gauge a (1.40) determinaremos o potencial pretendido, embora seja agora uma derivada cruzada, e este problema estético será resolvido no passo seguinte:

$$\overline{h_{0i}}=-\frac{2G}{Rc^3}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t}\int I_{ij} d^3\, y \qquad (1.41)$$

Ao resolver o integral em (1.41) segundo a perspectiva de um observador distante, a massa é aproximadamente pontual, portanto resultará por definição a massa total do planeta ao determinar o integral acima referido. Nesta condições os termos dependentes da velocidade e posição, caso apliquemos uma integração por partes em (1.41), e a equação da continuidade (1.33), observa-se que os termos que dependem explicitamente da distância do observador tendem para zero, porque:

$$I_{ij}=\int \rho\, y_i y_j d^3\, y=M y_i y_j-\int 2\, M y_i \partial^j y_j d^3\, y \qquad (1.42)$$

$$I_{ij}\approx M y_i y_j+\underbrace{2\, M R^3\, y_i \partial_0\, y_j}_{=0\,,\, y_i\ll R}=M y_i\, y_j \qquad (1.43)$$

Logo, o integral em (1.41) de acordo com (1.42-1.43) resulta:

$$\overline{h_{0i}}=-\frac{2G}{Rc^3}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t}(M y_i y_j) \qquad (1.44)$$

Para expandir explicitamente as derivadas cruzadas, podemos introduzir o operador velocidade;

$$v_i=\frac{\partial\, y_i}{\partial t} \qquad (1.45)$$

e em relação a cada um dos respectivos índices dos vectores posição ou velocidade, resultando:

$$\overline{h_{0i}}=-\frac{2G}{Rc^3}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial t}(M y_i y_j)=-\frac{2G}{Rc^3}\frac{\partial}{\partial y_j}(M v_i y_j+M v_j y_i) \qquad (1.46)$$

$$\overline{h_{0i}}=-\frac{2G}{Rc^3}(M v_i+M(\partial_j v_j) y_i) \qquad (1.47)$$

Utilizando novamente (1.33), pondo em evidência a densidade:

$$\partial^{\mu} T_{\mu 0}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}(\rho \vec{v})=0 \Leftrightarrow \left[\partial_0+\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right]\rho=0 \qquad (1.48)$$

Isto justifica o truque de multiplicar e dividir pelo escalar,

$$\boldsymbol{r}^2=y_i y_j \delta^{ij} \qquad (1.49)$$

E manipular o seguinte termo cruzado em (1.47) de acordo com (1.48):

$$(\partial_j v_j) y_i=\frac{1}{c}\frac{\partial y_i}{\partial t}=v_i \qquad (1.50)$$

E assim, podemos expandir algebricamente (1.47), adiantando que (1.49) é o produto interno do vector posição do movimento intrínseco do planeta com o mesmo vector. Como o observador se situa a R>>r, podemos afirmar que o escalar (1.49) presente no denominador de (1.47) é majorado pela distância do observador R. Portanto:

$$\overline{h_{0\mathrm{i}}}=-\frac{2G}{R^3c^3}(Mv_i\boldsymbol{r}^2-Mv_i\delta^{ij}y_iy_j)=-\frac{2G}{R^3c^3}(Mv_i\boldsymbol{r}^2-(y_i(Mv_i))y_i) \qquad (1.51)$$

Definindo o momento linear $\vec{p}=M\vec{v}$, e reescrevendo (1.51) na forma vectorial clássica, visto que o potencial em (1.51) é um vector, determinaremos:

$$\overline{h_{0\mathrm{i}}}\cdot\vec{e}_i=-\frac{2G}{R^3c^3}(M\vec{v}\boldsymbol{r}^2-(\vec{r}\cdot(M\vec{v}))\vec{r})=-\frac{2G}{R^3c^3}(\vec{p}(\vec{r}\cdot\vec{r})-(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}) \qquad (1.52)$$

Por fim, ao aplicar a seguinte identidade vectorial, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ e a definição vectorial do momento angular $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$, resulta uma igualdade mais inteligível para o potencial $\overline{h_{0i}}$:

$$\overline{h_{0\mathrm{i}}}\cdot\vec{e}_i=-\frac{2G}{R^3c^3}(\vec{p}(\vec{r}\cdot\vec{r})-(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r})=-\frac{2G((\vec{r}\times\vec{p})\times\vec{r})}{R^3c^3} \qquad (1.53)$$

$$\overline{h_{0\mathrm{i}}}\cdot\vec{e}_i=-\frac{2G[\vec{L}\times\vec{r}]}{R^3c^3} \qquad (1.54)$$

A equação (1.54) é designada por potencial vectorial gravitomagnético, que fisicamente corresponde ao efeito gravitacional gerado pelo momento angular do planeta.

Outros corpos celestes com diferentes estruturas terão diferentes soluções explícitas para o campo gravitomagnético, portanto a definição (1.54) enquadra-se adequadamente para planetas sólidos, que é suficientemente precisa para o estudo experimental das sondas espaciais em torno da Terra, do qual iremos descrever nos próximos capítulos.

Potenciais Gravitoelectromagnéticos e a Gauge de Lorentz

As equações para os potenciais (1.32) e (1.54) são a base do modelo GEM caso aplicaremos correctamente a analogia com a electrodinâmica clássica.

Se recordarmos a teoria newtoniana da gravitação, podemos associar o potencial einsteiniano $\overline{h_{00}}$ como sendo proporcional ao potencial Newtoniano [1]:

$$\phi=-\frac{GM}{R} \qquad \overline{h_{00}}=-\frac{4\phi}{c^2} \tag{1.55}$$

Nesta óptica, podemos definir um potencial vectorial axial gravitomagnético [1]:

$$\vec{A}=\frac{G[\vec{L}\times\vec{r}]}{R^3 c} \qquad \overline{h_{0i}}=-\frac{2A_i}{c^2} \tag{1.56}$$

Na electrodinâmica clássica, os potenciais electromagnéticos obedeciam a uma gauge designada por gauge de Lorentz, do qual podemos derivar imediatamente um equivalente para os potenciais gravitomagnéticos e Newtonianos, dos quais são casos particulares do potencial Einsteniano linearizado. A gauge de Lorentz GEM deriva-se a partir de $\partial^{\mu}\overline{h_{\mu\nu}}=0$ para $\nu=0$:

$$\partial^{\mu}\overline{h_{\mu 0}}=0\Leftrightarrow\frac{4}{c^2}\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{2}{c^2}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \tag{1.57}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0 \tag{1.58}$$

Salvo um factor 1/2 em (1.58) o resultado é similar ao electromagnetismo, e podemos a partir deste resultado derivar as equações de Maxwell do GEM.

Devemos ter em consideração que diferentes autores renormalizam os factores dos potenciais e campos gravito-electromagnéticos de acordo com a sua conveniência, mas isso não afecta os resultados experimentais, pois basta seguir uma definição e aplicá-la correctamente [1].

As Equações de Maxwell do Gravitoelectromagnetismo: Equação dos Potenciais

Com o desenvolvimento dos fundamentos da teoria que sustenta o modelo GEM, podemos determinar as equações de campo que caracterizam o modelo gravitoelectromagnético, que são similares às equações de Maxwell do electromagnetismo [1].

Os potenciais do modelo são aqueles que foram definidos na equações (1.55) e (1.56), e que obedecem à gauge de Lorentz dada em (1.58).

A gauge de Lorentz pode ser descrita na forma covariante, tornando-se $\partial^{\mu} A_{\mu}=0$, donde definimos o tetravector potencial gravitoelectromagnético:

$$A_{\mu}=\left(\phi,-\frac{1}{2}\vec{A}\right) \tag{1.59}$$

Considerando a seguinte lei de conservação do tensor energia-momento: $\partial^{\mu} T_{\mu\nu}=0$, para o caso particular que caracteriza o modelo gravito-electromagnético, resulta:

$$\partial^{\mu} T_{\mu 0}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \tag{1.60}$$

A forma covariante de (1.60) será simplesmente: $\partial^{\mu} J_{\mu}=0$, donde definimos o tetravector corrente de matéria:

$$J_{\mu}=\left(\rho,\frac{\vec{J}}{c}\right) \tag{1.61}$$

Para determinar a forma covariante de um tetravector contravariante, basta subir os índices pela acção da métrica de fundo (métrica de Minkowski): $A^{\nu}=\eta^{\mu\nu} A_{\mu}$ e $J^{\nu}=\eta^{\mu\nu} J_{\mu}$.

Os respectivos tetravectores covariantes resultarão:

$$A^{\mu}=\left(-\phi,-\frac{1}{2}\vec{A}\right) \quad , \quad J^{\mu}=\left(-\rho,\frac{\vec{J}}{c}\right) \tag{1.62}$$

Os tetravectores (1.61) e (1.62) não são mais que as respectivas colunas do índice temporal do tensor dos potenciais einsteinianos (1.29) e do tensor energia-momento (1.2).

E também provamos que a equação (1.28) relaciona os dois tensores que acabamos de referir, corroborando o facto do modelo gravitoelectromagnético ser um caso particular das Equações de Einstein Linearizadas.

Baseando nestas premissas, ao verificar que $\overline{h_{0\mu}}=\frac{4A_{\mu}}{c^2}$ e $T_{0\mu}=J_{\mu}$, e substituindo na equação (1.28), derivamos imediatamente a equação para os potenciais gravitoelectromagnéticos:

$$\Box\overline{h_{\mu 0}}=-\frac{16\pi G}{c^2}T_{\mu 0}\Leftrightarrow\Box\left(\frac{4A_{\mu}}{c^2}\right)=-\frac{16\pi G}{c^2}J_{\mu} \tag{1.63}$$

$$\Box A_{\mu}=-4\pi G J_{\mu} \tag{1.64}$$

A equação (1.64) é similar à equação covariante para os potenciais electromagnéticos, diferindo apenas na presença da constante da gravitação universal [5].

Para determinar as equações de Maxwell, devemos adaptar o livro de Jackson [5] de modo a transformar a equação dos potenciais na forma clássica mais facilmente reconhecida.

As Equações de Maxwell do Gravitoelectromagnetismo: Tensor de Campo

Na electrodinâmica clássica, a introdução do tensor de campo destacou uma importante simplificação no estudo desta teoria [5]. Como o modelo gravitoelectromagnético revelou ter uma certa analogia com a electrodinâmica clássica, então a introdução de um tensor de campo para este modelo aproximado da Teoria da Relatividade Geral deverá ser considerado.

Segundo os teoremas fundamentais de Geometria Diferencial [3], o tensor de curvatura de Riemann obedece à identidade de Bianchi, que é uma lei de conservação que a RG respeita. Podemos combinar o modelo GEM com a identidade de Bianchi e determinar uma quantidade sob a forma dum tensor de campo antisimétrico. Este tensor de campo:

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \qquad (1.65)$$

Que foi definido em analogia com tensor de campo electromagnético, obedece a uma lei de conservação de campo que pode ser obtida directamente da identidade de Bianchi [3,5]:

$$\partial_{\sigma}F_{\mu\nu}+\partial_{\mu}F_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}F_{\sigma\mu}=0 \qquad (1.66)$$

(A demonstração foi remetida em anexo, por tratar-se de uma identidade puramente matemática. Além disso, se definirmos (1.65), o resultado (1.66) é trivialmente verificado).

Independentemente do facto de (1.66) ser resultado da identidade de Bianchi, trata-se igualmente da forma covariante de uma das equações de Maxwell. Desenvolvendo (1.66) de acordo com (1.62) determinamos (devido à anti-simetria do tensor) seis componentes independentes:

$$F_{01}=\partial_0 A_1-\partial_1 A_0=-\frac{1}{2c}\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad F_{02}=\partial_0 A_2-\partial_2 A_0=-\frac{1}{2c}\frac{\partial A_y}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$F_{03}=\partial_0 A_3-\partial_3 A_0=-\frac{1}{2c}\frac{\partial A_z}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad F_{12}=\partial_1 A_2-\partial_2 A_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$F_{13}=\partial_1 A_3-\partial_3 A_1=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) \qquad F_{23}=\partial_2 A_3-\partial_3 A_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \qquad (1.67)$$

Salientando que o potencial Newtoniano na forma local (equação de Poisson) é [3]:

$$\nabla^2\phi=-4\pi G\rho \qquad (1.68)$$

Então para preservar o limite Newtoniano do modelo GEM, o potencial Newtoniano deve ser sempre atractivo.

Portanto, ao ter em conta este constrangimento físico, podemos definir de acordo com (1.67) dois campos vectoriais [1,5] similares à teoria da electrodinâmica clássica:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{2c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.69}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \tag{1.70}$$

Estes dois campos correspondem ao campo gravitoeléctrico (1.69) e ao campo gravitomagnético (1.70), que são os principais componentes do tensor de campo.

$$F_{01} = -E_x \quad F_{02} = -E_y \quad F_{03} = -E_z \quad F_{12} = -B_z \quad F_{13} = B_y \quad F_{23} = -B_x \tag{1.71}$$

Salientamos que determinaremos a forma contravariante do tensor de campo ao calcular:

$$F^{\lambda\sigma} = \eta^{\lambda\mu}\eta^{\sigma\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.72}$$

Por motivos estéticos e pedagógicos, é um bom costume representar matricialmente os componentes dos tensores fundamentais, como é o caso do tensor de campo [5].

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

Com a formulação do tensor de campo (1.73) em função dos campos vectoriais do modelo gravitoelectromagnético, permite-nos avançar com a dedução das equações de Maxwell na forma vectorial.

As Equações de Maxwell do Gravitoelectromagnetismo: Forma Covariante e Clássica

As equações de Maxwell na formulação covariante são duas, que estão em função do tensor de campo (1.73). A primeira equação corresponde à identidade de Bianchi (1.66), e para determinar a segunda equação, exige a manipulação algebrica da equação dos potenciais (1.64) [1,5] .

Começemos por transformar o operador D'Alembertiano em (1.64) na forma tensorial:

$$\eta_{\sigma\nu}\partial^{\sigma}\partial^{\nu}A_{\mu} = -4\pi G J_{\mu} \tag{1.74}$$

A gauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ possibilita adicionar um novo termo nulo que sirva para completar algebricamente o tensor de campo (1.73) pela sua definição (1.65). Caso uma divergência anula-se, então o laplaciano será igualmente nulo [5]:

$$\eta_{\sigma\nu}\partial^\sigma\partial^\nu A_\mu - \underbrace{\partial_\mu\partial_\alpha A^\alpha}_{=0} = -4\pi G J_\mu \tag{1.75}$$

Para determinar a segunda equação covariante de Maxwell, temos que aplicar uma série de manipulações algébricas convenientes nos tensores, e aplicar a definição (1.65) no final:

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\sigma\alpha}\partial^\sigma\partial^\alpha A_\mu - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\alpha A^\alpha = -\eta^{\mu\nu} 4\pi G J_\mu \tag{1.76}$$

$$\eta_{\sigma\mu}\partial^\sigma\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = -4\pi G J^\nu \tag{1.77}$$

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = -4\pi G J^\nu \tag{1.78}$$

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = -4\pi G J^\nu \tag{1.79}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -4\pi G J^\nu \tag{1.80}$$

As equações (1.66) e (1.80) correspondem precisamente às equações de Maxwell do modelo gravitoelectromagnético utilizando o formalismo covariante.

Para derivarmos a forma clássica (notação vectorial), devemos expandir as equações tensoriais (1.66) e (1.80) em ordem aos seus índices seguindo o procedimento descrito por Jackson [5].

A primeira equação tensorial (1.80) expande-se de acordo com o tensor (1.73) e o tetravector (1.62), sem esquecer da forma covariante do operador nabla $\partial_\mu = \left(-\partial_t / c, \vec{\nabla}\right)$, para depois determinarmos as diferentes equações para cada índice ν={0,1,2,3}:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = -4\pi G J^0 \Leftrightarrow -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi G\rho \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -4\pi G\rho \tag{1.81}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = -4\pi G J^1 \Leftrightarrow -\frac{\partial E_x}{\partial t}\frac{1}{c} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{-4\pi G}{c} J_x \Leftrightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_x = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c} J_x \tag{1.82}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 2} = -4\pi G J^2 \Leftrightarrow -\frac{\partial E_y}{\partial t}\frac{1}{c} - \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{-4\pi G}{c} J_y \Leftrightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_y = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c} J_y \tag{1.83}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 3} = -4\pi G J^3 \Leftrightarrow -\frac{\partial E_z}{\partial t}\frac{1}{c} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{-4\pi G}{c} J_z \Leftrightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{B}]_z = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c} J_z \tag{1.84}$$

No desenvolvimento da equação (1.66), aplicaremos uma permutação cíclica de índices, e determinaremos outro conjunto de equações a partir do tensor de campo (1.73):

$$\{\sigma,\mu,\nu\}=\{1,2,3\} \quad \partial_1 F_{23}+\partial_2 F_{31}+\partial_3 F_{12}=-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}-\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\Leftrightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{1.85}$$

$$\{\sigma,\mu,\nu\}=\{2,3,0\} \quad \partial_2 F_{30}+\partial_3 F_{02}+\partial_0 F_{23}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t}\frac{1}{c}=0\Leftrightarrow[\vec{\nabla}\times\vec{E}]_x=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{1.86}$$

$$\{\sigma,\mu,\nu\}=\{3,0,1\} \quad \partial_3 F_{01}+\partial_0 F_{13}+\partial_1 F_{30}=-\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial B_y}{\partial t}\frac{1}{c}+\frac{\partial E_z}{\partial x}=0\Leftrightarrow[\vec{\nabla}\times\vec{E}]_y=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{1.87}$$

$$\{\sigma,\mu,\nu\}=\{0,1,2\} \quad \partial_0 F_{12}+\partial_1 F_{20}+\partial_2 F_{01}=\frac{\partial B_z}{\partial t}\frac{1}{c}+\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0\Leftrightarrow[\vec{\nabla}\times\vec{E}]_z=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{1.88}$$

O conjunto das oito equações (1.81-1.88) podem ser condensadas em quatro equações vectoriais, porque as equações que contêm rotacionais e divergências são concordantes com as suas coordenadas espaciais nos seus termos, e assim determinamos a forma clássica das Equações de Maxwell do gravito-electromagnetismo (Igualmente designadas por Equações de Maxwell-Mashhoon [1]) :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=-4\pi G\rho \tag{1.89}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.90}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \tag{1.91}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\frac{4\pi G}{c}\vec{J} \tag{1.92}$$

Comparando com as verdadeiras Equações de Maxwell [5], as diferenças são muito poucas, observando que a constante de gravitação ocupa o lugar das constantes dieléctricas do electromagnetismo, porque de resto são estruturalmente iguais.

O campo gravito-eléctrico têm uma fonte (a massa gravítica) e uma corrente de matéria, mas o campo gravito-magnético não têm uma fonte geradora do campo, verificando a mesma analogia do electromagnetismo clássico do qual existem cargas eléctricas e não cargas magnéticas [5].

A validade das equações de Maxwell-Mashhoon está limitada aos campos gravitacionais fracos, no domínio não-relativista, mas justifica a hipótese de Heaviside [2] de que a Teoria de Newton estava incompleta, mesmo no domínio da Mecânica Celeste.

Derivação da Força de Lorentz Gravitoelectromagnética

O artigo de Mashhoon [1] estabelecia a existência de uma força de Lorentz de acordo com o modelo GEM. Para demonstrar esta proposição, retornemos à Relatividade Geral, mais propriamente para desenvolver a equação geodésica [3]:

$$\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial \lambda^2}+\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}\frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}=0 \tag{1.93}$$

Esta equação é equivalente à Lei de Newton para um sistema clássico, quando aplicamos adequadamente os limites não-relativistas. O problema aparente é que os símbolos de Christoffell (1.5) dependem dos potenciais locais, e não dos retardados (1.28).

Para resolver este problema, basta aplicar (1.25) e determinar os potenciais locais. Os termos não-diagonais são triviais de calcular:

$$\overline{h_{0i}}=h_{0\mathrm{i}}=h_{i0}=-\frac{2A_i}{c^2};i=1,2,3 \tag{1.94}$$

Para determinar os termos diagonais, vamos recapitular a equação de Poisson,

$$\nabla^2\phi=-4\pi G\rho \tag{1.95}$$

Na aproximação Newtoniana, somente existe a seguinte conexão de Christoffell que não é nula [3]:

$$\Gamma^\mu_{00}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\underbrace{\partial_0 g_{\lambda 0}}_{=0}+\underbrace{\partial_0 g_{0\lambda}}_{=0}-\partial_\lambda g_{00})\Leftrightarrow\Gamma^\mu_{00}=-\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_\lambda h_{00}=-\frac{1}{2}\partial^\mu h_{00} \tag{1.96}$$

Uma vez que o campo Newtoniano é estático ($h_{0i}=0$) e não-relativista ($v\ll c$), a equação geodésica aproxima-se:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\partial_i h_{00} \tag{1.97}$$

No qual corresponde à lei da Gravitação Universal de Newton, se aplicarmos (1.56) e [3]:

$$h_{00}=\frac{-2\phi}{c^2}=\frac{2GM}{Rc^2} \tag{1.98}$$

O que segundo (1.25), implica para os restantes termos diagonais:

$$h_{ii}=-\frac{2\phi}{c^2};i=1,2,3 \tag{1.99}$$

Portanto, o elemento de métrica local $ds^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ no modelo GEM será descrito por:

$$ds^2 = -c^2\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{2A_i}{c}dx_i\,dt + \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j \qquad (1.100)$$

Conhecidos os elementos da métrica local (1.100), podemos determinar a linha geodésica afecta ao modelo GEM. Na prática, temos primeiro que determinar os diferentes símbolos de Christoffel da conexão métrica:

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{2}(\partial_0 h_{0\lambda} + \partial_0 h_{\lambda 0} - \partial_\lambda h_{00}) = -\frac{1}{2}(\partial_0 h_{00} + \partial_0 h_{00} - \partial_0 h_{00}) = \frac{1}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1.101)$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = -\frac{1}{2}(\partial_0 h_{i0} + \partial_i h_{00} - \partial_0 h_{0i}) = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \qquad (1.102)$$

$$\Gamma^0_{ii} = -\frac{1}{2}(\partial_i h_{i0} + \partial_i h_{0i} - \partial_0 h_{ii}) = \frac{2}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (1.103)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \Gamma^0_{ji} = -\frac{1}{2}(\partial_i h_{j0} + \partial_j h_{0i} - \partial_0 h_{ij}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_j}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ij} \qquad (1.104)$$

$$\Gamma^k_{00} = \frac{1}{2}(\partial_0 h_{0k} + \partial_0 h_{k0} - \partial_k h_{00}) = -\frac{2}{c^3}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_k} \qquad (1.105)$$

$$\Gamma^k_{0i} = \Gamma^k_{i0} = \frac{1}{2}(\partial_0 h_{ik} + \partial_i h_{k0} - \partial_k h_{0i}) = -\frac{1}{c^3}\frac{\partial\phi}{\partial t}\delta_{ik} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \qquad (1.106)$$

$$\Gamma^k_{ii} = \frac{1}{2}(\partial_i h_{ik} + \partial_i h_{ki} - \partial_k h_{ii}) = -\frac{2}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\delta_{ik} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \qquad (1.107)$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_i h_{jk} + \partial_j h_{ki} - \partial_k h_{ij}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\delta_{jk} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\delta_{ki} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\delta_{ij} \qquad (1.108)$$

Conhecidos os símbolos de Christoffell (1.101-1.108), podemos substitui-los na equação geodésica (1.93) para determinar as equações do movimento. Apesar da aparente complexidade dos termos calculados, podemos com um pouco de organização, simplificar todo o processo de cálculo.

O primeiro passo é determinar uma lei de conservação que ajude a simplificar a demonstração.

Se determinarmos a parte temporal da linha geodésica (μ=0) em (1.93), obtemos:

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial\lambda}\right)^2 + \Gamma^0_{\mu\nu}\frac{c^2}{c^2}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\lambda}\frac{\partial t}{\partial\lambda} = 0 \qquad (1.109)$$

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2} + \Gamma^0_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial t} = 0\,;\lambda = ct \qquad (1.110)$$

Mas a segunda derivada no lado esquerdo de (1.110) é nula por causa da definição $x^0 = c\,t$:

$$\frac{\partial^2 x^0}{\partial t^2} = 0 \tag{1.111}$$

E substituindo em (1.111) determinamos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x^j}{\partial t} - \frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t} = 0 \tag{1.112}$$

Uma vez que estamos a utilizar uma aproximação linear na teoria, todos os termos quadráticos são desprezados, e podemos condensar os termos que são derivadas cruzadas:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{2}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x^j}{\partial t} = 0 \tag{1.113}$$

$$\frac{3}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{4}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} = 0 \tag{1.114}$$

A equação geodésica para as coordenadas espaciais é um bocado extensa, mas é aquele com significado físico, enquanto (1.114) servirá para rectificar um passo da demonstracção:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2} + \Gamma^k_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t}\frac{\partial x^\nu}{\partial t} = 0 \tag{1.115}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2} - \frac{2}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\delta_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\delta_{jk}\frac{\partial x^j}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \\ + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial x^i}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\frac{\partial x^j}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\frac{\partial x^j}{\partial t} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\delta_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t} - \\ - \frac{2}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\delta_{ki}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\delta_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial t} = 0\end{aligned} \tag{1.116}$$

A equação (1.116) pode ser reduzida ao desprezar termos quadráticos, condensando derivadas cruzadas e combinando os termos similares com deltas de Kronecker:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2} - \frac{2}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - \frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial x^i}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\frac{\partial x^j}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\frac{\partial x^j}{\partial t} = 0 \tag{1.117}$$

Agora se aplicarmos um pequeno truque para eliminar um termo suplementar em (1.117) para podermos usar (1.114), basta factorizar o seguinte termo:

$$\frac{2}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t} = \frac{1}{2c}\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{3}{2c}\frac{\partial A_k}{\partial t} \tag{1.118}$$

Agora ao aplicar a identidade (1.114), observa-se que a seguinte quantidade vale zero:

$$-\frac{3}{2c}\frac{\partial A_k}{\partial t}-\frac{2}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}=\frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}-\frac{2}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \tag{1.119}$$

Substituindo (1.119) na equação (1.117) determinamos a forma pretendida para a equação geodésica:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2}=\frac{1}{2c}\frac{\partial A_k}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial x_k}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\frac{\partial x^i}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\frac{\partial x^j}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\frac{\partial x^j}{\partial t} \tag{1.120}$$

Pondo em evidência factores comuns de (1.120), resulta uma equação dinâmica muito familiar:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2}=\left(\frac{1}{2c}\frac{\partial A_k}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x^i}{\partial t}+\frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right)\frac{\partial x^j}{\partial t} \tag{1.121}$$

Introduzindo a Lei de Newton da Dinâmica [4],

$$\vec{F}\cdot\vec{e}_k=m\frac{\partial^2 x^k}{\partial t^2} \tag{1.122}$$

e igualmente a definição vectorial de velocidade da partícula:

$$v_i=\frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{1.123}$$

E ainda aplicando as definições vectoriais do campo gravito-electrico (1.69) e gravito-magnético (1.70), bem como a multiplicação de uma massa m de uma partícula de teste em ambos os membros de (1.121), resulta uma força Newtoniana que é similar à Força de Lorentz do Electromagnetismo [1]:

$$f^k=mE_k+2mB_j\frac{v^j}{c}-2mB_i\frac{v^j}{c}\Leftrightarrow\vec{F}=m\vec{E}-2m(\vec{B}\times\frac{\vec{v}}{c}) \tag{1.124}$$

$$\vec{F}=m\vec{E}+2m(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}) \tag{1.125}$$

Que é essencialmente uma pequena correcção da Lei da Dinâmica de Newton para a Lei da Gravitação Universal.

2. Soluções Simples das Equações do Gravitoelectromagnetismo

Embora o tema central desta dissertação seja para explicar os efeitos de Larmor, de De Sitter e outros previstos pela Teoria da Relatividade Geral, conforme foram experimentalmente provados pelo Gravity Probe B. Observa-se que o esforço dado no capítulo anterior para derivar as equações fulcrais do modelo GEM, obriga a dar lugar a um pequeno capítulo intermédio para explorar alguns resultados que podem ser obtidos directamente pelo formalismo do modelo GEM.

O efeito Gravito-Electromagnético nas órbitas planetárias

Na introdução deste trabalho mostramos que a ideia original da existência de um campo gravito-magnético foi primeiramente proposto nos finais do século XIX por O. Heaviside [2], embora a sua derivação original foi concretizada através uma transformação relativista do campo Newtoniano segundo uma analogia com o electromagnetismo. Contudo, este modelo nunca teve grande aceitação na altura, pois era a solução teoricamente mais complicada para explicar os efeitos observados experimentalmente na precessão do periélio de Mercúrio, do qual a Lei da Gravitação Universal não conseguia explicar.

Actualmente sabemos que este modelo não explicava correctamente o problema do periélio de Mercúrio, mas estava mais perto da solução apresentada por Einstein quando publicou a sua solução para este problema, que foi a primeira vitória da Teoria da Relatividade Geral.

(A resolução de Einstein da precessão da órbita de Mercúrio envolvia o uso de termos relativistas previstas pela Relatividade Geral que não podem ser derivadas correctamente pelo gravito-electromagnetismo.)

Apesar do modelo de Oliver Heaviside ter sido uma boa tentativa para explicar irregularidades que não estavam previstas na Lei de Newton, o modelo GEM prevê um tipo particular de precessão orbital que pode ser derivada a partir da Força de Lorentz:

$$\vec{F} = m\vec{E} + 2\,m\left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right) \tag{2.1}$$

Para simplificar o problema, sabemos que a maioria dos objectos primários massivos (estrelas na sequência principal, e planetas) mantêm a velocidade de rotação constante [4], portanto o seu momento angular é constante. Isto significa que o seu campo gravito-eléctrico é igual ao Newtoniano:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{2c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \approx -\nabla\phi \qquad (2.2)$$

De acordo com (2.1) a direcção do movimento do objecto secundário (como um planeta em torno do Sol) é perpendicular ao sentido do campo gravito-magnético, portanto não afecta a dinâmica da sua órbita [4]. O que vai afectar é a orientação axial da órbita, da mesma forma que um electrão gira em torno de um campo magnético.

Ora esta configuração de campos gravito-magnéticos e gravito-eléctricos serem perpendiculares entre si (e aproximadamente constantes ao longo da órbita) simplifica a resolução do problema.

Na electrodinâmica clássica, quando temos um campo eléctrico constante e um campo magnético constantes que sejam perpendiculares entre si, podemos aplicar o Teorema de Larmor [5].

Isto significa que a aceleração transversal do planeta em órbita dependerá apenas do campo Newtoniano (2.2), e a solução radial será igual ao esperado em [4]:

$$m\vec{a}_L = m\vec{E} \Leftrightarrow \vec{a}_L = -\nabla\phi \qquad (2.3)$$

Para um planeta em órbita do Sol, a intensidade do campo Newtoniano é aproximadamente constante na perspectiva de um observador ao longo de uma órbita aproximadamente circular, e como se trata de uma solução conhecida em [4], não vamos resolver a equação diferencial (2.3).

Quando introduzimos um campo gravito-magnético no sistema físico, então determinamos o equivalente à velocidade angular de Larmor, que depende exclusivamente do campo gravito-magnético do sistema [4]. Recordando que a aceleração centrífuga se define por [5]:

$$\vec{a}_c = \frac{v_L^2}{r} \qquad (2.4)$$

Então a velocidade de Larmor do sistema (e a sua frequência) serão dados por:

$$\frac{m v_L^2}{r} = \frac{2m\left|\vec{v}_L \times \vec{B}\right|}{c} \qquad (2.5)$$

$$\Omega_L = \frac{v_L}{r} = \frac{2B}{c} \qquad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.1) demonstramos que uma interpretação física do campo gravitomagnético seria a medição da precessão de um planeta similar ao efeito de Larmor.

$$\vec{F}=m\vec{E}+m(\vec{v}\times\vec{\Omega}) \tag{2.7}$$

No capítulo 3 iremos demonstrar que esta frequência de precessão é precisamente o efeito de Lense-Thirring.

Podemos determinar uma fórmula explícita para a frequência de Lense-Thirring derivada em (2.6): Para calcular uma estimativa razoavelmente precisa, podemos aplicar o Teorema de Stokes a (1.70), tendo o cuidado prévio de aplicar o caminho de integração ao longo do equador do primário, separando o domínio do integral de superfície em dois hemisférios simetricamente iguais em módulo.

Recordando que o Teorema de Stokes permite determinar o integral de superfície aberta, limitado por uma fronteira parametrizada por duas funções que respeitem [5]:

$$\oiint \vec{f}\cdot dS=\oiint (\vec{\nabla}\times\vec{g})\cdot dS\Leftrightarrow\oiint \vec{f}\cdot dS=\oint \vec{g}\cdot dl \tag{2.8}$$

Quando o campo gravito-magnético é uniforme (que é plausível quando um planeta conserva o seu momento angular), então a contribuição de cada hemisfério para o campo (1.68) será:

$$\vec{B}=\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\Leftrightarrow\oint \vec{B}\cdot dS=\oint \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})\,dS \tag{2.9}$$

$$\oint \vec{B}\cdot dS=\frac{1}{2}\oint \vec{A}\cdot dl\Leftrightarrow 2\pi R^2|\vec{B}|=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R|\vec{A}| \tag{2.10}$$

$$|\vec{B}|=\frac{|\vec{A}|}{2R} \tag{2.11}$$

Ao combinar as contribuições do campo gravito-magnético para os dois hemisférios, obtemos:

$$B=|\vec{B}_+|+|\vec{B}_-|=\frac{A}{R}\quad,\quad A=|\vec{A}| \tag{2.12}$$

Em (2.12) a variável ″R″ representa a distância do planeta do centro do primário (o corpo celeste que consideramos a fonte do campo gravitacional), o que está de acordo com o princípio de afastamento da fonte que baseou todo o edifício teórico do modelo GEM.

Ao aplicar a definição (1.56) adoptada para (2.12), derivamos explicitamente o potencial gravito-magnético em ordem ao momento angular ″L″ e raio ″r″ do primário:

$$A=\frac{G\,L\,r}{cR^3} \tag{2.13}$$

E o campo gravito-magnético será simplesmente:

$$B = \frac{G L r}{c R^4} \tag{2.14}$$

Portanto, verifica-se que a intensidade do campo gravito-magnético decresce inversamente com a quarta potência da distância do centro da fonte, ao contrário do campo Newtoniano que decresce inversamente ao quadrado da distância. Isso significa que a longas distâncias, os efeitos gravito-magnéticos são desprezáveis.

Substituindo (2.14) em (2.6) determinamos a frequência de precessão de Lense-Thirring medida por um satélite em órbita:

$$\Omega_L = \frac{2 G L r}{c^2 R^4} \tag{2.15}$$

Uma vez que a maioria dos planetas e estrelas são esferas quase perfeitas, podemos aplicar a fórmula do momento angular L=Iω para um corpo homogêneo esférico, e simplificar (2.15) :

$$\Omega_L = \frac{8 \pi G M r^3}{5 c^2 R^4 T}, L = \frac{4 \pi M r^2}{5 T} \tag{2.16}$$

Uma vez que podemos determinar o período de rotação T partir da velocidade angular ω, usando ω=2π/T, a fórmula (2.16) permite-nos determinar a frequência de precessão consultando uma tabela astronómica directamente [4].

Por exemplo, se considerarmos o caso em que a precessão é medida na superfície do planeta, então aplicaremos r=R em (2.16) e podemos criar uma tabela de valores para as medições teóricas dos diferentes planetas do Sistema Solar:

Astro	Massa (M_T)	Raio (R_T)	P. Rotação (T_T)	Precessão (marc/yr)
Sol	333333	109.09	35	22948.09
Mercúrio	0.06	0.38	58.65	0.65
Vénus	0.82	0.95	243.01	0.93
Terra	1	1	1	262.86
Marte	0.11	0.53	1.03	51.52
Ceres	1.67E-004	0.07	0.38	1.63
Júpiter	318.26	11.19	0.42	17800.16
Saturno	95.31	9.4	0.45	5922.69
Úrano	14.57	4.13	0.72	1287.95
Neptuno	17.25	3.81	0.67	1776.28
Plutão	1.67E-003	0.18	6.41	0.39
Éris	2.00E-003	0.19	15.06	0.19
Lua	0.01	0.27	27.43	0.43

(Os valores são relativos à Terra: $M_T = 5{,}98*10^{24}\,kg;\ R_T = 6370\,km;\ T_T = 86400\,s$)

A interpretação do quadro revela que o valor máximo da precessão de Lense-Thirring aumenta proporcionalmente com a massa da fonte gravitacional, mas para planetas com reduzida massa e reduzido período de rotação terão precessões mais baixas, de acordo com (2.16).

A partir de (2.16) podíamos determinar a equação de movimento do satélite (2.7), uma vez que determinavamos uma equação diferencial sem factores desconhecidos, mas como exige métodos numéricos e desvia do tema do trabalho, não iremos entrar em detalhes.

O vector de Poynting Gravitoelectromagnético

Um dos resultados publicados no artigo de Mashhoon [1] refere a existência de um vector de Poynting GEM, que permite determinar a taxa de energia radiada pelo campo gravito-electromagnético. No entanto mostra-se que a demonstração rigorosa da definição do vector de Poynting exigiria a introdução do pseudo-tensor de Landau-Lifshitz e o respectivo cálculo das componentes relevantes.

Se sacrificarmos ligeiramente o rigor, podemos aplicar uma demonstração concordante com uma analogia ao electromagnetismo, do qual começando a partir de uma equação de Maxwell-Mashhoon que foi derivada da Relatividade Geral no capítulo 1, podemos aplicar o raciocínio de Jackson [5]:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2.17}$$

Multiplicando esta equação pelo campo B, obteremos:

$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\vec{B}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2.18}$$

E tendo em conta a seguinte identidade vectorial:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \tag{2.19}$$

E utilizando as equações de Maxwell (1.89-1.92) em (2.19), resulta:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{c}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi G}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} \tag{2.20}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial(\vec{B}\cdot\vec{B})}{\partial t} - \frac{1}{2c}\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{E})}{\partial t} + \frac{4\pi G}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} \tag{2.21}$$

$$\frac{4\pi G}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{E}) \tag{2.22}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J}=\frac{c}{4\pi G}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})+\frac{1}{8\pi G}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{E}\cdot\vec{E}) \qquad (2.23)$$

A partir de (2.23) e comparando com o resultado equivalente em [5], podemos aplicar a adenda do artigo [1] e definir o vector de Poynting gravito-electromagnético como:

$$\vec{S}=-\frac{c}{2\pi G}(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad (2.24)$$

Os restantes termos correspondem ao trabalho mecânico do sistema, que de acordo com Jackson [5], é definido por:

$$\vec{E}\cdot\vec{J}\equiv\frac{dE_m}{dt}=W_m \qquad (2.25)$$

Por fim temos a energia do campo gravito-electromagnético que é similar ao resultado em [5]:

$$u=\frac{1}{8\pi G}(B^2+E^2) \qquad (2.26)$$

Portanto, a nível local, a equação de conservação da energia do campo gravito-magnético será dado pela seguinte lei:

$$\frac{dE_m}{dt}=-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.27)$$

Podemos determinar o fluxo do vector de Poynting ao integrar (2.33) num volume arbitrário:

$$\int\vec{E}\cdot\vec{J}\,dV=-\frac{1}{2}\int\vec{\nabla}\cdot\vec{S}\,dV+\int\frac{\partial u}{\partial t}dV\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\int(\vec{E}\cdot\vec{J}+u)\,dV=-\frac{1}{2}\oint\vec{n}\cdot\vec{S}\,dS \qquad (2.28)$$

Este pequeno exercício serviu para justificar a definição do vector de Poynting em [1] aplicando a analogia com a electrodinâmica clássica, mas deve-se ter muito cuidado com as consequências, porque ao contrário do electromagnetismo que é relativista, o GEM não é válido no regime relativista. Se queremos derivar correcções relativistas ao vector de Poynting GEM, então devemos usar o pseudo-tensor de Landau-Lifshitz com a Relatividade Geral.

O que (2.28) nos permite concluir é que o campo gravito-magnético não é conservativo, porque o produto $\vec{E}\cdot\vec{J}\neq 0$.

Para terminar este capítulo com um exemplo, vamos aplicar a fórmula do vector de Poynting (2.28) para o caso de um satélite a orbitar um planeta no plano perpendicular ao campo gravito-magnético, e medir directamente o fluxo de Poynting do primário.

Ao admitirmos que os campos são constantes em relação ao tempo, então a potência radiada dependerá exclusivamente do fluxo de Poynting:

$$P=-\frac{1}{2}\oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,dS \qquad (2.29)$$

Nas condições ideais, o integral (2.29) será igual ao módulo de (2.24), aplicando os campos gravito-electromagnéticos de acordo com (2.14), por causa da dependência da distância do observador:

$$P=\frac{c}{4\pi G}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\vec{E}\times\vec{B}|\,R^2\sin^3\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{cR^2}{4\pi G}\frac{4\pi GMr^3}{5cR^4T}\frac{GM}{R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,d\phi \qquad (2.30)$$

$$P=\frac{GM^2r^3}{5R^4T}\frac{8\pi}{3}=\frac{8\pi GM^2r^3}{15R^4T}=\frac{\Omega_L Mc^2}{3} \qquad (2.31)$$

Significa que o fluxo de Poynting depende da precessão de Lense-Thirring (2.16) do primário, e caso este fosse nulo, o fluxo seria igualmente zero de acordo com (2.31).

Este resultado revela que o campo gravito-magnético não é conservativo.

3. As precessões geodésica de De Sitter e Lense-Thirring, como um fenómeno gravitomagnético.

Apesar dos limites do formalismo gravito-electromagnético na aplicação de diferentes sistemas astro-físicos, a sua melhor aplicação é no estudo dos fenómenos de torção da métrica previstos pela Relatividade Geral que numa primeira ordem de aproximação são adequadamente descritas pela acção do campo gravito-magnético do primário que pode ser medido experimentalmente utilizando um satélite em torno dele. Assim dedicaremos o presente capítulo para derivar as precessões de Lense-Thirring, De Sitter e similares a partir da Relatividade Geral que podia ser generalizado para ordens de aproximação superiores.

Demonstração dos Efeitos de De Sitter e Lense-Thirring utilizando a Relatividade Geral

Neste capítulo vamos demonstrar com maior rigor os fundamentos teóricos que prevêem os fenómenos gravitomagnéticos mais importantes: o efeito geodésico (De Sitter) e a precessão de Lense-Thirring. Segundo a Relatividade Geral, estes fenómenos são o resultado da torção da métrica por um corpo massivo em rotação [6].

Para criar as bases da demonstração que culminará na derivação da precessão geodésica e de Lense-Thirring [7], podemos usar a analogia da precessão de um giroscópio que está sujeito a um campo gravítico fraco, como a base física que guiará o complexo procedimento da demonstração.

Tomando essa analogia como base, a principal constante de movimento do sistema físico é o tetravector momento angular S^{α} do giroscópio (que é o planeta cuja rotação actua como gerador do campo gravitomagnético) que se desloca numa curva tipo tempo $x^{\alpha}(s)$ com um vector tangente do deslocamento u^{α} [7].

Ao aplicar o princípio da equivalência ao tetravector momento angular em relação ao tetravector deslocamento, obtemos $S^{\alpha} u_{\alpha}=0$ de modo a torná-lo compatível com a cinemática relativista.

O tetravector momento angular obedece ao transporte de Fermi-Walker [6] ao longo da curva:

$$\partial_{\beta} S^{\alpha} u^{\beta}=u^{\alpha}(a^{\beta} S_{\beta})=u^{\alpha}(\partial_{\gamma} u^{\beta} u^{\gamma} S_{\beta});a^{\beta}=\partial_{\gamma} u^{\beta} u^{\gamma} \qquad (3.1)$$

Do qual o tetravector "a" destacado em (3.1) corresponde à aceleração do giroscópio de teste.

Quando temos uma curva tipo tempo que é uma geodésica, então a aceleração será nula, logo teremos, $\partial_\gamma u^\beta u^\gamma = 0$ e então: $\partial_\beta S^\alpha u^\beta = 0$. Portanto, o transporte de Fermi-Walker nestas condições será simplesmente o transporte paralelo ao longo da geodésica.

O próximo passo envolve a revisão da métrica local que define o modelo gravitoelectromagnético, do qual foi determinado no primeiro capítulo (1.100).

$$ds^2 = -c^2\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{2A_i}{c}dx_i\,dt + \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}\,dx^i\,dx^j \tag{3.2}$$

A discussão sobre os potenciais Newtoniano e gravitomagnético foram discutidas nos capítulos precedentes, portanto não repetiremos o assunto. O interesse de (3.2) serve apenas para anotar os termos do tensor de métrica.

Quando construimos a métrica a partir do produto tensorial de vectores tetrad locais, estes devem obedecer a uma identidade que crie um referencial local ortonormado de acordo com:

$$\lambda_{(\nu)}\lambda_{(\mu)} = g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(\nu)}\lambda^\beta_{(\mu)} = \eta_{\nu\mu} \tag{3.3}$$

A respeito do índice entre parêntesis de cada vector tetrad local, significa que nesta notação não aplicamos implicitamente a soma Einsteiniana, e cada tetrad local para cada índice corresponde ao vierbein local [6]. Este referencial está definido sobre o caminho temporal próprio de uma partícula. O vector tetrad tipo temporal é por definição o tetravector velocidade, $\lambda^\alpha_{(0)} \equiv u^\alpha$.

Para que respeite os limites físicos, os eixos espaciais não são rotacionais em relação ao referencial assimptótico de Minkowski, donde então: $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$.

Portanto, os eixos espaciais não são rotacionais em relação ao tetrad ortonormal local donde está embebido num sistema de coordenadas que é assimptoticamente plano (métrica de Minkowski). Logo, os eixos espaciais não aplicam o transporte de Fermi-Walker ao longo da linha temporal própria, mas são obtidas em cada ponto desta linha com uma transformação de Lorentz pura, isto é, sem rotações espaciais, entre o referencial local sobre o sistema de coordenadas da métrica gravitoelectromagnética e um observador que desloca ao longo da curva $x^\alpha(s)$ com velocidade u^α [7].

O tetrad local ortonormal forma uma base da métrica local, porque respeita:

$$d\,s^2 = \eta_{\alpha\beta}\theta^{[\alpha]}\theta^{[\beta]} \tag{3.4}$$

E na métrica gravito-electromagnética, os tetrads locais valerão:

$$\theta^{[0]}=\theta^{[0]}_{\sigma}\,d x^{\sigma}=c(1-\phi)\,d x^{0}-\frac{2A_i}{c^2}\,d x^{i} \tag{3.5}$$

$$\theta^{[i]}=\theta^{[i]}_{\sigma}\,d x^{\sigma}=(1+\phi)\,d x^{i} \tag{3.6}$$

Qualquer tensor relacionado com o tetrad local contêm os respectivos índices colocados entre parêntesis e obedecem à seguinte propriedade [8]:

$$\theta^{\alpha}_{[\beta]}=g^{\alpha\sigma}\eta_{\beta\rho}\theta^{[\rho]}_{\sigma} \tag{3.7}$$

Quando aplicamos uma transformação de Lorentz pura local entre uma tetrad local ortonormado para outro tetrad local ortonormado seguindo uma partícula de teste com velocidade u^{α}, podemos combinar estas transformações de modo a obter:

$$\lambda_{(\beta)}=\lambda^{\sigma}_{(\beta)}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\equiv\theta^{\sigma}_{[\rho]}\Lambda^{[\rho]}_{(\beta)}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \tag{3.8}$$

Nesta última definição, $\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}$ corresponde à base das coordenadas e $\lambda_{(\beta)}$ é a base ortonormada do movimento da partícula teste. Agora consideremos $v^{[i]}$, a velocidade da partícula de teste medida segundo o tetrad $\theta^{[\alpha]}$ e v^{i}, a velocidade medida pela base de coordenadas $d x^{\alpha}$.

Como estamos a trabalhar com velocidades e campos gravíticos pequenos, as seguintes relações serão válidas:

$$u^{[\alpha]}=\theta^{[\alpha]}_{\beta}u^{\beta}\,;\,u^{i}=v^{i}u^{0}\,;\,u^{[i]}=v^{[i]}u^{[0]} \tag{3.9}$$

E aplicando as aproximações em (3.9), obtemos um valor explícito para a velocidade:

$$u^{0}\approx 1+\frac{1}{2}v^{2}+\phi\,;\,u^{[0]}\approx 1+\frac{1}{2}v^{2}\Rightarrow v^{[i]}=v^{i}(1+\phi) \tag{3.10}$$

Quando aplicamos um regime de baixas velocidades em relação aos referenciais inerciais, a transformação de Lorentz reduz-se à transformação de Galileu, do qual podemos demonstrar utilizando uma expansão em série do factor de Lorentz contido no tensor da transformação de Lorentz.

Mas podemos aplicar uma aproximação de segunda ordem que é igualmente conhecida por transformação de Chandrasekhar-Contopoulos [8], que terá maior utilidade nos cálculos seguintes, dado que a precisão do modelo GEM ser de segunda ordem. Para obter as leis de transformação de Chandrasekhar-Contopoulos, basta determinar a série de Taylor até à segunda ordem do factor de Lorentz:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+O(v^5) \qquad (3.11)$$

Utilizaremos a transformação de Chandrasekhar-Contopoulos para descrever a transformação de um tetrad ortonormal local $\theta^{[\alpha]}$ em relação a um sistema de coordenadas fixo para um tetrad ortonormal local $\lambda^{[\alpha]}$ a deslocar-se com velocidade $v^{[i]}$ em relação a $\theta^{[\alpha]}$.

A transformação do tetravector posição será descrito pelas seguintes equações:

$$x^{(i)}=x^{[i]}-\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)v^{[i]}x^{[0]}+\frac{1}{2}x^{[k]}v_{[k]}v^{[i]}+O(v^4)\cdot x \qquad (3.12)$$

$$x^{(0)}=\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}\right)x^{[0]}-\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)x^{[k]}v_{[k]}+O(v^5)\cdot ct \qquad (3.13)$$

O tensor da transformação de Lorentz aproximado para uma transformação de Chandrasekhar-Contopoulos será:

$$\Lambda^{[0]}_{(0)}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} \qquad (3.14)$$

$$\Lambda^{[0]}_{(i)}=\Lambda^{[i]}_{(0)}\approx\frac{v^{[i]}}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{v^i}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\phi\right) \qquad (3.15)$$

$$\Lambda^{[i]}_{(k)}=\Lambda^{[k]}_{(i)}\approx\delta_{ik}+\frac{1}{2c^2}v^{[i]}v^{[k]}\approx\delta_{ik}+\frac{1}{2c^2}v^i v^k \qquad (3.16)$$

O referencial em deslocamento obedecerá as seguintes equações de transformação de Lorentz:

$$\lambda^{\alpha}_{(\beta)}=\theta^{\alpha}_{[\rho]}\Lambda^{[\rho]}_{(\beta)} \qquad (3.17)$$

Obtendo explicitamente os seguintes componentes do tetrad:

$$\lambda^0_{(0)}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\phi=u^0\,;\lambda^0_{(i)}=\frac{v^i}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+2\phi\right)+\frac{2A_i}{c^2} \qquad (3.18)$$

$$\lambda^i_{(0)}=\frac{v^i}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\phi\right)=u^i\,;\lambda^i_{(j)}=(1-\phi)\,\delta_{ij}+\frac{1}{2c^2}v^i v^j \qquad (3.19)$$

Os eixos espaciais $\lambda_{(i)}$ determinados neste referencial em particular, podem ser interpretados como os eixos definidos por três telescópios em eixos ortonormados que apontam sempre para a mesma estrela distante (cuja paralaxe ou movimento próprio na esfera celeste seja indestinguível pelos telescópios), e que a sua localização seja compatível com o referencial de inércia assimptótico de Minkowski $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, e então o eixo do tempo próprio deste tetrad local será a velocidade do observador que se desloca segundo $x^{\alpha}(s) : \lambda^{\alpha}_{(0)} = u^{\alpha}$ [8].

O vector momento angular S^{α} pode ser aplicado a uma partícula de teste animada com rotação própria, ou com determinado momento angular, que sirva de quantidade conservada [6].

Esta partícula de teste é designada por giroscópio de teste, uma vez que é o objecto físico mais simples animado de movimento angular que efectua uma precessão. Como S^{α} é um vector do tipo espaço, logo obtêm-se $S^{\alpha} u_{\alpha} = 0$ e no referencial local $\lambda_{(\alpha)}$ teremos $S^{(0)} = 0$.

Se admitirmos que a principal causa do torque (o torque é o momento da força gerada pela variação do momento angular) do giroscópio de teste é a força gravítica, podemos afirmar que existe conservação do momento angular, tal que, $S_{\alpha} S^{\alpha} = S_{(i)} S^{(i)} = const.$

A conservação do momento angular nestas condições em que temos referenciais não-inerciais deve ser feita com derivadas covariantes, conforme é explicado em particular em [6,8].

Portanto, a derivada covariante do momento angular do giroscópio de teste será dado por:

$$\frac{D S_{(i)}}{d s} \equiv \frac{D(S_{\alpha} \lambda^{\alpha}_{(i)})}{d s} = \frac{D S_{\alpha}}{d s} \lambda^{\alpha}_{(i)} + S_{\alpha} \frac{D \lambda^{\alpha}_{(i)}}{d s} = S_{\alpha} \frac{D \lambda^{\alpha}_{(i)}}{d s} \tag{3.20}$$

Quando aplicamos o transporte de Fermi-Walker para,

$$\frac{D S_{\alpha}}{d s} = u_{\alpha} \left(\frac{D u^{\sigma}}{d s} S_{\sigma} \right) \tag{3.21}$$

então resulta imediatamente que:

$$g_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha}_{(0)} \lambda^{\beta}_{(i)} = 0 \Rightarrow \frac{D S_{\alpha}}{d s} \lambda^{\alpha}_{(i)} = 0 \tag{3.22}$$

Assim justificamos que o primeiro termo da expansão da derivada covariante do momento angular vale zero, de acordo as leis de conservação elucidadas no início deste tópico [6].

Aplicando (3.22) em (3.18) e (3.19), podemos determinar os componentes de S^{α} (momento angular) como função de $S^{(\alpha)}$:

$$S^{0} = v^{i} S_{(i)} ; S^{i} = (1 - \phi) S_{(i)} + \frac{1}{2} v^{i} v^{j} S_{(j)} \tag{3.23}$$

Definindo a aceleração da partícula como a soma duma contribuição cinemática e outra gravitacional, respectivamente:

$$\frac{d\,v_i}{d\,s}=a_i+\partial_i\phi \tag{3.24}$$

E aplicando o transporte de Fermi-Walker (3.21) de acordo com (3.22), podemos desenvolver a equação e simplificar a expressão:

$$\frac{DS_{(i)}}{ds}=S_\alpha\frac{D\lambda^\alpha_{(i)}}{ds}\approx S_0\left(\frac{d\lambda^0_{(i)}}{ds}+\Gamma^0_{k0}\lambda^k_{(i)}\right)+S_j\left(\frac{d\lambda^j_{(i)}}{ds}+\Gamma^j_{k0}\lambda^k_{(j)}+\Gamma^j_{00}\lambda^0_{(i)}+\Gamma^j_{lk}\lambda^l_{(i)}v^k\right) \tag{3.25}$$

$$\frac{DS_{(i)}}{ds}\approx S_{(l)}\left[\frac{3}{2}\left(v_i a_l-v_l a_i\right)-\frac{3}{2}\left(v_i\partial_l\phi-v_l\partial_i\phi\right)+\frac{1}{c^2}\left(\partial_i A_l-\partial_l A_i\right)\right] \tag{3.26}$$

A derivada (3.26) pode ser reescrita na forma tensorial, usando o tensor de Levi-Civita:

$$\frac{dS_{(i)}}{ds}=\varepsilon^{(i)(j)(k)}\dot{\Omega}_{(j)}S_{(k)} \tag{3.27}$$

E introduzimos em (3.27) a aceleração angular do giroscópio:

$$\dot{\Omega}_{(j)}=\varepsilon_{(j)(l)(m)}\left(-\frac{3}{2}v_l a_m+\frac{3}{2}v_l\partial_m\phi-\frac{1}{c^2}\partial_l A_m\right) \tag{3.28}$$

Definindo convenientemente [6] o potencial gravito-magnético renormalizado e o vector momento angular de acordo com:

$$\vec{h}=\frac{2}{c^2}\vec{A};\vec{S}=\left(S_\alpha\lambda^\alpha_{(i)}\right)\cdot\vec{e}_{(i)} \tag{3.29}$$

E substituindo (3.29) em (3.27-3.28), bem como o facto do giroscópio no regime não-relativista a derivada (3.27) em ordem ao tempo próprio ser equivalente ao tempo ordinário, reescrevemos a equação dinâmica do giroscópio segundo a notação vectorial clássica:

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{S} \tag{3.30}$$

$$\dot{\vec{\Omega}}=-\frac{3}{2}\vec{v}\times\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{3}{2}\vec{v}\times\nabla\phi-\frac{1}{2}\nabla\times\vec{h} \tag{3.31}$$

A lei de movimento (3.30) complementado com (3.31) descreve um giroscópio de teste sujeito a um campo gravitomagnético têm algumas semelhanças com a equação dinâmica que descreve os referenciais acelerados [6,7]; mas esta comparação não é totalmente correcta porque não estamos a operar com forças inerciais.

A equação (3.31) resume toda a história dos fenómenos gravitomagnéticos que são importantes neste tópico em particular da Teoria da Relatividade Geral.

O primeiro termo da equação (3.31) corresponde à precessão de Thomas cuja origem deve-se à não-comutatividade entre as transformações de Lorentz e a aceleração não-gravitacional $\vec{a}$.

Quando admitimos que o sistema físico encontra-se em "queda livre", isto é, sem acelerações não-gravitacionais, a precessão de Thomas será nula.

O segundo e importante termo é conhecido por precessão de De Sitter ou precessão geodésica, cuja existência é explicada pela não comutatividade das transformações de Lorentz com a aceleração gravitacional $\nabla\phi$.

Assim, as precessões de Thomas e de De Sitter acabam por ser fenómenos muito similares entre si, mudando apenas a natureza da origem das acelerações.

A origem da precessão geodésica pode ser interpretada pelo efeito gerado graças ao transporte de Fermi-Walker quando é aplicado a uma métrica local curvilínea gerado por um campo gravítico.

Por fim, o terceiro e último termo corresponde à precessão de Lense-Thirring de um giroscópio em órbita, cuja origem deve-se ao campo gravitomagnético do corpo central [6,7].

Suplemento das Demonstrações Teóricas da Precessão de Lense-Thirring e De Sitter

A demonstração publicada em [6,7] continua com a determinação das simetrias que os diferentes termos de (3.31) possuem, e que iremos explorar.

Substituindo (3.31) em (3.30), podemos expandir os termos:

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{S}=\left(-\frac{3}{2}\vec{v}\times\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{v}\times\nabla\phi-\frac{1}{2}\nabla\times\vec{h}\right)\times\vec{S} \qquad (3.32)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{S}=\left(-\frac{3}{2}\vec{v}\times\vec{a}\right)\times\vec{S}-\left(\frac{3}{2}\nabla\phi\times\vec{v}\right)\times\vec{S}-\left(\frac{1}{2}\nabla\times\vec{h}\right)\times\vec{S} \qquad (3.33)$$

Até aqui não é novidade nenhuma no seguimento da secção anterior, porque cada um dos termos corresponde respectivamente à precessão de Thomas, de de Sitter e de Larmor-Thirring. Para a esmagadora maioria das aplicações que envolvem giroscópios localizados na órbita terrestre (por exemplo, o Gravity Probe B) o termo correspondente à precessão de Thomas é desprezável, uma vez que qualquer aceleração não-gravitacional não têm grande relevância para um sistema gravítico em equilíbrio.

Para expandir os termos contidos em (3.33) vamos recorrer a seguinte propriedade do cálculo vectorial: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ aplicável para qualquer vector e operador nabla.

Aplicando esta fórmula vamos determinar com cuidado todos os termos relevantes:

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=-\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{S})\vec{a}+\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{S}-\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{S})\vec{v}+\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{v})\vec{S}-\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{S})\vec{h}+\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\cdot\vec{h})\vec{S} \qquad (3.34)$$

Até aqui não fizemos nada de novo, porque o nosso objectivo é seguir a demonstração dada pelo artigo [7] que pretendia extrair da fórmula (3.33) os termos simétricos e antisimétricos da equação da precessão de rotação do giroscópio, pondo em evidência a precessão geodésica.

Para alcançarmos este objectivo, só temos que isolar o terceiro e quarto termo de (3.34) e simetrizar os termos conforme necessário.

$$\frac{d\vec{S}}{dt}-\vec{\Omega}\times\vec{S}=-\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{S})\vec{v}+\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{v})\vec{S}+\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{S})\vec{v}-\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{v})\vec{S} \qquad (3.35)$$

Como os termos dos produtos internos são comutativos e os termos dos produtos externos são anticomutativos, acrescentamos ainda:

$$\frac{3}{2}(\vec{v}\times\nabla\phi)\times\vec{S}=\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{S})\nabla\phi-\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S} \qquad (3.36)$$

E podemos substituir (3.36) em (3.35):

$$\frac{d\vec{S}}{dt}-\vec{\Omega}\times\vec{S}=-\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{S})\vec{v}+\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{v})\vec{S}+\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{S})\nabla\phi-\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S} \qquad (3.37)$$

Devido à simetria dos termos relacionados com $\vec{S}$, estes cancelam-se por simetria, mas como correspondem à componente simétrica da precessão geodésica, concluimos:

$$\frac{d\vec{S}}{dt}-\vec{\Omega}\times\vec{S}=-\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{S})\vec{v}+\frac{3}{2}(\nabla\phi\cdot\vec{v})\vec{S}+\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{S})\nabla\phi-\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S} \qquad (3.38)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt}-\vec{\Omega}\times\vec{S}=-\frac{3}{2}(\vec{S}\cdot\nabla\phi)\vec{v}+\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\vec{S})\nabla\phi-\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S} \qquad (3.39)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt}-\vec{\Omega}\times\vec{S}=-\frac{3}{2}(\vec{S}\cdot\nabla\phi)\vec{v}-\frac{3}{2}(\vec{S}\cdot\vec{v})\nabla\phi+\frac{3}{2}(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S} \qquad (3.40)$$

Após todos estes truques matemáticos que aplicamos na equação anterior, o resultado final será:

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{S}+3(\vec{v}\cdot\nabla\phi)\vec{S}-\frac{3}{2}\left((\vec{S}\cdot\nabla\phi)\vec{v}+(\vec{S}\cdot\vec{v})\nabla\phi\right) \qquad (3.41)$$

A última equação limita-se a assinalar os termos simétricos (terminados em $\vec{S}$) e os termos antisimétricos (outros termos em evidência) da precessão geodésica.

Os termos com que vamos trabalhar com profundidade serão a precessão geodésica e a precessão de Lense-Thirring, que recapitularemos mais uma vez:

Precessão geodésica:

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3}{2}(\nabla\phi \times \vec{v}) \tag{3.42}$$

Precessão de Lense-Thirring:

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{h}) \tag{3.43}$$

As equações (3.42) e (3.43) podem ser ligeiramente corrigidas, quando consideramos a contribuição de massas pontuais distantes, que no exemplo concreto da Terra podemos incluir o campo gravítico da Lua [8].

A densidade da matéria para um corpo central rodeamos por **n** massas M discretas é dada por:

$$\rho_N(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) + \sum_{n=1}^{N} M_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \tag{3.44}$$

Assim, os potenciais newtoniano e gravitoelectromagnético ganham um novo termo:

$$\phi_N(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - G\sum_{n=1}^{N} \frac{M_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \quad , \quad h_N(\vec{r}) = h(\vec{r}) + 4G\sum_{n=1}^{N} \frac{M_n \vec{v}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \tag{3.45}$$

Aplicando a fórmula para o momento angular de um conjunto de massas $\vec{L}_n = M_n(\vec{r} - \vec{r}_n) \times \vec{v}_n$, e substituindo (3.45) em (3.42) e (3.43) obtemos as correcções para as precessões:

$$\vec{\Omega}_G^N = \vec{\Omega}_G - \frac{3G}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{M_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} \times \vec{v}\right) \tag{3.46}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}}^N = \vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} - 2G\sum_{n=1}^{N} \frac{\vec{L}_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|^3} \tag{3.47}$$

Derivação da Precessão de De Sitter e Lense-Thirring: Expansão Quadrupolar

Para concluirmos a construção da teoria necessária para compreender o Gravity Probe B [7,8] ou qualquer experiência precisa, será inevitável a introdução de correcções ao modelo GEM que estivemos a derivar da RG. Felizmente, para a esmagadora maioria dos casos que envolva maior precisão de medições das precessões de origem gravitomagnética, basta aplicar uma expansão multipolar aos potenciais, por causa da simetria esférica dos potenciais gravito-electromagnéticos.

Quando estudamos os fenómenos gravitomagnéticos mais importantes, admitimos até aqui que eram corpos esféricos e uniformes, que permitiu determinar algumas expressões calculáveis que revelaram ser uma boa estimativa.

Agora, baseando no facto dos planetas telúricos (como a Terra) serem corpos rígidos em rotação (o Sol e os planetas jovianos são fluídos) podemos redefinir o potencial vector gravitomagnético, porque num sólido em rotação verifica-se $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, e definimos [7]:

$$\vec{h}(\vec{r})=4\,\vec{\omega}\times\vec{\Pi}(\vec{r}) \tag{3.48}$$

$$\vec{\Pi}(\vec{r})=G\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'d^3\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.49}$$

Este novo potencial vector (3.49) é um artifício puramente matemático que será apenas referido como potencial $\vec{\Pi}(\vec{r})$, e servirá como uma abreviatura nos cálculos que se seguem.

O principal cálculo auxiliar é determinar a divergência do potencial $\vec{\Pi}(\vec{r})$, em relação à sua definição original do potencial gravitomagnético.

Seguindo esta premissa, o cálculo da divergência deste potencial vector é imediato:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}=G\int\nabla\frac{\rho\,\vec{r}\,d^3\vec{r}}{R}=\frac{G}{R}\int\rho\,d^3r+\frac{G}{R}\int\nabla\rho\,\vec{r}\,d^3\vec{r} \tag{3.50}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}=\frac{GM}{R}+\frac{G\nabla M\cdot\vec{r}}{R}=-\phi-\nabla\phi\cdot\vec{r} \tag{3.51}$$

Utilizando (3.51) podemos determinar a precessão de Lense-Thirring em função deste potencial:

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}}=\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{h})=2(\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{\Pi}))=-2((\vec{\omega}\times\vec{\Pi})\times\vec{\nabla}) \tag{3.52}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}}=-2(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Pi}+2(\vec{\omega}\cdot\vec{\Pi})\vec{\nabla}=-2(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Pi}+2(\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi})\vec{\omega} \tag{3.53}$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}}=-2((\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{\Pi}+\vec{\omega}(\phi+\nabla\phi\cdot\vec{r})) \tag{3.54}$$

Quando restringimos o desenvolvimento do campo gravitomagnético num único eixo (eixo dos zz), a equação (3.54) simplifica-se:

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}}\cdot\vec{e}_z=-2\,\omega(\partial_z\vec{\Pi}+(\phi+r\partial_r\phi)) \tag{3.55}$$

A equação (3.55) contêm a chave para calcular eficazmente a precessão de Lense-Thirring, especialmente quando aplicamos o modelo para satélites localizados numa órbita a baixa altitude.

Nestas baixas altitudes, devemos ter em conta as contribuições multipolares dos potenciais gravito-electromagnéticos para corrigir os efeitos não-radiais nos cálculos que exigem maior precisão. Quando a distância é muito grande, estas contribuições são desprezáveis [8].

Agora vamos introduzir a expansão multipolar para os potenciais gravitacionais, uma vez que as componentes angulares dos respectivos potenciais terão alguma influência no cálculo das precessões. Em sistemas físicos que respeitam uma simetria esférica, devemos introduzir a família de funções conhecidas por harmónicas esféricas:

$$Y_{lm}^{\nu}(\theta,\phi)=P_l^m(\cos(\theta))\exp(im\phi)=P_l^m(\cos(\theta))\begin{Bmatrix}\cos(m\phi);\nu\equiv c\\ \sin(m\phi);\nu\equiv s\end{Bmatrix} \tag{3.56}$$

Que são essencialmente uma generalização dos polinómios de Legendre:

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \tag{3.57}$$

Do qual os polinómios de Legendre comuns são a solução da seguinte equação diferencial:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_l(x)}{dx^2}-2x\frac{dP_l(x)}{dx}+l(l+1)P_l(x)=0 \tag{3.58}$$

As fórmulas para os potenciais tornaram-se um pouco mais complexos, devido à introdução da expansão polar, e desta vez limitaremos a apresentar o resultado final [7]:

$$\phi(\vec{R})=-\frac{GM}{R}\left[1+\sum_{l\geq 2,m,\nu}a_{lm}^{\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}^{\nu}\right] \tag{3.59}$$

$$\Pi_i(\vec{R})=\frac{GMr}{R}\left[\sum_{l\geq 1,m,\nu}p_{lm}^{i\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}^{\nu}\right] \tag{3.60}$$

Os coeficientes contidos em (3.59) e (3.60) são calculados pelos seguintes integrais:

$$a_{lm}^{\nu}=\frac{2-\delta_{m0}}{M}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int \rho(\vec{r})\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{lm}^{\nu}d^3\vec{x},\, m=0,1,\ldots,l \tag{3.61}$$

$$p_{lm}^{i\nu}=\frac{2-\delta_{m0}}{M}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int \rho(\vec{r})\left(\frac{r}{R}\right)^l\left(\frac{x_i}{R}\right) Y_{lm}^{\nu}d^3\vec{x},\,\nu=c,s,\, i=1,2,3 \tag{3.62}$$

Seria extremamente delicado calcular explicitamente todos os termos das expansões multi-polares presentes em (3.59-3.62), embora o uso de programas de cálculo numérico e simbólico ajudem bastante neste aspecto. Na prática, na maioria dos casos é suficientemente preciso calcular até à ordem quadrupolar (l=2).

O cálculo dos coeficientes quadrupolares é similar ao cálculo dos elementos do tensor de inércia:

$$I_{ij}=\int \rho(\vec{r})(r^2\delta_{ij}-x_i x_j)\,d^3\vec{x} \quad (3.63)$$

Efectuando todos os cálculos para os coeficientes presentes nos potenciais, determinamos a correcção quadrupolar dos potenciais gravíticos:

$$\phi(\vec{R})=-\frac{GM}{R}-\frac{G}{2R^3}\left(tr\,I-\frac{3}{R^2}I_{ij}r^i r^j\right) \quad (3.64)$$

$$\Pi_1(\vec{R})=-\frac{G}{R^3}\left(I_{1i}r^i-\frac{1}{2}(tr\,I)\,r_1\right) \quad (3.65)$$

$$\Pi_2(\vec{R})=-\frac{G}{R^3}\left(I_{2i}r^i-\frac{1}{2}(tr\,I)\,r_2\right) \quad (3.66)$$

$$\Pi_3(\vec{R})=-\frac{G}{R^3}\left(I_{3i}r^i-\frac{1}{2}(tr\,I)\,r_3\right) \quad (3.67)$$

Felizmente o potencial vectorial pode ser condensado na forma vectorial:

$$\vec{\Pi}(\vec{R})=-\frac{G}{R^3}\left(\bar{I}\cdot\vec{r}-\frac{1}{2}\,tr\,I\,\vec{r}\right) \quad (3.68)$$

Agora temos o material necessário para determinar a precessão geodésica (De Sitter) e de Lense-Thirring com a correcção quadrupolar ao aplicar as fórmulas derivadas em (3.42) e (3.43), utilizando (3.64) e (3.68). Para minimizar a dispersão dos cálculos intermédios durante a demonstração, iremos resolver parcelamente cada passo.

Principiando pelo cálculo da precessão geodésica que exige previamente o cálculo do gradiente de (3.64), obtemos o pretendido após alguns cálculos com o devido cuidado:

$$\nabla\phi=\nabla\left[-\frac{GM}{R}-\frac{G}{2R^3}\,tr\,I+\frac{3G}{2R^5}\bar{I}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\right] \quad (3.69)$$

$$\nabla\phi=\nabla\left[-\frac{GM}{R}-\frac{G}{2R^3}\,tr\,I+\frac{3G}{2R^3}I\right]=\left(\frac{GM}{R^2}+\frac{3G}{2R^4}\,tr\,I-\frac{9G}{2R^6}\bar{I}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\right)\nabla\vec{e}_R \quad (3.70)$$

Uma vez que gradiente está definido em função do raio R, o cálculo do gradiente de (3.69) é imediato, porque podemos normalizar o versor da seguinte forma: $\nabla\vec{e}_R=\frac{\vec{R}}{R}\vec{e}_R$.

Desta forma, podemos aplicar (3.70) directamente em (3.42) e calcular a precessão geodésica:

$$\vec{\Omega}_G=\frac{3}{2}(\nabla\phi\times\vec{v})=\left(\frac{3GM}{2R^3}+\frac{9G}{4R^5}\,tr\,I-\frac{27G}{4R^7}\bar{I}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\right)(\vec{r}\times\vec{v}) \quad (3.71)$$

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3G}{2R^3}\left[M + \frac{3}{2R^2}\,tr\,I - \frac{9}{2r^4}\bar{I}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\right](\vec{r}\times\vec{v}) \qquad (3.72)$$

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3G}{2R^3}\left[\left[M + \frac{3}{2R^2}\left(tr\,I - \frac{5}{2R^2}\bar{I}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})\right)\right](\vec{r}\times\vec{v}) + \frac{3}{R^2}(\bar{I}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}))\right] \qquad (3.73)$$

A precessão de Lense-Thirring com a correcção quadrupolar determina-se a partir de (3.68), aplicando a definição (3.43):

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2G\bar{I}\cdot\vec{\omega}}{R^3} - G\,tr\,I - 2\vec{\omega}\cdot\left(-\frac{GM}{R} - \frac{G}{2R^3}\,tr\,I + \frac{3G}{2R^3}\bar{I} + \left(\frac{GM}{R^2} + \frac{3G}{2R^4}\,tr\,I - \frac{9G}{2R^4}\bar{I}\right)\cdot\vec{r}\right) \qquad (3.74)$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2G\bar{I}\cdot\vec{\omega}}{R^3} - G\,tr\,I + \frac{2GM\vec{\omega}}{R} + \frac{G\vec{\omega}}{R^3}\,tr\,I - \frac{3G\vec{\omega}}{R^3}\cdot\bar{I} - \left(\frac{GM}{R^2} + \frac{3G}{2R^4}\,tr\,I - \frac{9G}{2R^4}\bar{I}\right)\cdot\vec{\omega}\cdot\vec{r} \qquad (3.75)$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2G\bar{I}\cdot\vec{\omega}}{R^3} - G\,tr\,I + \left(\frac{G}{R^3}\,tr\,I - \frac{3G}{R^3}\bar{I}\right)\cdot\vec{\omega} - \frac{GM}{R^2}\vec{\omega}\cdot\vec{r} - \left(\frac{3G}{2R^2}\,tr\,I - \frac{9G}{2R^2}\bar{I}\right)\cdot\left(\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{r}}{R^2}\right) \qquad (3.76)$$

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2G}{R^3}\left[\bar{I}\cdot\vec{\omega} + \left(tr\,I - \frac{3}{2}\bar{I}\right)\cdot\vec{\omega} - \left(\frac{3}{4}\,tr\,I\vec{r} - \frac{9}{4}\bar{I}\cdot\vec{r}\right)\frac{\vec{\omega}\cdot\vec{r}}{R^2}\right] - \frac{GM}{R^2}\vec{\omega}\cdot\vec{r} - \frac{2G^2\bar{I}\cdot\vec{\omega}\,tr\,I}{R^3} \qquad (3.77)$$

Para medições com a precisão do Gravity Probe B, podemos aproximar o momento de inércia como um escalar invariante (e não como um tensor) por este ser diagonalizável, e então podemos simplificar (3.73) e (3.77) de forma a [7,8]:

$$\vec{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2GI}{R^3}\left(-\vec{\omega} + \frac{3}{R^2}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\,\vec{r}\right) \qquad (3.78)$$

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3G}{2R^3}\left[\left(M - \frac{3}{R^2}I\right)(\vec{r}\times\vec{v}) + \frac{3}{R^2}(I\vec{r}\times\vec{v})\right] \qquad (3.79)$$

E com estas fórmulas determinamos a base mínima teórica para estudarmos os resultados experimentais efectuados por diversos satélites em órbita, como o Gravity Probe B, que pretendem demonstrar os efeitos gravito-magnéticos previstos pelo modelo GEM.

Extra: Precessão Temporal gerado por um Campo Gravitomagnético

O campo gravitomagnético gera um elevado número de fenómenos físicos, e um deles é a precessão temporal observada num campo gravitomagnético gerado por um grande corpo em rotação .

A precessão temporal é a diferença de tempo registada por dois observadores que orbitavam o planeta em torno do equador em sentidos opostos. Este fenómeno resulta da torsão da métrica local na direcção azimutal da rotação do planeta, interpretada como o campo gravitomagnético do sistema físico [9].

A métrica local do sistema será a mesma do qual determinamos na introdução ao modelo gravitomagnético, portanto não voltamos a considerar aqui neste parágrafo.

Podemos recapitular as definições dos potenciais newtoniano e gravitomagnético que devem ser extendidas em relação à respectiva ordem multipolar, verificando [9] :

$$\phi(r,\theta)=\frac{GM}{c^2 R}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos(\theta))\right] \tag{3.80}$$

$$\vec{A}(r,\theta)_i=\frac{G(\vec{J}\times\vec{r})_i}{c^3 R^3}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} K_n\left(\frac{r}{R}\right)^n P'_{n+1}(\cos(\theta))\right] \tag{3.81}$$

$$J_n=\frac{1}{Mr^n}\int \rho(r',\theta')\, r'^n P_n(\cos(\theta'))\, d^3 r' \tag{3.82}$$

$$K_n=\frac{2}{2\text{n}+3}\frac{Mr^2}{J}(L_n+J_{n+2}) \tag{3.83}$$

$$L_n=\frac{1}{Mr^{n+2}}\int \rho(r',\theta')\, r'^{n+2} P_n(\cos(\theta'))\, d^3 r' \tag{3.84}$$

$$P'_n(x)=\frac{\partial P_n(x)}{\partial x} \tag{3.85}$$

Agora consideraremos que o planeta é esféricamente simétrico e que o satélite de prova efectua uma órbita no plano equatorial segundo o eixo azimutal. Portanto, admitimos que o raio "r" da órbita é constante e o ângulo azimutal θ=π/2 [9].

Recordemos [3] que a equação geodésica radial é dada pela seguinte equação:

$$\frac{d^2 x^r}{d\tau^2}+\Gamma^r_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \tag{3.86}$$

Efectuando uma mudança de variável de modo a $d\tau=\frac{d\phi}{dt}$ e admitindo uma aceleração nula, determinamos a seguinte expressão para a geodésica da precessão.

$$\Gamma^{r}_{00}\left(\frac{c\,dt}{d\phi}\right)^{2}+2\left(\frac{c\,dt}{d\phi}\right)\Gamma^{r}_{0\phi}+\Gamma^{r}_{\phi\phi}=0 \tag{3.87}$$

$$\left(\frac{c\,dt}{d\phi}\right)^{2}+2\left(\frac{c\,dt}{d\phi}\right)\frac{\Gamma^{r}_{0\phi}}{\Gamma^{r}_{00}}+\frac{\Gamma^{r}_{\phi\phi}}{\Gamma^{r}_{00}}=0 \tag{3.88}$$

Os termos para os quocientes contidos nas conexões de Christoffel podem ser aproximados:

$$\frac{\Gamma^{r}_{0\phi}}{\Gamma^{r}_{00}}=\frac{\partial_{r}g_{0\phi}}{\partial_{r}g_{00}};\frac{\Gamma^{r}_{\phi\phi}}{\Gamma^{r}_{00}}=\frac{\partial_{r}g_{\phi\phi}}{\partial_{r}g_{00}} \tag{3.89}$$

A métrica local em coordenadas esféricas será descrita pelos seguintes componentes:

$$g_{00}=-1+2\,\phi;g_{0\theta}=-2\,A\sin^{2}(\theta);g_{\theta\theta}=r^{2}(1+2\,\phi)\sin^{2}(\theta) \tag{3.90}$$

Resultando a seguinte descrição para o potencial vector axial gravitomagnético:

$$A(r,\theta)=\frac{GL}{c^{3}R}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}K_{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}P'_{n+1}(\cos(\theta))\right] \tag{3.91}$$

As derivadas contidas em (3.89) poderão ser determinadas de acordo com (3.90):

$$\partial_{r}g_{00}=2\,\partial_{r}\phi \tag{3.92}$$

$$\partial_{r}g_{0\phi}=-2\,\partial_{r}A\sin^{2}(\theta) \tag{3.93}$$

$$\partial_{r}g_{\phi\phi}=2\,r(1+2\,\phi)\sin^{2}(\theta)+2\,r^{2}\,\partial_{r}\phi\sin^{2}(\theta) \tag{3.94}$$

Recordando que a métrica local do modelo gravitoelectromagnético na forma polar determina-se:

$$-c^{2}\,d\tau^{2}=c^{2}\,g_{00}\,dt^{2}+2\,c\,g_{0\phi}\,dt\,d\phi+g_{\phi\phi}\,d\phi^{2} \tag{3.95}$$

do qual dividimos pela coordenada azimutal:

$$\left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)^{2}=(1-2\,\phi)\left(\frac{dt}{d\phi}\right)^{2}-\frac{r^{2}}{c^{2}}+4\,A\left(\frac{dt}{d\phi}\right) \tag{3.96}$$

Para variações infinitesimais dos potenciais gravitoelectromagnéticos situados a longa distância da fonte, a equação (3.96) simplifica-se, porque podemos desprezar termos de segunda ordem e também determinar a seguinte derivada em função do seu valor médio [9] :

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial t}{\partial\phi}\approx\frac{2}{c}\frac{\partial_{r}(A\sin^{2}(\theta))}{\partial_{r}\phi}\to\left\langle\frac{\partial t}{\partial\phi}\right\rangle\approx\frac{1}{c}\frac{\partial_{r}A}{\partial_{r}\phi} \tag{3.97}$$

Comparando (3.97) com (3.96), tendo em conta as derivadas (3.92-3.94), eliminamos todos os termos independentes, resultando a seguinte aproximação:

$$\left(\frac{d\tau}{d\phi}\right)\approx -2\left(\frac{dt}{d\phi}\right) \tag{3.98}$$

Integrando (3.98) sobre o eixo polar e aplicando (3.97), determinamos o valor da precessão temporal medido ao longo do eixo azimutal:

$$\delta\tau=\frac{2}{c}\int_0^{2\pi}\frac{\partial_r A}{\partial_r \phi}d\phi=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial_r A}{\partial_r \phi} \tag{3.99}$$

Substituindo os termos dos potenciais definidos em (3.80) e (3.91) na equação (3.99), derivamos a fórmula da precessão temporal com uma correcção quadrupolar [9] :

$$\delta\tau=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial_r A}{\partial_r \phi}\approx\frac{4\pi L}{Mc^2}\left[1+\left(\frac{3}{2}J_2-\frac{9}{2}K_2\right)\frac{r^2}{R^2}\right] \tag{3.100}$$

Substituindo em (3.100) os parâmetros relativos à Terra, e considerando que o observador se encontra na superfície do referido planeta, determinamos o valor numérico teórico para a precessão temporal [9]:

$$\frac{r}{R}\approx 1\,;J_2\approx K_2\approx 10^{-3};L=\frac{4\pi}{5T}Mr^2;r\approx 6{,}4*10^6\,m;T\approx 86400\,s \tag{3.101}$$

$$\delta\tau\approx\frac{16\pi^2 r^2}{5c^2 T}\left[1+\left(\frac{3}{2}J_2-\frac{9}{2}K_2\right)\right]\approx 1{,}67*10^{-7}\,s \tag{3.102}$$

Este resultado concorda com a noção de orientação da torção exercida pelo campo gravitomagnético da Terra quando discutimos os fundamentos da teoria no capitulo 1.

No futuro, pretende-se que um novo ensaio experimental designado Gravity Probe C consiga medir a diferença de tempo entre dois satélites em órbita equatorial em sentidos opostos [9].

4. Apresentação e análise sumária dos resultados experimentais do Gravity Probe B

Neste capítulo vamos confrontar a teoria derivada nos capítulos anteriores com os resultados experimentais obtidos por diferentes experiências, culminando no Gravity Probe B do qual iremos expor algum detalhe de fundo para compreender a grande importância deste teste que confirmou de forma fidigna [9] a própria Teoria da Relatividade Geral.

Resultados experimentais efectuados pela análise das órbitas dos satélites LAGEOS

Finalizado a análise teórica da precessão de Lense-Thirring e de De Sitter, devemos confrontar estes modelos com a análise dos estudos experimentais efectuados neste sentido. Começaremos nesta secção a análise de órbitas de satélites de órbita elíptica e de grande altitude como o LAGEOS, e posteriormente analisaremos o Gravity Probe B que exige a correcção quadrupolar das respectivas precessões [10,11] :

Para um satélite que descreve uma órbita elíptica em torno de um planeta, será necessário distingir a precessão nodal e secular de Lense-Thirring [10]:

A precessão nodal é a precessão convencional de Lense-Thirring que introduzimos no capítulo anterior:

$$\Omega_{\mathrm{LT}}=\frac{2GL}{c^2R^3}=\frac{2GL}{c^2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.1}$$

A precessão secular resulta de uma lei de conservação de momento orbital designado por vector de Laplace-Runge-Lenz [6,8] que relaciona com a precessão nodal pela fórmula:

$$\dot{\omega}_{\mathrm{LT}}=-3\,\Omega_{\mathrm{LT}}\cos i=-\frac{6GL\cos i}{c^2R^3}=-\frac{6GL\cos i}{c^2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.2}$$

Nesta fórmula consideramos a possibilidade das órbitas dos satélites serem elípticas, e assim, teremos que substituir o raio R fixo, que é verdade para uma órbita circular, pelo semi-eixo maior “a” e a respectiva excentricidade “e” da elipse que descreve a órbita do referido satélite.

Assim, estas três quantidades estão relacionadas por, $R=a\sqrt{1-e^2}$.

Outro parâmetro importante é o ângulo de inclinação “i” entre o equador do planeta e o plano da órbita do satélite.

Como estamos a trabalhar com planetas esféricos, podemos particularizar as fórmulas anteriores, seguindo o mesmo procedimento que demos ao tratar a dedução da precessão de Lense-Thirring para um corpo esférico.

O momento angular relaciona-se com o momento de inércia, donde $L = I\omega$, e $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Para um planeta com raio “r” e massa M, o seu momento de inércia será: $I = \frac{2}{5} M r^2$.

As fórmulas para as precessões de Lense-Thirring nodais e seculares serão deduzidas ao substituir as definições relativas ao momento angular em (4.1) e (4.2):

$$\Omega_{\mathrm{LT}} = \frac{8\pi r^2 GM}{5c^2 a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}} T} \tag{4.3}$$

$$\dot{\omega}_{\mathrm{LT}} = -\frac{24\pi r^2 GM \cos i}{5c^2 a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}} T} \tag{4.4}$$

As equações (4.3) e (4.4) permitem determinar valores teóricos para a precessão de Lense-Thirring para um satélite em torno da Terra, e compará-los com os valores experimentais.

A primeira aplicação experimental do estudo do campo gravitomagnético baseou-se na análise das órbitas de determinados satélites, cuja variação da órbita fosse suficiente perceptível para determinar a precessão de Lense-Thirring [10].

Considerando os resultados experimentais para os satélites LAGEOS I e LAGEOS II, que historicamente foram os primeiros satélites a registar a precessão de Lense-Thirring, determinaremos numa tabela os resultados teóricos segundo (4.3) e (4.4) e comparamos com os respectivos resultados experimentais publicados em [10]:

Satélite	Semi-eixo (a=km)	exc. (e)	incli.orbital (i)	P.nodal (teo)	P.secular (teo)	P.nodal (exp)	P.secular (exp)
LAGEOS I	12270	0.004	109.900	37.186	37.972	31.000	32.000
LAGEOS II	12163	0.014	52.650	38.758	-70.542	31.500	-57.000

Segundo esta tabela, cujos valores para a precessão estão medidas em mili-arcos de segundo por ano (marc/yr), verifica-se um certo desvio dos valores experimentais em relação aos teóricos embora estejam todos dentro da mesma ordem de grandeza.

Estatisticamente observa-se que as medidas contêm um erro relativo de 25%, e não estamos a considerar correcções teóricas que foram introduzidas numa análise posterior [10].

Salientamos que os satélites LAGEOS não foram desenvolvidos especificamente para medir a precessão de Lense-Thirring, mas para realizar medidas de interferometria laser na superfície da Terra. Os resultados referentes a este fenómeno foram determinados ao analisar todos os dados das suas órbitas, e este método aplicou-se a um certo número de satélites que orbitavam a Terra [8].

O principal problema das medições experimentais prende-se com o elevado grau de incerteza (na ordem dos 20 a 30%) que gerou uma grande barra de erro, tornando a verificação experimental do fenómeno da precessão de Lense-Thirring pouco fiável [10].

O análise experimental da precessão de Lense-Thirring exigiria a concepção de novos satélites destinados a estudar o campo gravitomagnético da Terra, porque o estudo deste fenómeno tornou-se importante para consolidar a fiabilidade da Teoria da Relatividade Geral [11].

Podemos aplicar o mesmo método de análise para as órbitas de satélites terrestres, mas para determinar o resultado pretendido serão necessários mais de três a cinco anos de observações para obtermos um resultado minimamente fiável. Segundo o artigo publicado em [10], para além dos satélites LAGEOS que serviram de medição para a precessão de Lense-Thirring, também os satélites LARES e OPTIS estiveram aptos para determinar as suas precessões, mas os erros e desvios de medição eram maiores e deviam igualmente a outros factores espaciais que perturbavam as órbitas dos satélites mais longas, como a radiação solar ou o efeito de Yakovsky:

Satélite	Semi-eixo (a=km)	exc. (e)	incli.orbital (i)	P.nodal (teo)	P.secular (teo)	P.nodal (exp)	P.secular (exp)
LARES	12270	0.040	70	39.297	-40.321	31.000	-45.000
OPTIS	29300	0.478	63.4	7.198	-9.668	15.000	-16.000

Para obtemos uma medição fidigna, seria necessário uma órbita mais baixa e um satélite dedicado para reduzir os efeitos não-gravitacionais. Enquanto os resultados publicados por análise estatística de determinados satélites eram divulgados que apontavam para a existência da precessão de Lense-Thirring, a NASA preparava o lançamento do Gravity Probe B [11].

Derivação Teórica da Correcção Quadrupolar dos Potenciais aplicado no Gravity Probe B

A determinação experimental da precessão de Lense-Thirring e da precessão geodésica quando aplicado ao Gravity Probe B exige a revisão de todo o trabalho efectuado nas sessões anteriores, de modo a determinar a fiabilidade do modelo teórico com os resultados experimentais.

Para um satélite como o Gravity Probe B, precisamos de aplicar a expansão multipolar de primeira ordem que derivamos no capítulo 3.

A grandeza de precisão exigida pela experiência era de primeira ordem, portanto seria adquado determinar o coeficiente quadrupolar, conforme foi definido em (3.61):

$$J_2 = \check{a}_{20} = -a_{20} \tag{4.5}$$

O valor numérico para J_2 determina-se a partir de (3.82):

$$J_2 \equiv \frac{1}{2MR^2} \int \rho(\vec{r})\, r^2 (-1 + \cos^2(\theta))\, d^3\vec{r} \tag{4.6}$$

Normalmente utiliza-se valores tabelados para os coeficientes J, uma vez que o cálculo directo exige um modelo fisicamente plausível para o interior da Terra para podemos determinar (4.6).

Se admitirmos que a densidade da Terra é constante, então seria válido afirmar que:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \tag{4.7}$$

E o cálculo do coeficiente angular seria um simples exercício de integração:

$$J_2 = \frac{3}{8\pi R^5} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin(\theta)(-1 + \cos^2(\theta))\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{3}{8\pi R^5} \frac{8\pi R^5}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} \tag{4.8}$$

Porém, o resultado experimental [8] revela que: $J_2 \approx 1{,}083 * 10^{-3}$, porque a Terra não é homogénea (basta recordar a sua diferente composição química e geológica no seu interior).

Consultando [4], podíamos utilizar as equações de equilíbrio hidrostático para modelar uma função para a densidade que justificasse o valor experimental, mas dado que afastaria do tema da dissertação ou elongava excessivamente a discussão, fica registada essa nota.

O potencial Newtoniano segundo a aproximação quadrupolar, valerá segundo (3.80):

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{R}\left[1 - J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2(\theta)\right)\right] \tag{4.9}$$

O momento de inércia do primário [8,11] será dado por:

$$\bar{I} = diag\{I_1, I_1, I\}; I_1 = I - J_2 MR^2 \tag{4.10}$$

Recordando a definição para a precessão geodésica, e aplicando o momento de inércia do sistema, segundo a definição dada por (3.79):

$$\vec{\Omega}_G = \frac{3\,G}{2\,R^3}\left[\left(M - \frac{3}{R^2}\bar{I}\right)\cdot(\vec{r}\times\vec{v}) + \frac{3}{R^2}\left(\bar{I}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})\right)\right] = \frac{3\,G\,M\,v}{2\,R^2}\left(1 - \frac{6\,J_2\,r^2}{R^2}\right) \qquad (4.11)$$

Uma vez que os equipamentos a bordo do Gravity Probe B mediram valores médios no tempo e espaço, calcularemos o valor médio da precessão geodésica [11]:

$$\langle\Omega_G\rangle = \frac{\oint \vec{\Omega}_G\cdot dS}{\oint dS} = \frac{3\,G\,M\,v}{2\,R^2}\left[1 - \frac{9}{8}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (4.12)$$

Aplicando o mesmo procedimento para o valor médio da precessão de Larmor-Thirring (3.78):

$$\langle\Omega_{\mathrm{LT}}\rangle = \frac{G\,I\,\omega}{2\,R^3}\left[1 + \frac{9}{8}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(1 - \frac{88}{147}\frac{M\,r^2}{I}\right)\right] \qquad (4.13)$$

Para concretizar os valores previstos pelo satélite Gravity Probe B, consideraremos que o satélite se localiza a cerca de 650 km de altitude, que a velocidade do satélite está de acordo com a Terceira Lei de Kepler [4],

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R}} \qquad (4.14)$$

E que o momento de inércia é dado por:

$$I = \frac{2}{5}M\,r^2 \qquad (4.15)$$

Segundo a breve análise no capítulo 2, mostrou-se que a aceleração tangencial de um satélite em órbita não é afectada pelo campo gravito-magnético, portanto a sua velocidade orbital medida estará de acordo com (4.14). O momento de inércia (4.15) corresponde a uma esfera perfeita.

Assim, redimensionamos e simplificamos as expressões (4.12) e (4.13) de acordo com as condições que impomos para o satélite Gravity Probe B.

$$\langle\Omega_G\rangle = \frac{3\,G\,M\,v}{2\,c^2\,R^2}\left[1 - \frac{9}{8}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = \frac{3(G\,M)^{3/2}}{2\,c^2\,R^{5/2}}\left[1 - \frac{9}{8}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (4.16)$$

$$\langle\Omega_{\mathrm{LT}}\rangle = \frac{4\pi\,G\,M\,r^2}{5\,c^2\,R^3\,T}\left[1 + \frac{9}{8}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(1 - \frac{88}{147}\frac{5\,M\,r^2}{2\,M\,r^2}\right)\right] = \frac{2\,\pi\,G\,M\,r^2}{5\,c^2\,R^3\,T}\left[1 - \frac{219}{392}J_2\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (4.17)$$

Os resultados numéricos são facilmente calculáveis, e quando aplicamos para o Gravity Probe B, obtemos [8,11]:

$$\langle \Omega_G \rangle = 1{,}0 * 10^{-12}\,\mathrm{Hz} = 6{,}6\,\mathrm{arcs/yr}\,;\langle \Omega_{LT} \rangle = 7{,}5 * 10^{-15}\,\mathrm{Hz} = 49{,}2\,\mathrm{marcs/yr} \qquad (4.18)$$

A inclusão do momento quadrupolar só é importante para satélites com equipamentos extremamente sensíveis (como o Gravity Probe B, que descreveremos posteriormente) e localizados em órbitas extremamente baixas, porque senão esta correcção não terá qualquer sentido prático.

Caso as medições experimentais coincidem com as previsões teóricas, então teremos mais uma prova experimental que valida a Teoria da Relatividade Geral, numa perspectiva que não é trivial.

A Concepção Tecnológica do Gravity Probe B

A verificação experimental da precessão de Lense-Thirring dos satélites LAGEOS confirmou a presença de um campo gravitomagnético gerado pela Terra, o que corroborou a própria Teoria da Relatividade Geral [10].

As primeiras medições experimentais foram obtidas pela análise das órbitas de um determinado conjunto de satélites situados na órbita terrestre, mas todos os dados obtidos tinham um elevado grau de incerteza (na ordem dos 20 a 30% de erro relativo), o que exigiria a médio prazo a realização de uma experiência com um satélite orbital terrestre exclusivamente dedicado para medir os efeitos gravitomagnéticos com maior precisão. O satélite que realizaria estes objectivos foi o Gravity Probe B [11].

O complexo sistema exigiu o fabrico de componentes extremamente precisos, que incluiu a construção da esfera de quartzo mais perfeita que a tecnologia realizou para a sua época, uma vez que a referida esfera com cerca de 10 cm de raio, não devia ter uma variação do seu raio maior que 40 nanometros [11] (O feito tecnológico foi reconhecido pelo Guiness Book of Records).

O satélite foi colocado numa órbita terrestre de baixa altitude (cerca de 642 km de altitude, com baixa excentricidade) e devia medir com uma precisão inferior a 0,1% dois efeitos gravitomagnéticos importantes: o efeito geodésico e o efeito de frame-dragging que correspondem respectivamente à precessão de De Sitter e a precessão de Lense-Thirring.

Estes fenómenos físicos eram calculados medindo a precessão dos eixos de rotação dos quatro giroscópios instalados no Gravity Probe B em relação à Terra [11].

A concepção do Gravity Probe B remonta entre os finais do ano 1959 e o início de 1960, altura em que dois físicos, George Pugh e Leonard Schiff, sugeriram independentemente um do outro, a medição dos efeitos gravitomagnéticos previstos pela Relatividade Geral através de um satélite equipado com giroscópios. O primeiro acto foi apresentado pelo próprio Schiff, que era o chefe do departamento de física da Universidade de Stanford, com a publicação em Março de 1960 na revista "Physical Review Letters" do artigo "Possible New Experimental Test of General Relativity", que expunha a concepção básica da ideia de utilizar giroscópios para testar a Relatividade Geral [11].

Na mesma altura, Schiff comandou um grupo de pesquisa com dois colegas seus: o físico especializado na Física das Baixas Temperaturas, Bill Fairbank e o especialista em giroscópios, Bob Cannon que era igualmente do Departamento de Astronáutica e Aeronáutica. A colaboração entre a faculdade e o departamento aqui referidos foram fulcrais para o sucesso do projecto do Gravity Probe B, também conhecido na literatura científica com GP-B [11].

O projecto ganhou relevância quando em 1962 foi admitido o primeiro membro académico para o grupo de trabalho a tempo inteiro, que era Francis Everitt. A intervenção da NASA (a instituição aeronáutica de excelência nos EUA) no projecto GP-B começou com a entrada, como líder de trabalho, do Dr. Nancy Roman que era o oficial de Ciências Espaciais em 1964. Fairbank e Cannon tornaram-se os principais investigadores do novo grupo de trabalho liderado por Roman.

Posteriormente em 1971, a administração do projecto fora transferida para o Marshall Space Flight Center (MSFC) da NASA em Huntsville, no estado americano do Alabama.

Por fim, no período entre 1977 a 1984 o projecto foi reestruturado como uma missão integrante da NASA, com a colaboração da Lockheed Missiles and Space Company, actualmente Lockheed Martin, e a sub-contratação da faculdade de Stanford que trabalharam na concepção do sistema experimental, mais especificamente do depósito térmico isolado com 650 galões (cerca de 1440 litros) de capacidade e na própria sonda que constituíam o satélite Gravity Probe B [11].

Posteriormente, a Lockheed foi contratada para construir a nave espacial e os respectivos sistemas de controlo para albergar o depósito térmico e a sonda GP-B propriamente dita. Finalmente, a equipa de técnicos e cientistas compôs-se definitivamente, quando em 1981, Francis Everitt tornou-se o investigador principal, cuja posição manteve-se até hoje, e em 1984, o professor Bard Parkinson da faculdade de Stanford, pertencente ao departamento de aeronáutica, juntou-se à missão como gestor de programa e como co-investigador. Juntamente com Parkinson, os professores John Turneaure (Física) e Dan DeBra (Aeronáutica) entraram como co-investigadores.

O próprio William Fairbank definiu a montagem experimental do Gravity Probe B, que consistia numa estrela de referência, num telescópio e num giroscópio constituído por uma esfera em rotação, que segundo o próprio era um sistema bastante simples de compreender e executar [11].

O significado deste eufemismo, como tantos outros aplicados por físicos e matemáticos, releva o bom humor que um cientista tenta exprimir quando uma determinada montagem experimental que se baseia num esquema aparentemente simples, se complica porque a tecnologia necessária para o fazer é extremamente delicada e influencia negativamente na qualidade dos resultados experimentais.

Quando consideramos a presença excepcional da faculdade de Stanford, da Lockheed Martin, com o patrocínio da NASA para desenvolver num espaço de quatro décadas os giroscópios ultraprecisos e a tecnologia de ponta necessária para efectuar um teste da Relatividade Geral, revela a enorme complexidade para efectuar a “simples” experiência que Fairbank concepcionou [11].

Ao ter em conta os requisitos tecnológicos para a missão GP-B torna-se evidente porque somente em 2004 que concretizou a sonda esquematizada em 1960 por Leonard Schiff pode tornar-se realidade. Apesar das enormes dificuldades tecnológicas, a experiência era necessária para criar um novo conjunto de experiências para testar a Teoria da Relatividade Geral [11].

A Missão Efectuada pelo Gravity Probe B

Para os mais de dois mil membros que constituiram a equipa principal do Gravity Probe B, foi um momento de alívio e satisfação quando o foguetão equipado com a GP-B foi lançado com sucesso na base aérea militar de Vandenberg no dia 20 de Abril de 2004, e ao fim de alguns minutos de viagem, a sonda alcançou o espaço para preparar a montagem experimental exigida pela missão.

A missão fora desenhada para durar cerca de dois anos, com um certo número de fases parciais para optimizar o funcionamento do sistema. O plano original previa obter resultados preliminares a partir dos finais de 2007, dos quais deviam corroborar a Teoria da Relatividade Geral [11].

Foi somente em 2011 que os resultados finais foram publicados, e como iremos ver na secção dedicada aos resultados experimentais, e estes corroboram com as previsões derivadas pela Relatividade Geral [12].

Os primeiros quatro meses após o lançamento da sonda e a sua entrada em órbita foram dedicadas para a calibração dos instrumentos, também designado por Initialization and Orbit Checkout (IOC).

No final desta fase, no início de Agosto de 2004, foram inicializados e calibrados os quatro giroscópios necessários para a experiência. O início da colecta de dados começou no dia 28 de

Agosto de 2004, após as operações de calibração. Todo o processo útil de análise e colecta de dados demorou cerca de 50 semanas, até ao dia 15 de Agosto de 2005, donde cerca de um terabyte de dados foram enviados da sonda orbital até à faculdade de Stanford, mais propriamente ao GP-B Misson Operation Center (MOC) [11].

Por fim, seguiu-se uma fase de seis semanas onde se efectuaram testes de calibração dos giroscópios, telescópios e a unidade SQUID até terminar por exaustão o hélio líquido contido no depósito térmico, que ocorreu no final de Setembro de 2005.

Finalizada a missão orbital, restava a análise detalhada dos dados científicos obtidos no decurso da missão, e isto exigiria aproximadamente dois anos de estudos acompanhados por equipas de revisão de pares e por especialistas na matéria. A publicação final estava planeada para os finais de 2007, mas ainda levaria mais quatro anos de relatórios parciais até publicar o artigo definitivo [12].

A enorme expectativa criada pela experiência do qual poderia corroborar a própria Teoria da Relatividade Geral, concretizou-se somente em 2011, mas a sua enorme importância do Gravity Probe B destaca-se por ter sido um teste sem precedentes para a teoria fundamental da gravitação, publicada por Einstein [12].

Concepção Experimental do Gravity Probe B

O comentário irónico do próprio líder do projecto GP-B, William Fairbank, não era ingénuo porque os elementos básicos que constituíam a sonda não constituem um grande problema demasiado complexo para ser compreendido. O principal obstáculo para a concretização deste projecto fora puramente tecnológica, e mesmo actualmente tratou-se de um grande feito de tecnologia contemporâneo [11].

A concepção básica do sistema experimental era constituído pelo satélite GP-B situado numa órbita polar localizada a 642 km de altitude com excentricidade muito pequena. Como o satélite localizava-se numa órbita polar, esta podia transportar-se paralelamente ao eixo de rotação da Terra, e consequentemente do campo gravitomagnético da Terra. A órbita do satélite seria afectada pelo fenómeno de precessão de Lense-Thirring, cuja precessão seria determinada pelos giroscópios montado no satélite. Para garantir uma melhor redundância e fiabilidade experimental, foram incluídos quatro giroscópios no conjunto. No início da experiência, foram alinhados o eixo de rotação dos giroscópios (conceptualmente bastava um giroscópio para a experiência funcionar, mas devido à redundância do processo experimental, a inclusão de quatro giroscópios é perfeitamente justificada) e o telescópio em relação a um ponto de referência fixo, que era uma estrela distante cuja paralaxe fosse praticamente desprezável [11].

Assim justificamos os três elementos do GP-B: uma estrela de referencia (IM Pegasi / HM 8703); um telescópio para calibrar o sistema em relação a essa estrela e um giroscópio com um determinado eixo de rotação que também é calibrado em relação à mesma estrela.

Durante cerca de um ano em que decorreu a colecta de dados, o telescópio manteve-se alinhado com a estrela fixa, que actuou como um referencial de inércia, criando um ambiente controlado que permite medir a pequeníssima precessão dos alinhamentos dos eixos de rotação dos giroscópios ao longo do plano de órbita que era paralelo ao eixo de rotação da Terra (precessão geodésica) e também ortogonalmente no plano gerado pela rotação da Terra (precessão de frame-dragging).

O conjunto destes fenómenos constituem a precessão de Lense-Thirring, em honra dos físicos Josef Lense e Hans Thirring que previram pela primeira vez este fenómeno que a Teoria da Relatividade Geral incluiria na sua teoria de campo gravítico [11].

Aplicando a teoria ao GP-B, verifica-se que a precessão geodésica do eixo de rotação dos giroscópios é cerca de 6,6 segundos de arco por ano, mas é um valor relativamente grande comparado com a precessão de frame-dragging que é um ângulo minúsculo de 0,041 segundos de arco por ano [11].

Segundo a lista de objectivos do plano inicial para a montagem experimental do GP-B, pretendia-se que a precisão relativa na medição da precessão geodésica fosse na ordem dos 0,01%, o que ultrapassaria em alguns graus de grandeza (basta comparar com os 30% de erro gerados pelas análises das órbitas dos satélites LAGEOS) medidos por outras experiências com satélites em órbita na Terra, o que se revelaria excessivamente ambicioso. A precessão de frame-dragging não teria uma precisão maior que 1%, o que podia prejudicar a medição de um valor extremamente delicado [11,12].

As Tecnologias Desenvolvidas para a Missão do Gravity Probe B

Para que a missão realizada pelo Gravity Probe B fosse um sucesso, seria necessário desenvolver tecnologias de ponta para a construção de determinados componentes críticos, que sem eles não seria possível determinar os efeitos gravitomagnéticos previstos pela Teoria da Relatividade Geral de Einstein [11].

Os componentes mais delicados de fabricar (e que foi referido no início da descrição sobre o Gravity Probe B) foram as esferas de quartzo que constituíam os giroscópios, que deviam ser 50 milhões de vezes mais precisos que os giroscópios comerciais que são utilizados em sistemas de navegação de boa qualidade. O requisito de esfericidade necessário para a execução da experiência conforme concebida na década de 1960 era impraticável para a tecnologia da época, porque a variação do raio da esfera não devia ser superior a 40 nanómetros para uma esfera com cerca de 10 cm de raio [11].

O desenvolvimento da tecnologia para o fabrico das esferas levou aproximadamente 10 anos, que incluiu a concepção dos métodos de fabrico. O esforço tecnológico para o fabrico das esferas foi reconhecido pelo Guiness Database of Records como os objectos mais redondos fabricados pelo Homem. Todas as esferas de quartzo estavam inseridas em rotores ligados ao conjunto dos magnetometros supercondutores (SQUID) que eram responsáveis pela medições experimentais.

O uso de um SQUID era necessário porque os materiais supercondutores podem deflectir os campos magnéticos externos, o que permite utilizar o momento magnético gerado por uma esfera supercondutora em rotação que coincide com o respectivo eixo de rotação da esfera. Esta necessidade prendia-se com a impossibilidade prática de determinar o eixo de rotação de uma esfera sem existir uma marcação física que indicasse o eixo de rotação do giroscópio.

Salienta-se que cada um dos quatro giroscópios estava acoplado com o respectivo SQUID [11].

Outro componente essencial para a missão foi a concepção de um telescópio para calibrar todo o equipamento em relação a um referencial de inércia, que era uma estrela distante.

Conceptualmente, o telescópio era extremamente simples, porque ele calibrava automaticamente os sistemas científicos ao comparar os brilhos obtidos pela divisão do feixe de luz proveniente da estrela distante em dois eixos perpendiculares entre si [11].

Todos os componentes referidos acima estavam arrefecidos por uma garrafa térmica com 650 galões (cerca de 1440 litros) de capacidade e 2,7 m de comprimento, que foram preenchidos com hélio líquido no estado de superfluídez a 1,8 K. Este conjunto, juntamente com a sonda em forma de charuto, constituía o Science Instrument Assembly (SIA). O SIA era o conjunto de todos os instrumentos científicos que seriam utilizados na missão do GP-B. O hélio que era lentamente libertado pela garrafa térmica era aproveitado para alimentar o micropropulsor (a sonda tinha 16) que servia para efectuar as devidas correcções da órbita do satélite de modo a manter alinhado com a estrela de referência [11].

O satélite albergava todo o equipamento científico (SIA), os propulsores, a crio-bomba e ainda a unidade de alimentação eléctrica por energia solar, as comunicações, o computador de bordo e navegação operacional que era necessário para a manter plenamente funcional durante toda a missão [11].

Toda a tecnologia desenvolvida para esta missão será a médio prazo utilizada para aplicações mais correntes, começando pelas missões espaciais e as utilizações comerciais, da mesma maneira que o esforço tecnológico desenvolvido durante a corrida espacial dada entre a União Soviética e os EUA durante as décadas de 1950 a 1960 são agora utilizados no nosso quotidiano actual [11].

Resultados Experimentais Publicados

Em 2011 foi publicado o artigo [12] que resumia o procedimento experimental do Gravity Probe B e publicava a análise estatística que levaria ao cálculo dos valores experimentais da precessão de De Sitter e Lense-Thirring. Numa primeira análise, a Teoria da Relatividade Geral acertou ao prever correctamente os resultados medidos pelo Gravity Probe B.

Detalhando um pouco os resultados, evidenciou-se que a redundância dos quatro giroscópios foram fulcrais para a fiabilidade de toda a experiência, pois ambos mostravam barras de erros dispersas em torno do valor previsto pela RG, causando um erro de medição que rondava os 20% para o efeito de frame-dragging, e ainda de 1% para o efeito geodésico, do qual ainda é difícil de minimizar o erro de precisão.

Se os resultados baseassem em apenas um dos quatro giroscópios, o valor experimental desviava-se do valor previsto pela Relatividade Geral.

Uma das experiências colaterais efectuadas pelo GP-B ocorreu na altura em que a distância angular na esfera celeste entre o Sol e a estrela IM Pegasi fosse mínima, com o objectivo de medir o ângulo de deflexão da luz da estrela pelo Sol e comparar com a previsão da RG. O valor medido foi de 21±7 miliarcos de segundo, o que situa-se dentro da previsão da Relatividade Geral: 21,7 miliarcos de segundo. Este resultado serviu para comprovar a calibração e funcionamento dos instrumentos.

Relativamente aos resultados medidos pelas precessões, os valores e barras de erros publicados eram [12]:

$$\langle \Omega_G \rangle_{exp} = 6601{,}8 \pm 18{,}3 \text{ marcs/yr} ; \langle \Omega_{LT} \rangle_{exp} = 37{,}2 \pm 7{,}2 \text{ marcs/yr} \qquad (4.19)$$

Os valores teóricos respectivos que foram publicados eram:

$$\langle \Omega_G \rangle_{teo} = 6606{,}1 \text{ marcs/yr} ; \langle \Omega_{LT} \rangle_{teo} = 39{,}2 \text{ marcs/yr} \qquad (4.20)$$

O que corrobora o modelo da Relatividade Geral, pois os valores previstos encontram-se dentro dos limites experimentais, embora se observa que o erro experimental da precessão geodésica ronda os 0,28%, mas a precessão de Lense-Thirring foi determinado com um erro relativo de 19% [12].

A aparente contradição entre (4.20) e (4.18) deve-se à introdução dos efeitos de precessão provocados pelo campo gravitacional do Sol sobre a Terra, do qual não podia ser completamente eliminada do sistema. Isto sem considerar ainda a introdução de factores de correcção que entretanto a equipa do Gravity Probe B ajustou. Doutra forma, o valor médio para a precessão de Lense-Thirring seria de 49,2 miliarcos de segundo por ano, de acordo com (4.18).

5. O campo gravito-electromagnético como modelo de fronteira da quantificação da gravidade

Este capítulo final não pretende ser uma discussão sobre a quantificação da gravidade, pois seria um grande erro pensar que o modelo GEM fosse quantificável como se derivou a Electrodinâmica Quântica, e concluir a partir daí que temos um modelo de Gravidade Quântica apto para determinados regimes. (Existem modelos efectivos que quantificaram a gravidade no limite de baixas energias, mas o resultado obtido nunca podia ser imitado como no QED, pois como J. Donoghue demonstrou, a gravidade tende a comportar-se mais como a QCD, mesmo que tentemos usar a métrica GEM como caso particular [13].)

É por isso que vamos ter cuidado neste aspecto, e limitaremos a caso particular do qual existe uma aplicação fisicamente coerente do qual podemos aplicar o GEM numa tentativa de quantificação: o papel semi-clássico do spin aplicado numa experiência do género de Stern-Gerlach. Surpreendentemente é um fenómeno físico relativamente simples de explicar e calcular, mas fora deste caso particular, qualquer tentativa posterior para montar uma teoria quântica aproximada da gravidade não terá qualquer validade, pois entramos noutro domínio totalmente diferente da Física.

O acoplamento spin-órbita do campo gravito-magnético de uma partícula

Uma das pistas de investigação do próprio Mashhoon [1] sobre o seu modelo gravito-magnético não restringia apenas nos fenómenos astrofísicos, mas também estava esperançado que a sua teoria desse algumas luzes sobre o comportamento da gravidade à escala da Física de Partículas, mais propriamente no problema do spin dos fermiões. Seguindo uma linha de analogia com a electrodinâmica clássica que por si só descrevia o fenómeno de Stern-Gerlach aplicando uma quantificação do momento angular usando a quantificação de Bohr, Mashhoon perguntava se não era legítimo aplicar a mesma linha de raciocínio a partículas neutras com spin, mas trocando o campo magnético uniforme de fundo, com o campo gravito-magnético da Terra [1].

Se utilizarmos os artigos de J. Donoghue [13] sobre a quantificação da gravidade no regime de baixas energias, mas utilizando o modelo efectivo de quantificação, o problema é extremamente complicado mesmo para um potencial de fundo Newtoniano, quanto mais um gravito-magnético.

(Mas justifica o termo de acoplamento entre o campo gravito-magnético, acrescentando termos de auto-acoplamento entre gravitões, e o spin das partículas. Uma análise aprofundada deste tema, ou algum caso particular do mesmo ultrapassa o tema da dissertação.)

Na realidade existe alguma legitimidade que suporte Mashhoon na pesquisa sobre o eventual acoplamento gravito-magnético sem utilizarmos a fundo a teoria quântica, porque numa extensão plausível da Teoria da Relatividade Geral podemos considerar que a métrica local possuí torção intrínseca, o que quebra a simetria de boa parte dos tensores presentes na RG [3], e justifica de forma plausível o papel do spin na interacção gravitacional [1].

Este modelo de Relatividade Geral com torção designa-se por modelo de Einstein-Cartan, do qual iremos dar uma brevíssima introdução para derivar o essencial para explicar a conjectura de Mashhoon.

O modelo de Einstein-Cartan prevê que o tensor energia-momento deixa de ser simétrico e podemos definir um tensor de torção ou de spin (não confundir com o spin na Mecânica Quântica), que resulta da comutação entre os elementos do tensor-energia momento [14]:

$$T_{\mu\nu}-T_{\nu\mu}=\partial_{\sigma}\overline{S^{\sigma}_{\mu\nu}}=S_{\mu\nu} \qquad (5.1)$$

Observa-se que de acordo com [14], podemos derivar vectores de spin a partir do transporte paralelo entre o tetra-vector velocidade e o tensor de spin (5.1), derivando a identidade:

$$S_{\mu}=\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}u^{\nu}S^{\rho\sigma} \qquad (5.2)$$

Quando substituímos (5.2) em cálculos que envolvem leis do movimento ao longo de geodésicas em métricas com torsão intrínseca, as equações geodésicas podem ser interpretadas como as forças de Mathisson-Papapetrou.

Para simplificar este problema complicado, e respeitar as aproximações que derivaram o modelo GEM, vamos considerar apenas o limite não-relativista estático, o que implica que o tetra-vector velocidade será, $u^{\nu}=(1,0,0,0)$, o que simplifica (5.2) relativamente ao vector de spin:

$$S^{\mu\nu}=-2\varepsilon^{\mu\nu\rho}S_{\rho} \qquad (5.3)$$

As equações dinâmicas de Mathisson-Papapetrou no limite não-relativista são de acordo com [14]:

$$F_{\alpha}=\frac{c}{2}R_{\alpha\mu\beta\nu}u^{\beta}S^{\mu\nu} \qquad (5.4)$$

No limite não-relativista podemos combinar (5.4) em (5.3) e considerar a métrica do modelo GEM que derivamos no capítulo 1. Desta forma, conseguimos interpretar a força de Mathisson-Papapetrou como uma força semi-clássica dependente do spin.

$$F_\alpha = -c R_{\alpha\mu 0\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho} S_\rho \tag{5.5}$$

Desenvolvendo o tensor de Riemann covariante para as componentes temporal e espacial da força (5.5), usando (1.14) e os potenciais (1.92) e (1.96):

$$R_{0\mu 0\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \partial_\mu h_{0\nu} - \partial_0 \partial_0 h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{00} + \partial_\nu \partial_0 h_{0\mu}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\partial_0 \partial_\mu h_{0\nu} + \partial_0 \partial_\nu h_{0\mu}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.6}$$

$$R_{i\mu 0\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 \partial_\mu h_{i\nu} - \partial_0 \partial_i h_{\nu\mu} - \partial_\nu \partial_\mu h_{i0} + \partial_\nu \partial_i h_{0\mu}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\mu h_{i0} - \partial_\nu \partial_i h_{0\mu}\right) = \frac{2\partial_\nu B_i}{c^2} \tag{5.7}$$

A componente temporal calculada em (5.6) resulta da aplicação da Gauge de Lorentz (1.58), mas como estamos no limite estático dos potenciais gravito-electromagnéticos, qualquer derivada em ordem ao tempo vale zero. Portanto, a componente temporal de (5.5) anula-se.

E em virtude de (5.7) combinado com (2.6) determinamos uma força de Stern-Gerlach contendo a precessão angular de Lense-Thirring:

$$F_i = -2\partial_\nu B_i S^\nu / c = -\nabla(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{S})_i \rightarrow \vec{F} = -\nabla(\vec{\Omega}\cdot\vec{S}) \tag{5.8}$$

Isso significa que o caso mais simples possível para descrever o movimento de uma partícula em queda livre em direcção a um primário, quando estamos perto da sua superfície, vamos ter que incluir a força derivada em (5.8):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} - \nabla(\vec{\Omega}\cdot\vec{S}) \tag{5.9}$$

Este resultado curioso apresentado no próprio artigo [1] levou o próprio Mashhoon a sugerir que estamos perante a uma potencial violação do Princípio de Equivalência, pois não é possível cortar as massas ou a aceleração Newtoniana sem igualar o termo de Stern-Gerlach a zero.

Numa interpretação mais cuidadosa, (5.8) seria considerado um efeito de acoplamento de spin-órbita que afecta a medição da massa inercial de um conjunto de partículas, mas não deixa de ter importância a possibilidade da sua medição.

Se considerarmos que (5.9) representa uma partícula elementar com spin em queda livre na superfície da Terra, então podemos quantificar o momento angular de spin, e determinar explicitamente as correcções que o novo termo derivado do efeito de Stern-Gerlach em (5.9) induz.

Em Mecânica Quântica [5], o vector do spin é simplesmente o operador do momento angular da partícula, do qual vamos definir:

$$\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \qquad (5.10)$$

Para fermiões de spin-1/2 o módulo do vector do spin é dado por, $S=\hbar/2$, e na superfície do primário (lembramos que o campo gravito-magnético decresce com a quarta potência da distância) a frequência de precessão de acordo com (2.15) valerá:

$$\Omega=\frac{2GLr}{c^2R^4}=\frac{8\pi GM}{5c^2RT} \qquad (5.11)$$

Substituindo (5.10) e (5.11) na equação (5.9) tendo em conta a derivada em ordem a "R" que deve ser efectuada em primeiro lugar, obtemos a sua forma explícita do qual depende da orientação do spin da partícula elementar de teste:

$$\vec{F}=m\vec{a}=-m\nabla\phi+\nabla(\vec{\Omega}\cdot\vec{S})\Leftrightarrow a=\frac{GM}{R^2}\pm\frac{32\pi GM\hbar}{5c^2mR^2T} \qquad (5.12)$$

Mas de acordo com [3], o Princípio de Equivalência numa queda livre implica que a aceleração será puramente Newtoniana:

$$a=g=\frac{GM}{R^2} \qquad (5.13)$$

Ora como o lado direito de (5.12) não pode ser zero (salvo T=∞), vamos ter que destingir as massas inercial e gravítica, do qual resultará a seguinte igualdade:

$$m_i=m_g\pm\frac{32\pi\hbar}{5c^2T}\Leftrightarrow|m_i-m_g|=\frac{32\pi\hbar}{5c^2T} \qquad (5.14)$$

De acordo com (5.14), observa-se que a diferença entre as massas inercial e gravítica depende da intensidade do campo gravito-magnético, mas o principal motivo da sua existência é a presença da constante de Planck, do qual é uma peça fundamental da Mecânica Quântica.

No limite clássico ($\hbar\rightarrow0$) o lado direito de (5.14) tende para zero e recupera-se a igualdade das massas, característica do Princípio da Equivalência.

O Efeito de Stern-Gerlach Gravito-magnético

Mashhoon interpretou (5.14) como um efeito gravitacional quântico, a aparente violação do Princípio de Equivalência do qual foi derivado semi-classicamente a partir da força de Mathisson-Papapetrou de uma partícula livre sujeito a um campo gravítico fraco [1].

Mais especificamente, considerou que a queda livre não era universal, pois dependia do spin.

Assim a igualdade das massas, que é um corolário do Princípio da Equivalência, seria violado por um factor definido pela identidade:

$$m_i = m_g(1 \pm \chi) \qquad (5.15)$$

Do qual o factor contido em (5.15) não é mais que o seguinte rácio obtido em (5.14):

$$\chi = \frac{\varepsilon}{m} \approx \frac{32\pi\hbar}{5c^2 Tm} \qquad (5.16)$$

Uma vez que $\varepsilon \ll m_i, m_g \approx m$, podemos aplicar a massa tabelada da partícula em (5.16) e determinar os factores (5.15). Além disso, (5.16) implica que $\chi \ll m$, do qual é uma condição fundamental para que esta aproximação seja consistente.

Embora seja claramente um efeito quântico relativamente simples de derivar, o fenómeno em causa trata-se de um acoplamento spin-órbita entre o campo gravito-magnético e o spin da partícula, que é considerada como uma força de troca [13] e não como um efeito gravítico quântico, embora seja indirectamente interpretado como tal.

Qualquer experiência futura que tente medir o fenómeno, observaria que a medição das massas inerciais das partículas formava um dubleto de estados próprios provocados pela interacção do spin da partícula com o campo gravito-magnético da Terra como fundo, da mesma forma que uma partícula forma um dubleto de spin quando atravessa um campo magnético (experiência de Stern-Gerlach [1]).

É elementar justificar o motivo de ser muito difícil medir a diferença em (5.14), pois não basta a enorme dificuldade em medir a interacção gravitacional entre partículas, como o valor numérico da mesma é extremamente pequeno:

$$\varepsilon = \frac{32\pi\hbar}{5c^2 T}; T_{Earth} = 86400\, s \Rightarrow \varepsilon_{Earth} \approx 1.53 * 10^{-19}\, eV \qquad (5.17)$$

Se considerarmos a massa de um electrão, podemos determinar quantidades adimensionais teoricamente mensuráveis numa experiência hipotética com elevadíssima precisão:

$$\varepsilon_{Earth} \approx 1{,}53 * 10^{-19}\, eV; m_e = 5{,}11 * 10^{5}\, eV; \frac{\varepsilon_{Earth}}{m_e} = 2{,}99 * 10^{-25} \qquad (5.18)$$

O que se trata novamente de uma quantidade extremamente pequena, e representa o nível extremo de precisão requerido para detectar estes pequeníssimo efeito quântico de troca do qual participa a gravidade nesse processo.

Segundo o artigo de Mashhoon [1] que esboça uma possível experiência para medir a diferença de massas, construindo para o efeito um espectrometro de neutrões (para reduzir a presença de fontes do campo electromagnético) aliado a novas tecnologias de vácuo. Idealmente, a melhor partícula seriam os neutrinos, do qual não interagem com o campo electromagnético, mas a sua reduzida secção eficaz tornava a experiência muito mais complexa e dificultava a obtenção de dados.

Os neutrões teriam um coeficiente de violação mais pequeno que os electrões, e com as energias extremamente baixas envolvidas na medição, era possível minimizar os efeitos radiactivos das cargas eléctricas dos quarks contidos nos neutrões.

Independentemente do equipamento experimental do qual eventualmente será utilizado, este teria que medir desvios das massas na ordem da 31ª ordem de grandeza.

$$\varepsilon_{Earth} \approx 1{,}53 * 10^{-19}\, eV; m_e = 9{,}46 * 10^{11}\, eV; \frac{\varepsilon_{Earth}}{m_e} = 1{,}62 * 10^{-31} \qquad (5.19)$$

Apesar da simplicidade deste modelo teórico prever um efeito indirecto da Mecânica Quântica com o campo gravítico, qualquer futura experiência que comprove a conjectura de Mashhoon muito provavelmente utilizará um modelo efectivo de Gravidade Quântica como o publicado por Donoghue [13] , do qual não iremos entrar em detalhes.

Independentemente do desenvolvimento teórico que permita uma futura medição da desigualdade das massas inercial e gravitacional seria considerado uma grande descoberta, porque seria um caso de fronteira donde a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral se cruzam, mesmo que seja um fenómeno de baixas energias [1].

Conclusão

O estudo introdutório ao modelo gravitoelectromagnético permitiu-nos explorar novos fenómenos gravitacionais que não eram previstos pela teoria Newtoniana da gravitação.

Salientamos que o modelo gravitoelectromagnético não é mais que a primeira ordem de expansão da métrica segundo a Teoria da Relatividade Geral.

Baseando na linearização da Teoria da Relatividade Geral, e considerando os termos mais relevantes do potencial gravitacional Einsteiniano, conseguimos provar que é possível determinar a presença de um campo gravitomagnético para além do campo Newtoniano, e que a partir destes dois campos podemos derivar um conjunto de equações de campo similares às Equações de Maxwell da teoria electromagnética clássica.

Este modelo matemático permite explorar a análise de fenómenos gravíticos gerados por corpos celestes cujo campo gravítico não é adequadamente descrito pela Lei Universal da Gravitação de Newton (o campo escalar Newtoniano), porque de acordo com a Teoria da Relatividade Geral, a presença de corpos com rotação intrínseca (momento angular) gerarão efeitos gravíticos que não são compatíveis com a teoria Newtoniana da gravitação. Utilizando o modelo gravitoelectromagnético podemos explicar os efeitos gravíticos pós-Newtonianos e verificar que os corpos celestes em rotação vão gerar um campo gravitomagnético com propriedades similares aos verdadeiros campos magnéticos.

O modelo que apresentamos é razoavelmente adequado para a esmagadora maioria dos fenómenos astronómicos que envolvam a necessidade de introduzir um campo gravito-magnético compatível com a linearização da Teoria da Relatividade Geral. Assim, aplicar o modelo derivado nesta dissertação em sistemas gravitacionais extremos como buracos negros não fará qualquer sentido, devido à enorme intensidade da força gravítica e da não-linearidade do campo gravítico Einsteiniano, que desviará dos resultados previstos pelo modelo gravito-electromagnético.

Os principais fenómenos gravitacionais gerados pelos campos gravitomagnéticos são a precessão de Lense-Thirring (frame-dragging) e a precessão de De Sitter (geodésica) , que beneficia do formalismo gravito-electromagnético nas suas aplicações teóricas.

Uma vez que a intensidade do campo gravito-magnético da Terra são várias ordens de grandeza menores que a intensidade do campo Newtoniano, levou muito tempo até que as primeiras evidências experimentais da existência de um campo gravitomagnético surgisse com a análise das órbitas dos satélites que precessavam sem que a teoria Newtoniana conseguisse explicar, mas que fora rapidamente analisada segundo a teoria Einsteiniana. As análises teóricas das órbitas dos satélites terrestres permitiram concluir que a precessão de Lense-Thirring de natureza gravitomagnética era a responsável por este fenómeno astronómico. Na realidade, a presença de fenómenos gravitacionais pós-Newtonianos não-triviais nas aplicações correntes foi um triunfo da Teoria da Relatividade Geral e a descoberta experimental do campo gravitomagnético poderia gerar um novo conjuntos de testes experimentais para testar a própria Relatividade Geral.

Para estudar com maior rigor o campo gravitomagnético da Terra, uma equipa liderada pela Universidade de Stanford e executada pela NASA habilitou o lançamento e o método experimental da sonda Gravity Probe B para confrontar os resultados experimentais com os teóricos previstos pela Relatividade Geral. Os resultados provisórios publicados em 2009 e os resultados finais em 2011 mostram aparentemente que estão de acordo com a teoria.

O mesmo campo gravitomagnético pode ter efeitos no mundo quântico das partículas, uma vez que existe um analogia suportada pelo modelo de Einstein-Cartan que suporta um efeito de Stern-Gerlach para o campo gravito-magnético da Terra com as partículas elementares.

Este fenómeno quântico similar à força de troca sugere que o Princípio de Equivalência no mundo quântico contenha uma correcção pode ser alvo de verificação experimental futura, do qual actualmente seria um desafio tecnológico para construir um dispositivo experimental que detecte energias extremamente baixas.

Independentemente dos desenvolvimentos futuros, o gravito-electromagnetismo serviu de suporte para um dos testes mais ambiciosos da Relatividade Geral, a qual foi brilhantemente corroborado pelo Gravity Probe B.

Bibliografia

[1] Bahram Mashhoon : arXiv:gr-qc/0011014v1, 3/11/2000, “Gravitoelectromagnetism”.

[2] Oliver Heaviside, "A gravitational and electromagnetic analogy", The Electrician 31,81-82 (1893)

[3] Sean M.Carroll, “Lecture Notes on General Relativity”.

[4] Nuno Sá, “Astronomia Geral”, Escolar Editora.

[5] John David Jackson, “Classical Electrodynamics”, 1962, John Wiley & Sons, Inc.

[6] Ignazio Ciufolini, John Archibald Wheeler, “Gravitation and Inertia: Tests of Einstein Geometrodynamics”, 1995, Princeton University Press.

[7] R.J. Adler, A.S. Silbergleit, “General Treatment of Geodetic and Lense-Thirring effects on an orbiting gyroscope”, 2003.

[8] Ignazio Ciufolini, David Lucchesi, Francesco Vespe, Federico Chieppa : arXiv:gr-qc/9704065v1, 23/4/1997, “Detection of Lense-Thirring Effect Due to Earth's Spin”.

[9] Bahram Mashhoon, Frank Gronwald, Herbert I. M. Lichtenegger : arXiv:gr-qc/9912027v1, 8/12/1999, “Gravitoelectromagnetism and Clock Effect”.

[10] Lorenzo Iorio et al, “On the possibility of measuring the Lense-Thirring Effect with a LAGEOS - LAGEOS II - OPTIS Mission”, Institute of Physics Publishing, Classic and Quantum Gravity #21, 2139-2151 (2004)

[11] Stanford University, Lockhead Martin, NASA: “Gravity Probe B in a nutshell”, http://www.nasa.gov/pdf/168809main_gpb_nutshell-0506.pdf; “The Gravity Probe B Experiment” , http://einstein.stanford.edu/

[12] C. W. F. Everitt, D. B. DeBra et al, arXiv:gr-qc/1105.3456v1, 17/5/2011, “Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity”.

[13] John. F. Donoghue, arXiv:gr-qc/9512024v1, 11/12/1995, “Introduction to the Effective Field Theory Description of Gravity”.

[14] Roman Playtsko et al, arXiv:gr-qc/1110.1967v1, 10/10/2011, “Mathisson-Papapetrou-Dixon equations in the Schwarzschild and Kerr backgrounds”.

Anexos

Neste anexo foram relegadas algumas das demonstrações cuja desenvolvimento quebrava a continuidade do texto principal, e servem apenas de referência quando são indicados no texto.

Solução geral das Equações de Einstein Linearizadas

Pretende-se resolver a equação diferencial (na realidade um conjunto de 16 equações diferenciais independentes entre si) que descreve a linearização da Teoria da Relatividade Geral:

$$\Box \overline{h_{\mu\nu}} = \frac{-16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Utilizando o livro de Sean Carrol [3], podemos resolver o problema aplicando uma função de Green:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(x^\sigma) = \frac{-16\pi G}{c^2} \int T_{\mu\nu}(y^\sigma) G(x^\sigma - y^\sigma) d^4 y \tag{2}$$

A função de Green harmónica obedece à seguinte condição:

$$\Box G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma) \tag{3}$$

Logo, a equação integral dada em (2) é uma representação da seguinte equação funcional:

$$\Box \overline{h_{\mu\nu}} = \frac{-16\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \Leftrightarrow \overline{h_{\mu\nu}}(x^\sigma) = \frac{-16\pi G}{c^2} \int G(x^\sigma - y^\sigma) T_{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y \tag{4}$$

Como estamos longe das fontes, admitimos que a fracção $\frac{1}{x^\sigma - y^\sigma} \sim \frac{1}{R}$ é aproximada pelo escalar R, que não é mais que a distância da fonte ao observador.

Considerando Jackson [5] a respeito do seu livro sobre electrodinâmica clássica, podemos calcular o seguinte integral, que será dividido em dois ramos da função:

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d^3 y \Rightarrow \int \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(R \cdot \frac{1}{R}\right) d^3 y = \int \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (1)}{\partial R^2} d^3 y = \int 0\, d^3 y = 0\,; R \neq 0 \tag{5}$$

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) d^3 y \Rightarrow \int \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R}\right) dV = \oint \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R}\right) dS = \oint \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R}\right) R^2\, dS = -\oint \frac{R^2}{R^2} dS \tag{6}$$

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dV = -\oint dS = -4\pi \tag{7}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi \delta(R) \tag{8}$$

De acordo com (8), a função de Green para a equação de Einstein torna-se na seguinte forma:

$$G(x^{\sigma}-y^{\sigma})=\frac{-\delta(x^{\sigma}-y^{\sigma})}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{9}$$

E o potencial terá como solução fundamental:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(x^{\sigma})=\frac{4G}{c^2}\int\frac{\delta(x^{\sigma}-y^{\sigma})\,T_{\mu\nu}(y^{\sigma})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^4y=\frac{4G}{c^2}\int\frac{\delta(|\vec{x}-\vec{y}|/c-(x^0-y^0))\,T_{\mu\nu}(y^{\sigma})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^4y \tag{10}$$

A integração no tempo é trivial devido à seguinte propriedade do funcional de Dirac:

$$\int\delta(y-y_0)f(y)\,dy=f(y_0) \tag{11}$$

O que resultará na solução retardada dos potenciais de Einstein para a Relatividade Geral linearizada:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{c^2}\int\frac{T_{\mu\nu}(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}d^3y \tag{12}$$

Para sistemas físicos cujos observadores estão longe das fontes, o integral simplifica-se:

$$\overline{h_{\mu\nu}}(t,\vec{x})=\frac{4G}{Rc^2}\int T_{\mu\nu}(t-R/c,\vec{y})\,d^3y \tag{13}$$

Equação geodésica Newtoniana

A equação geodésica é uma equação diferencial que representa uma parametrização ao longo de uma variedade que minimiza o comprimento da ligação entre dois pontos.

A equação formal para a equação geodésica [3] é:

$$\frac{d^2x^{\rho}}{d\tau^2}+\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}=0 \tag{14}$$

Se admitirmos que um sistema físico é devidamente descrito por um potencial Newtoniano, então a única conexão métrica relevante para o sistema será:

$$\Gamma^{\mu}_{00}=\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\underbrace{\partial_0 g_{\lambda 0}}_{=0}+\underbrace{\partial_0 g_{0\lambda}}_{=0}-\partial_{\lambda}g_{00}\right)\Leftrightarrow\Gamma^{\mu}_{00}=\frac{-1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00}=\frac{-1}{2}\partial^{\mu}h_{00} \tag{15}$$

Sabendo que o campo newtoniano é estático, verifica-se que:

$$\partial_0 h_{00}=\frac{1}{c}\frac{\partial h_{00}}{\partial t}=0\Leftrightarrow h_{00}=const. \tag{16}$$

Considerando (16) e (15) em (14), a equação geodésica Newtoniana valerá:

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{00} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 = 0 \qquad (17)$$

A equação (17) representa a geodésica newtoniana, que é equivalente à Lei de Newton.

Verifica-se que para a coordenada temporal, o tempo próprio e ordinário são da mesma ordem de grandeza:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} c = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial t}{\partial \tau} = const. \qquad (18)$$

Para as coordenadas espaciais, podemos utilizar (18) para mudar a variável de parametrização da geodésica para o tempo ordinário:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 c^2 - \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \frac{c^2}{c^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = 0 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \partial_i h_{00} \qquad (20)$$

A equação (20) é equivalente à lei de Newton para a aceleração gravitacional: $\vec{a} = -\nabla \phi$, resultando a seguinte identificação do potencial newtoniano com um elemento da métrica:

$$h_{00} = \frac{-2\phi}{c^2} = \frac{2GM}{Rc^2} \qquad (21)$$

Identidade de Bianchi para o tensor de campo gravitoelectromagnético

Pretende-se mostrar que a identidade de Bianchi introduzida na Geometria Diferencial [3]:

$$[\nabla_\sigma, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]] + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\sigma]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\sigma, \nabla_\mu]] = 0 \qquad (22)$$

Que pode ser simplificada de modo a gerar uma lei de conservação do tensor de campo gravitoelectromagnético que pretende-se determinar.

A equação (22), segundo [3], é equivalente a seguinte identidade:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0 \qquad (23)$$

O tensor de Riemann covariante segundo (1.14) pode ser aproximado de acordo com o modelo gravitoelectromagnético:

$$R_{0\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \partial_\sigma h_{0\nu} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{0\mu} \right) \qquad (24)$$

Aplicando o potencial gravitoelectromagnético em função da métrica local:

$$h_{0\mu}=\frac{2A_{\mu}}{c^{2}} \tag{25}$$

Resulta:

$$R_{0\sigma\mu\nu}c^{2}=\partial_{\sigma}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right) \tag{26}$$

As derivadas covariantes de (22) podem ser substituídas por derivadas parciais, devido à pequena variação da métrica em relação à métrica de Minkowski, o que permite-nos escrever a forma explícita da identidade de Bianchi para um potencial gravitoelectromagnético:

$$\partial_{\sigma}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)+\partial_{\mu}\left(\partial_{\nu}A_{\sigma}-\partial_{\sigma}A_{\nu}\right)+\partial_{\nu}\left(\partial_{\sigma}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\sigma}\right)=0 \tag{27}$$

A verificação da identidade de Bianchi para este caso particular é trivial:

$$\begin{aligned}&\partial_{\sigma}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})+\partial_{\mu}(\partial_{\nu}A_{\sigma}-\partial_{\sigma}A_{\nu})+\partial_{\nu}(\partial_{\sigma}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\sigma})=\\&=\partial_{\sigma}\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\mu}\partial_{\sigma}A_{\nu}+\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\sigma}-\partial_{\nu}\partial_{\mu}A_{\sigma}+\partial_{\nu}\partial_{\sigma}A_{\mu}-\partial_{\sigma}\partial_{\nu}A_{\mu}=0+0+0=0\end{aligned} \tag{28}$$

Em virtude de (26), devemos definir o tensor de campo gravitoelectromagnético:

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu} \tag{29}$$

Não é difícil mostrar que o tensor definido em (29) é anti-simétrico, com a diagonal nula:

$$F_{\nu\mu}=\partial_{\nu}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\nu}=-F_{\mu\nu} \quad : \quad F_{\mu\mu}=0 \tag{30}$$

Assim, a identidade de Bianchi para o modelo gravitoelectromagnético resultou numa lei de conservação do tensor de campo [5]:

$$\partial_{\sigma}F_{\mu\nu}+\partial_{\mu}F_{\nu\sigma}+\partial_{\nu}F_{\sigma\mu}=0 \tag{31}$$

Lagrangeano Cinemático Gravitoelectromagnético e a Força de Lorentz

Esta demonstração é uma alternativa aplicada no texto principal que utilizou a equação geodésica, logo iremos mostrar que utilizando o lagrangeano clássico mas com o termo da energia cinética em coordenadas curvilíneas vai gerar a Força de Lorentz derivada no capítulo 1.

Consideremos uma partícula de teste sujeita a um campo gravítico fraco que obedece ao modelo gravitoelectromagnético. Numa perspectiva compatível com a Relatividade Geral a partícula encontra-se livre ao percorrer uma geodésica cuja métrica é compatível com o modelo referido.

$$ds^2 = -c^2\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right)dt^2 - \frac{2A_i}{c}dx_i dt + \left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{32}$$

Admitindo uma aproximação da métrica em primeira ordem, o termo de energia cinética de uma partícula livre sobre uma variedade arbitrária pode ser simplificada:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)^2 ; \lambda = ct \tag{33}$$

Considerando a parametrização:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu ; x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad , \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{34}$$

Expandindo os termos da parametrização da métrica, obtemos no primeiro caso o vector deslocamento ordinário e no segundo caso os potenciais gravíticos.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + h_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = -c^2 t^2 + x^2 + \frac{2\phi}{c^2}(c^2 t^2) - \frac{2A_i}{c^2}(ctx_i) - \frac{2\phi}{c^2}x^2 \tag{35}$$

A expansão da métrica em termos da distância torna as derivações triviais, conforme aqui exposto:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial s}{\partial \lambda}\right)^2 \approx \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}m(2\phi c^2)\left(\frac{\partial x^0}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{1}{2}m(2A_i ct)\left(\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right)^2 + \ldots \tag{36}$$

A energia cinética da partícula sujeita a um sistema descrito pela métrica do modelo gravitoelectromagnético será equivalente ao lagrangeano electromagnético [5] :

$$T \equiv L_{GEM} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)^2 + m\phi - m\left(\vec{A}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right) \tag{37}$$

Tendo um lagrangeano bem definido e justificado, devemos aplicar as equações de Euler-Lagrange para determinar as equações de movimento que a partícula efectuará.

Devemos ter em atenção que o campo Newtoniano é escalar, mas dependente das coordenadas especiais e temporal, da mesma forma que o potencial vector axial gravitomagnético.

Segundo [3], representaremos as equações de Euler-Lagrange para a Mecânica Clássica:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{(\partial \vec{x})/(\partial t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0 \tag{38}$$

Calculamos primeiro o momento canónico do sistema, e a sua respectiva derivada temporal, que corresponde ao seguinte termo:

$$p = \frac{\partial L}{(\partial \vec{x})/(\partial t)} = m\vec{v} - \frac{m\vec{A}}{c} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = m\vec{a} - \frac{m}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{m}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}}\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \tag{39}$$

Como os potenciais dependem explicitamente das coordenadas especiais, a derivada em ordem ao vector deslocamento valerá:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = m \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} - \frac{m}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \tag{40}$$

Podemos escrever o resultado na forma covariante, que simplifica os cálculos seguintes:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{[(\partial x_i)/(\partial t)]_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow m a_i - \frac{m}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{m}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{m}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} - m\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \tag{41}$$

Introduzindo os potenciais gravitoeléctrico e gravitomagnético, respectivamente:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{2c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \tag{42}$$

Resulta a seguinte equação do movimento da partícula:

$$m a_i - m E_i - \frac{m}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} + \frac{m}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{m}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{m}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0 \tag{43}$$

$$m a_i - m E_i + 2\, m B_k v_j / c - 2\, m B_j v_k / c = 0 \tag{44}$$

Aplicando a notação vectorial a (44), derivamos a Força de Lorentz Gravitoelectromagnética:

$$\vec{F} = m\vec{E} + \frac{2m}{c}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{45}$$

O que termina a demonstração, resultando o mesmo dado em (1.125).