Espaço de Fock e operadores de Fock-Toeplitz

Pedro Tiago Costa Soares

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática Aplicada

Júri

Presidente:	Prof. Doutor António Francisco Ferreira dos Santos
Orientador:	Prof. Doutor Luís Filipe Serrazes Ventura de Barros Pessoa
Vogais:	Prof$^{\text{a}}$. Doutora Maria Amélia Duarte Reis Bastos
	Prof. Doutor Paulo Jorge da Rocha Pinto

Outubro 2012

Espaço de Fock e operadores de Fock-Toeplitz

Pedro Tiago Costa Soares

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em
Matemática Aplicada

Setembro 2012

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho estuda-se o espaço de Fock. Prova-se que o mesmo é um espaço de Banach e que os funcionais de avaliação são limitados. De seguida observa-se que o espaço de Fock de expoente 2 é um espaço de Hilbert, com núcleo reprodutor, o núcleo de Fock, o qual é calculado explicitamente. Utilizando o facto do espaço de Fock ser um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor, são analisados problemas de minimização.

De seguida são apresentados os operadores de Fock-Toeplitz, alcançando resultados sobre a sua limitação e compacidade destes operadores. Carateriza-se o maior subconjunto Q de funções essencialmente limitadas tais que o semi comutador dos operadores de Fock-Toeplitz é compacto. Para tal caraterização são fundamentais a transformada de Berezin (estudada na Secção 2.2), os operadores de Fock-Hankel e o conjunto ESV. Na classe das funções $BCESV$, utilizando a teoria das C*-algebras e a caraterização de Q, são indicadas condições necessárias e suficientes sobre o símbolo de um operador de Fock-Toeplitz, tais que o seu operador de Fock-Toeplitz é de Fredholm e é calculado o seu índice de Fredholm.

Introduz-se a transformada de Fourier de tempo curto e provam-se a sua limitação e invertibilidade. Apresenta-se a transformada de Bargmann, a qual se relaciona com a transformada de Fourier de tempo curto. Mostra-se que a transformada de Bargmann é um operador unitário entre o espaço de Fock e $L^2(\mathbb{R})$. Termina-se definindo os operadores de Localização e estabelece-se uma igualdade entre os operadores de Fock-Toepltiz e os operadores de Localização.

Palavras Chave: Espaço de Fock; Núcleo de Fock; Operadores de Fock-Toeplitz; Operadores de Fredholm; Transformada de Bargmann; Operadores de Localização

Abstract

In this work, we study the Fock space We prove that the Fock space is a Banach space and that the point-evaluation functionals are continuous acting on the Fock space. Next we see that the Fock space of exponent 2 is a reproducing kernel Hilbert space. Its reproducing kernel is the Fock kernel and we compute it. Using the fact that the Fock space is a reproducing kernel Hilbert space we study minimization problems.
Next we introduce the Fock-Toeplitz operators, we present some results about its continuity and compactness. We characterize the largest subset Q of essential bounded function such that the Fock-Toeplitz semicomutator is compact. The Berezin transform (studied in the section 2.2.), the Fock-Hankel operators and the set ESV are fundamental to the characterization of Q. Based on the characterization of Q, we indicate necessarily and sufficient condition about a function in $BCESV$ to its Fock-Toeplitz operator be a Fredholm operator, and we compute its Fredholm index.
We introduce the short time Fourier transform and we prove its continuity and invertibility. We introduce the Bargmann transform and relate it with the short time Fourier transform. we prove that the Bargmann transform is a unitary operator between the Fock space and $L^2(\mathbb{R})$. Finally, we define the localization operators and we establish a equality between the localization operators ans the Fock-Toeplitz operators.

Keywords: Fock space; Fock kernel; Fock-Toeplitz operators; Fredholm operators; Bargmann transform; Localization operators.

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar o espaço de Fock, os operadores de Fock-Toeplitz, a compacidade do semi comutador do operador de Fock-Toeplitz, o caráter de Fredholm de operadores de Fock-Toeplitz e a relação entre os operadores de localização e os operadores de Fock-Toeplitz.

O espaço das funções inteiras f tais que $|f|^p$ é mensurável em relação à medida de Lebesgue com o peso gaussiano, $e^{-|z|^2}$, é o espaço de Fock de expoente p, designado por $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$. Este espaço é designado por espaço de Fock, porque existe uma isometria entre este espaço e o espaço introduzido por Fock, na mecânica quântica, como pode ser encontrado em [8]. O estudo de espaços de funções analíticas é frequente na literatura de análise funcional, por exemplo o espaço de Bergman estudado em [17, 24].

Prova-se no Capítulo 1 que os funcionais de avaliação no espaço de Fock são operadores lineares limitados (Teorema 1.1.2), e que os espaços de Fock são subconjuntos fechados de $L^p(\mathbb{C}, e^{-|z|^2}dA(z))$. Quando o expoente é 2, o espaço de Fock é um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor. Os espaços de Hilbert com núcleo reprodutor são amplamente estudados em [3]. O núcleo reprodutor do espaço de Fock é designado por núcleo de Fock, para o qual se descrevem algumas das propriedades comuns aos núcleos reprodutores e determina-se uma formula explicita do núcleo de Fock (Corolário 1.2.7). São analisados dois problemas de minimização, propostos e resolvidos em [17] no contexto dos espaços de Bergman, sendo resolvidos considerando as propriedades provadas do núcleo de Fock.

No Capítulo 2 são introduzidos o operador de Fock-Toeplitz T_g com símbolo g, considerados em diferentes estudos, e.g. [6, 7, 11, 12, 18, 25, 22], e os operadores de Fock-Hankel, considerados em e.g. [5]. Estudam-se os operadores de Fock-Toeplitz e Fock-Hankel quanto à sua continuidade, injetividade em relação ao símbolo e além disso é provado que os operadores de Fock-Toeplitz com símbolo essencialmente limitada e nulo no infinito é um operador compacto (Proposição 2.1.8). De seguida, introduz-se a transformada de Berezin, que pode ser proposta em qualquer espaço de Hilbert com núcleo reprodutor tal como é feito e estudado em [35]. Mostra-se que a transformada de Berezin de uma função essencialmente limitada é uma função de Lipschitz (Proposição 2.2.4). Carateriza-se o maior subconjunto Q de funções essencialmente limitadas tais que o semi comutador $T_{fg} - T_f T_g$, para $f, g \in Q$ é compacto. Na caraterização de Q é fundamental a transformada de Berezin e o conjunto das funções essencialmente limitadas que tem oscilação nula no infinito, ESV. Abordam-se exemplos de funções que estão em ESV, encontrando condições para as funções homogéneas ou radiais estarem em ESV (Proposições 2.3.3 e 2.3.6) e, utilizando a transformada de Berezin, condições equivalentes para uma função pertencer a ESV (Teorema 2.3.10). Prova-se que Q coincide com o conjunto dos símbolos de operadores de Fock-Hankel compactos, que se decompõem em ESV com o conjunto de funções f tais que a transformada de Berezin de $|f|^2$ é contínua e nula no infinito (Teorema 2.3.17 e Proposição 2.3.18). Termina-se o capítulo 2 com a análise do caráter de Fredholm dos operadores de Fock-Toeplitz. Para tal é utilizada a teoria das C*-algebras, que pode ser consultada em e.g. [4, 30, 15], e a caraterização da C*-algebra Q. É calculado o índice de Fredholm dos operadores de Fock-Toeplitz com símbolo em $BCESV$ (Teorema 2.4.15).

No Capítulo 3 apresenta-se a transformada de Fourier de tempo curto. Mostra-se que a transformada de Fourier de tempo curto é um operador linear limitado e invertível de $L^2(\mathbb{R})$ para $L^2(\mathbb{R}^2)$ (Teorema

3.1.3 e a Proposição 3.1.5). Na secção seguinte é introduzida a transformada de Bargmann. Usando a relação da transformada de Fourier de tempo curto com a transformada de Bargmann (Proposição 3.2.1) e as propriedades provadas na secção anterior, obtemos que a transformada de Bargmann é uma isometria entre o espaço de Fock e $L^2(\mathbb{R})$, tal como é estudado em e.g. [1, 22]. Conclui-se com a apresentação dos operadores de localização $L_f^{(h)}$ com janela h e símbolo f. Usando as transformadas de Bargman e de Berezin prova-se que um operador de localização em que a janela é um polinómio e o símbolo é essencialmente limitado corresponde a um operador de Fock-Toeplitz (Teorema 3.3.3), tal como se encontra em [19, 28].

Capítulo 1

Espaço de Fock

1.1 Propriedades do espaço de Fock

Seja (X, Ω, ν) um espaço de medida, com a medida ν $\sigma-$finita. Se $1 \leq p < +\infty$, define-se $L^p(X, d\nu)$ o espaço das funções p mensuráveis por

$$L^p(X, d\nu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f(x)|^p d\nu(x) < +\infty \right\}.$$

O espaço $L^p(X, d\nu)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^p(X,d\nu)} := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\nu(x) \right)^{1/p}.$$

Se $p = \infty$, diz-se que $f : X \to \mathbb{C}$ é essencialmente limitada e escreve-se $f \in L^\infty(X, d\nu)$ se existe $M \geq 0$ tal que $|f| \leq M$ quase em toda a parte (q.t.p.). O espaço $L^\infty(X, d\nu)$ é um espaço de Banach com a seguinte norma

$$\|f\|_{L^\infty(X,d\nu)} := \inf \{ M \geq 0 : |f| \leq M \; q.t.p. \}.$$

Neste capítulo, considera-se que X é o plano complexo $\mathbb{C}$ e a seguinte medida com peso gaussiano

$$d\mu(z) := e^{-|z|^2} dA(z), \tag{1.1}$$

onde dA é a medida de Lebesgue bi-dimensional. $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ representa o conjunto das funções inteiras.

Seja $1 \leq p < +\infty$. Diz-se que f pertence ao espaço de Fock e escreve-se $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, se $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ e

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, d\mu(z) < +\infty.$$

O espaço de Fock é canonicamente identificado com um subespaço de $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$, sendo portanto um espaço normado com a seguinte norma

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

O exponente conjugado de p designa-se por p'. Se $p = 1$, então convenciona-se que $p' = +\infty$. Se $1 < p < +\infty$, então p' é o único real que satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Na seguinte proposição obtêm-se uma desigualdade entre as normas dos espaços de Fock.

Proposição 1.1.1. *Seja* $1 \leq p \leq q < +\infty$*. Se* $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$*, então*

$$\|f\|_1 \leq \pi^{1/p'} \|f\|_p.$$

Se $f \in \mathbb{F}^q(\mathbb{C})$*, então*

$$\|f\|_p \leq \pi^{1/q'} \|f\|_q.$$

Demonstração. Se $p = 1$, então a primeira desigualdade da proposição é trivialmente válida. Suponha-se que $1 < p < +\infty$. Se $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, então

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)| \, e^{-|z|^2} dA(z) = \int_{\mathbb{C}} |f(z)| \, e^{-\frac{|z|^2}{p}} e^{-\frac{|z|^2}{p'}} dA(z).$$

Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\|f\|_1 \leq \left(\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \, e^{-\frac{p|z|^2}{p}} dA(z) \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p'|z|^2}{p'}} dA(z) \right)^{1/p'} \leq \pi^{1/p'} \|f\|_p.$$

Seja $p \leq q < \infty$. Se $f \in \mathbb{F}^q(\mathbb{C})$, então

$$\|f\|_p^p = \| \, |f|^p \, \|_1 \leq \pi^{\frac{q-p}{q}} \| \, |f|^p \, \|_{\frac{q}{p}} = \pi^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^q \, e^{-|z|^2} dA(z) \right)^{\frac{p}{q}} = \pi^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_q^p.$$

Para terminar a demonstração é suficiente observar que

$$\frac{q-p}{pq} \leq 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{q'}.$$

$\square$

Da Proposição 1.1.1 seguem as seguintes inclusões

$$\mathbb{F}^q(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{F}^p(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{F}^1(\mathbb{C}), \quad 1 \leq p \leq q < +\infty.$$

Considerando uma definição de $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ no caso em que $p = +\infty$ semelhente aos restantes casos, obter-se-iam apenas as funções inteiras limitadas. Por o Teorema de Liouville, temos que todas estas funções são constantes, sendo que a definição não seria mais que uma identificação do espaço de Fock de expoente infinito com o plano complexo. Usualmente, o dual do espaço de funções com expoente 1 é o espaço de funções com expoente ∞. A definição anterior de espaço de Fock $\mathbb{F}^\infty(\mathbb{C})$ não conduz ao dual de $\mathbb{F}^1$. De facto, os funcionais de avaliação são lineares limitados em $\mathbb{F}^1(\mathbb{C})$, tal como é provado no seguinte teorema. Por estas razões não se define o espaço de Fock com expoente infinito.

Teorema 1.1.2. *Seja* $1 \leq p < +\infty$ *e* $z \in \mathbb{C}$*. Se* $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$*, então*

$$|f(z)| \leq C_{z,p} \|f\|_p, \tag{1.3}$$

onde $C_{z,p} > 0$ *é uma constante que somente depende de* z *e* p*. Se* $K \subseteq \mathbb{C}$ *é compacto não vazio, então existe uma constante* $C_{K,p} > 0$ *que somente depende de* K *e* p*, tal que*

$$\sup_{z \in K} \{|f(z)|\} \leq C_{K,p} \|f\|_p. \tag{1.4}$$

Demonstração. Primeiro consideremos o caso em que $p = 1$. Sejam $f \in \mathbb{F}^1(\mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{C}$. A fórmula integral de Cauchy garante que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})d\theta, \quad r > 0.$$

Multiplicando ambos os lados por $re^{-(r+|z|)^2}$ e integrando em r, segue que

$$\int_0^{+\infty} f(z)re^{-(r+|z|)^2}dr = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, r\, e^{-(r+|z|)^2}d\theta dr.$$

Aplicando o módulo à expressão anterior, e passando o módulo para o interior do integral, temos que

$$|f(z)|\, C(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \left|f(z + re^{i\theta})\right|\; r\, e^{-(r+|z|)^2}d\theta dr,$$

onde

$$C(z) = \int_0^{+\infty} re^{-(r+|z|)^2}dr.$$

A função $C(z)$ é limitada, porque

$$0 < C(z) \leq \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \frac{1}{2}.$$

Considerando a desigualdade $\left|z + re^{i\theta}\right| \leq |z| + r$ e a integração em coordenadas polares, obtemos que

$$\begin{aligned} |f(z)|\, C(z) \quad &\leq \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \left|f(z + re^{i\theta})\right| re^{-\left|z+re^{i\theta}\right|^2}d\theta dr \\ &= \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z + w)|\, e^{-|z+w|^2}dA(w) = \frac{1}{2\pi}\|f\|_1. \end{aligned}$$

Provamos assim a desigualdade enunciada para $p = 1$, ou seja temos que

$$|f(z)| \leq C_{z,1}\|f\|_1,$$

onde $C_{z,1} := 1/(2\pi C(z))$.

Seja $1 < p < +\infty$. Por a Proposição 1.1.1, se $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, então $f \in \mathbb{F}^1(\mathbb{C})$ e

$$|f(z)| \leq C_{z,1}\|f\|_1 \leq \frac{\pi^{1/p'}\|f\|_p}{2\pi C(z)} = \frac{\|f\|_p}{2\pi^{1/p}C(z)}.$$

Tomando $C_{z,p} := 1/(2\pi^{1/p}C(z))$ concluímos que (1.3).

De seguida mostra-se (1.4). Observa-se que, $C(z) \geq C(w)$ se e só se $|z| \leq |w|$. Seja K um compacto de $\mathbb{C}$. Então existe uma bola de raio $M > 0$ que contém K, logo

$$\frac{1}{C(z)} \leq \frac{1}{C(M)}, \quad z \in K.$$

Se $C_{K,p} := 1/(2\pi^{1/p}C(M))$, então (1.4) é válida.

$\square$

Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto não vazio. Diz-se que $f_n \to f$ uniformemente em K se

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in K}|f_n(z) - f(z)| = 0.$$

De seguida, utilizando o Teorema 1.1.2, verifica-se que a convergência no espaço de Fock implica a convergência uniforme nos compactos.

Corolário 1.1.3. *Seja $1 \leq p < +\infty$. Se $f_n \to f$ em $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, então $f_n \to f$ uniformemente nos compactos.*

Demonstração. Seja K compacto não vazio. Do Teorema 1.1.2 sabemos que

$$\sup_{z\in K}\{|f_n(z) - f(z)|\} \leq C_{K,p}\|f_n - f\|_p.$$

Da hipótese $\|f_n - f\|_p \to 0$, quando $n \to \infty$, temos que $f_n \to f$ uniformemente em K.

□

De seguida, prova-se que o espaço de Fock é um subespaço fechado de $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$. Logo, $\mathbb{F}^p$ munido com a norma definida em (1.2) é um espaço de Banach.

Teorema 1.1.4. *Se $1 \leq p < +\infty$, então $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $1 \leq p < +\infty$. Como $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$ é um espaço de Banach, é suficiente mostrar que a imersão do espaço de Fock em $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$ é um subespaço fechado. Seja f_n uma sucessão em $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ que converge em $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$ para f. É suficiente mostrar que existe uma função g inteira tal que $g = f$ q.t.p.. Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto não vazio. Deduz-se de (1.4) que, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{z\in K}|f_n - f_m| \leq C\|f_n - f_m\|_p.$$

Logo, f_n é uma sucessão de Cauchy na norma uniforme em K. Existe um função g tal que $f_n \to g$ uniformemente em K. A função g é holomorfa no interior de K, porque f_n são funções inteiras e o limite uniforme preserva a analiticidade das funções. Da arbitrariedade de K, temos que $g \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Da seguinte desigualdade

$$\int_K |f_n - g|^p e^{-|z|^2} dA(z) \leq (\sup_{z\in K}|f_n - g|)^p \int_K e^{-|z|^2} dA(z),$$

temos que $f_n \to g$ em $L^p(K, d\mu)$. Como f_n converge para f em $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$ então f_n também converge para f em $L^p(K, d\mu)$. Por outro lado f_n converge para g em $L^p(K, d\mu)$, logo $g = f$ q.t.p. em K. Utilizando a arbitrariedade de K, temos que $g = f$ q.t.p. em $\mathbb{C}$. Logo $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ é um espaço de Banach. □

Seja E um espaço de Banach. O espaço dual de E é o espaço de todos os funcionais lineares limitados em E, o qual se designa por E^*. O dual de um espaço de Banach é também um espaço de Banach com a norma uniforme dos operadores lineares limitados. Seja $1 \leq p < +\infty$. É conhecido ([33, Teorema 6.16]) que o dual de $L^p(\mathbb{C}, d\mu)$ é isomorfo a $L^{p'}(\mathbb{C}, d\mu)$ por meio do seguinte isomorfismo

$$\Psi : L^{p'}(\mathbb{C}, d\mu) \to L^p(\mathbb{C}, d\mu)^*, \quad \Psi(g)(f) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g}(z)d\mu(z).$$

Seja f_n uma sucessão em E. Diz-se que f_n converge fracamente para f se para todo o $\varphi \in E^*$, temos que $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ na convergência usual em $\mathbb{C}$, escrevendo-se $f_n \rightharpoonup f$.

Uma família de funções complexas f_n diz-se equicontínua em $z \in \mathbb{C}$ se para todo o $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo o n temos que se $w \in B_\delta(z)$, então $f_n(w) \in B_\epsilon(f_n(z))$, onde $B_r(z) \subset \mathbb{C}$ é a bola de raio r e centro em z.

Proposição 1.1.5. *Seja $1 < p < +\infty$ e f_n uma sucessão em $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$. Então f_n converge fracamente para $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ se e só se existe $C \geq 0$ tal que $\|f_n\|_p \leq C$ e $f_n \to f$ uniformemente nos compactos.*

Demonstração. Seja $1 < p < +\infty$. Sem perda de generalidade, assumimos que $f = 0$. Supomos que f_n converge fracamente para 0. Se $\varphi \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})^*$, define-se $\ddot{f}_n(\varphi) = \varphi(f_n)$. Temos que $\ddot{f}_n \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})^{**}$ e $\ddot{f}_n \to 0$ em $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})^{**}$. Logo, o Teorema de Banach-Steinhaus garante que, existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\ddot{f}_n\|_{\mathbb{F}^p(\mathbb{C})^{**}} = \|f_n\|_{\mathbb{F}^p(\mathbb{C})} \leq C.$$

Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto não vazio. O Teorema 1.1.2 garante que, existe $C_{K,p} > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq C_{K,p} \|f_n\|_p.$$

Como $\|f_n\|_p \leq C$, temos que f_n é uma família de funções limitadas nos compactos. Mostra-se de seguida que f_n é uma família equicontínua. Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Como $\partial B_r(z)$ é compacto, por o Teorema 1.1.2, existe uma constante $M > 0$ tal que $|f_n(w)| \leq M$ para todo o n e $w \in \partial B_r(z)$. Logo

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_n(w)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(z)} \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - w} \right) f_n(\xi) d\xi \right| \\ &= \frac{|z - w|}{2\pi} \left| \int_{\partial B_r(z)} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)(\xi - w)} d\xi \right| \leq \frac{2M}{r} |z - w|, \quad w \in B_{r/2}(z). \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ e escolhendo $\delta = min\{\epsilon r/2M, r/2\}$, temos que se $|z - w| < \delta$, então $|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon$, para qualquer n, i.e. a família f_n é equicontínua. Do Teorema 1.1.2 e da convergência fraca de f_n resulta que f_n converge pontualmente para 0. Seja $\epsilon > 0$. Da equicontinuidade de f_n, para todo o $w \in K$ existe δ_w tal que se $z \in B_{\delta_w}(w)$, então

$$|f_n(z) - f_n(w)| < \epsilon,$$

para todo o n. Da compacidade de K, existe $w_1, ..., w_m \in K$ tais que as bolas de raio δ_{w_j} e centro w_j, com $j = 1, ..., m$, cobrem K. Se $z \in K$, então existe j tal que $z \in B_{\delta_{w_j}}(w_j)$ e

$$|f_n(z)| \leq |f_n(z) - f_n(w_j)| + |f_n(w_j)| \leq \epsilon + |f_n(w_j)|,$$

para todo o n. Da convergência pontual de f_n para zero, temos que existe N tal que se $n > N$, então

$$\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq \epsilon + \sup_{j=1,..m} |f_n(w_j)| \leq 2\epsilon.$$

Da arbitrariedade de ϵ e K concluímos que f_n converge uniformemente para zero.

Mostra-se de seguida o recíproco. Seja f_n sucessão limitada em $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$ tal que $f_n \to 0$ uniformemente nos compactos. O Teorema de Hahn-Banach e o isomorfismo Ψ garantem que, para qualquer $\varphi \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})^*$, existe $g \in L^{p'}(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} dA(z) =: F_g(f), \quad f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C}).$$

Se g é contínua e tem suporte compacto (função que é nula no exterior de um compacto do plano complexo), então temos que

$$F_g(f) = \int_{\mathbb{C}} f_n(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} dA(z) = \int_K f_n(z)\overline{g(z)} e^{-|z|^2} dA(z),$$

onde K é o suporte compacto da função g. Aplicando o modulo à expressão anterior obtemos que

$$|F_g(f)| \leq \int_K |f_n(z)\overline{g(z)}| e^{-|z|^2} dA(z) \leq \pi \sup_{z \in K} |f_n(z)| \sup_{z \in K} |g(z)|$$

A continuidade de g garante que existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |g(z)| = C < +\infty.$$

Então
$$|F_g(f_n)| \le \pi C \sup_{z\in K} |f_n(z)|.$$
De f_n convergir uniformemente em K para 0 segue que
$$|F_g(f_n)| \to 0.$$
A densidade das funções contínuas de suporte compacto em $L^{p'}(\mathbb{C}, d\mu)$ implica que f_n converge fracamente para 0.

$\square$

Sejam $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ e $1 \le p < +\infty$. Considere-se o funcional de avaliação da derivada de ordem k no ponto z, i.e.
$$\Phi_{k,z} : \mathbb{F}^p(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \quad \Phi_{k,z}(f) := f^{(k)}(z).$$
Na Proposição 1.1.2 verificamos que o funcional de avaliação no ponto $z \in \mathbb{C}$ é linear limitado. Na proposição seguinte prova-se que os funcionais de avaliação das derivadas são lineares limitados.

Proposição 1.1.6. *Sejam $1 \le p < +\infty$, $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, então*
$$|f^{(k)}(z)| \le C_{z,k,p} \|f\|_p,$$
onde $C_{z,k,p}$ é uma constante que depende somente de z, k e p.

Demonstração. Sejam $1 \le p < +\infty$, $z \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$. Da fórmula integral de Cauchy, temos que
$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k!}{2\pi} \int_{\partial B_1(z)} \frac{|f(w)|}{|w-z|^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Como $\partial B_1(z)$ é compacto, a Proposição 1.1.2 garante que, existe uma constante $C_{z,p}$ tal que $|f(w)| \le C_{z,p}\|f\|_p$, para qualquer $w \in \partial B_1(z)$. Então
$$|f^{(k)}(z)| \le C_{z,p} k! \|f\|_p, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Definindo $C_{z,k,p} := C_{z,p} k!$, com $k \in \mathbb{N}$, obtemos a desigualdade enunciada. $\square$

Designa-se o conjunto dos polinómios complexos na variável z por $\mathbb{P}[z]$.

Proposição 1.1.7. *Se $1 \le p < +\infty$, então $\mathbb{P}[z] \subset \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Basta verificar que z^n pertence ao espaço de Fock $\mathbb{F}^p(\mathbb{C})$, para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 \le p < +\infty$. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $1 \le p < +\infty$. Então
$$\|z^n\|_p^p = \|z^{np}\|_1 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{np} e^{-|z|^2} dA(z).$$
Do seguinte limite
$$\lim_{|z|\to\infty} |z|^{np} e^{-\frac{|z|^2}{2}} = 0,$$
sabemos que existe uma constante $C > 0$ tal que se $|z| > C$, então
$$|z|^{np} e^{-|z|^2} \le e^{-\frac{|z|^2}{2}}.$$

Consequentemente, temos que

$$\|z^n\|_p^p \leq \int_{|z|\leq C} |z|^{np} e^{-|z|^2} dA(z) + \int_{|z|>C} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z). \tag{1.5}$$

O primeiro integral de (1.5) existe e é limitado porque é o integral de uma função contínua limitada num compacto. Para a limitação do segundo integral de (1.5), observamos que

$$\int_{|z|>C} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z) < \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} dA(z) = 2\pi.$$

Logo $\|z^n\|_p < +\infty$, para todo o n e p. Como o espaço de Fock é um espaço vetorial, então $\mathbb{P}[z] \subset \mathbb{F}^p(\mathbb{C})$. $\square$

1.2 Núcleo e projeção de Fock

Seja (X, Ω, ν) um espaço de medida, com a medida ν $\sigma-$finita. É conhecido que $L^2(X, d\nu)$ é um espaço de Hilbert munido com o seguinte produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\nu(x), \quad f, g \in L^2(X, d\nu). \tag{1.6}$$

Do Teorema 1.1.4, sabemos que $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Então $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ é um espaço de Hilbert equipado com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z), \quad f, g \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}),$$

induzido do produto interno definido para $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

Seja $z \in \mathbb{C}$. O funcional de avaliação em z no espaço de Fock é um operador linear limitado, segundo o Teorema 1.1.2. O Teorema de representação de Riesz garante a existência de um único $\kappa_z \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ tal que

$$f(z) = \langle f, \kappa_z\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{\kappa_z(w)} d\mu(w), \quad f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}).$$

Na próxima proposição é usado o conceito de ortogonal. Se H é um espaço de Hilbert e $A \subset H$, então o ortogonal de A em H é designado por $A^\perp$ e definido por

$$A^\perp := \{b \in H : \langle a, b\rangle = 0,\ a \in A\}.$$

Proposição 1.2.1. *A expansão linear de* $\{\kappa_z\}_{z\in\mathbb{C}}$ *é densa em* $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

Demonstração. É suficiente mostrar que o ortogonal de $\{\kappa_z\}$ é trivial. Se $f \in \{\kappa_z\}^\perp$, então

$$f(z) = \langle f, \kappa_z\rangle = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Logo $\{\kappa_z\}^\perp = 0$. $\square$

Define-se o núcleo de Fock como a seguinte função

$$K : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad K(z, w) := \overline{\kappa_z(w)}.$$

Seja H um espaço de funções definidas num domínio (aberto, conexo e não vazio) $U \subset \mathbb{C}$ com valores complexos. Diz-se que H é um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor se H é um espaço de Hilbert e os funcionais de avaliação em z são lineares limitados, para todo o $z \in U$. Do Teorema de representação de Riesz, temos que existe $k : U \times U \to \mathbb{C}$, denominado por núcleo reprodutor de H, tal que se $y \in U$, então

$$f(y) = \langle f(.), k(., y)\rangle \quad \text{e} \quad k(., y) \in H.$$

Por o Teorema 1.1.2, o espaço de Fock é um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor e o núcleo de Fock é o núcleo reprodutor do espaço de Fock. De seguida são provadas algumas propriedades do núcleo de Fock que, para além de serem válidas no espaço de Fock, admitem análogos no contexto geral dos espaços de Hilbert com núcleo reprodutor.

Proposição 1.2.2. *Se $z, w \in \mathbb{C}$, então o núcleo de Fock respeita as seguintes propriedades:*

(a) $\overline{K(z,.)} \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$;

(b) $\overline{K(z,w)} = K(w,z)$;

(c) $K(z,z) = \|K(.,z)\|_2^2 = \|\overline{K(z,.)}\|_2^2$;

(d) $K(z,w)$ é o único núcleo reprodutor do espaço de Fock.

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. A primeira propriedade é imediata da definição do núcleo de Fock. Considerando a função do espaço de Fock $\overline{K(z,.)}$ avaliada em w temos que

$$\begin{aligned} \overline{K(z,w)} &= \int_{\mathbb{C}} \overline{K(z,\xi)} K(w,\xi) d\mu(\xi) \\ &= \overline{\int_{\mathbb{C}} K(z,\xi) \overline{K(w,\xi)} d\mu(\xi)} = K(w,z). \end{aligned}$$

Logo temos *(b)*. Para provar *(c)* observamos que

$$\begin{aligned} K(z,z) &= \int_{\mathbb{C}} K(z,w) K(w,z) d\mu(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \overline{K(w,z)} K(w,z) d\mu(w) = \|K(.,z)\|_2^2. \end{aligned}$$

De *(a)* e *(b)* temos que $K(.,w) \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então

$$f(y) = \langle f(.), K(.,y)\rangle, \quad y \in \mathbb{C}.$$

Logo $K(z,w)$ é o núcleo reprodutor do espaço de Fock. Supomos que existe $K_2(z,w)$ outro núcleo reprodutor do espaço de Fock. Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então

$$\langle f(.), K(.,z) - K_2(.,z)\rangle = f(z) - f(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

A igualdade anterior implica que $K(w,z) = K_2(w,z)$. Logo o núcleo reprodutor do espaço de Fock é único e é o núcleo de Fock.

□

Como o espaço de Fock é um subespaço fechado de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, então a projeção ortogonal de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ está bem definida, é designada por P e diz-se a projeção de Fock. De acordo com a seguinte proposição a projeção de Fock é um operador integral cujo o núcleo é o núcleo de Fock.

Proposição 1.2.3. *Seja $f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Temos que,*

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{C}} K(z,w) f(w) d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Seja $f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ e $z \in \mathbb{C}$. Então

$$Pf(z) = \langle Pf, \kappa_z \rangle = \langle f, P\kappa_z \rangle = \langle f, \kappa_z \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{\kappa_z(w)}d\mu(w) = \int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)d\mu(w).$$

□

Com o objetivo de encontrar uma base ortonormal para o espaço de Fock, calcula-se, de seguida, o produto interno de $f \in \mathbb{P}[z]$ por z^n em que n é um inteiro não negativo. As seguintes fórmulas de Green, enunciadas em [14, página 77], são bastantes úteis para auxiliar estes cálculos. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um multi conexo (aberto tal que existem $U_1, ..., U_n$ conjuntos conexos tais que, para todo o j, ∂U_j é um caminho continuamente diferenciável e $U \cup U_1 \cup ... \cup U_n$ é conexo) e $u \in C^1(U)$, onde $C^1(U)$ designa o conjunto de funções continuamente diferenciáveis em U. Se ∂U é uma curva seccionalmente diferenciável e orientada de forma a ter sempre U no seu lado esquerdo, então

$$\int_U \frac{\partial}{\partial \overline{z}} u(z)dA(z) = \frac{1}{2i}\int_{\partial U} u(z)dz, \tag{1.7}$$

$$\int_U \frac{\partial}{\partial z} u(z)dA(z) = -\frac{1}{2i}\int_{\partial U} u(z)d\overline{z}. \tag{1.8}$$

Consideremos $f \in \mathbb{P}[z]$ e n um inteiro não negativo. Então,

$$\langle f, z^n \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{z}^n e^{-|z|^2} dA(z).$$

Usando derivação por partes temos que

$$\langle f, z^n \rangle = -\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial z}\left(f(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}\right)dA(z) + \int_{\mathbb{C}} f'(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}dA(z).$$

Seja $A_\epsilon^r := \{z \in \mathbb{C} : \epsilon < |z| < r\}$ o anel de raios ϵ e r, com $\epsilon < r$. Então

$$\langle f, z^n \rangle = -\lim_{r\to+\infty, \epsilon\to 0}\int_{A_\epsilon^r} \frac{\partial}{\partial z}\left(f(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}\right)dA(z) + \langle f', z^{n-1}\rangle.$$

Da fórmula de Green (1.8), obtemos que

$$\langle f, z^n \rangle = \frac{1}{2i}\lim_{r\to+\infty, \epsilon\to 0}\left(\int_{|z|=r} f(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}d\overline{z} - \int_{|z|=\epsilon} f(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}d\overline{z}\right) + \langle f', z^{n-1}\rangle.$$

Seja $r > 0$. Se $|z| = r$, então

$$\overline{z} = \frac{r^2}{z} \quad \text{e} \quad d\overline{z} = -\frac{r^2}{z^2}dz.$$

Da fórmula integral de Chauchy, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=r} f(z)\overline{z}^{n-1}e^{-|z|^2}d\overline{z} &= -r^2\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\overline{z}^{n-1}e^{-r^2}dz \\
&= -r^2e^{-r^2}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\left(\frac{r^2}{z}\right)^{n-1}dz \\
&= -r^{2n}e^{-r^2}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \\
&= -r^{2n}e^{-r^2}\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(0).
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle f, z^n\rangle = -\left(\lim_{r\to+\infty}\frac{\pi}{n!}r^{2(n+1)}e^{-r^2}f^{(n)}(0) - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\pi}{n!}\epsilon^{2(n+1)}e^{-\epsilon^2}f^{(n)}(0)\right) + \langle f', z^{n-1}\rangle.$$

Como ambos os limites são nulos, segue que

$$\langle f, z^n\rangle = \langle f', z^{n-1}\rangle = ... = \langle f^{(n)}, 1\rangle. \tag{1.9}$$

Reduzimos o problema ao cálculo de $\langle f, 1\rangle$, o qual é calculado de seguida usando a derivação por partes e as fórmulas de Green,

$$\begin{aligned}\langle f, 1\rangle &= \int_{\mathbb{C}} f(z)e^{-|z|^2}dA(z) = -\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\frac{f(z)}{z}e^{-|z|^2}\right)dA(z)\\ &= -\frac{1}{2i}\lim_{r\to+\infty,\epsilon\to 0}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dze^{-r^2} - \int_{|z|=\epsilon}\frac{f(z)}{z}dze^{-\epsilon^2}.\end{aligned}$$

Por a fórmula de Cauchy ambos os integrais são iguais a $2\pi i f(0)$. Logo

$$\langle f, 1\rangle = \pi f(0).$$

De (1.9), temos que

$$\langle f, z^n\rangle = \pi f^{(n)}(0). \tag{1.10}$$

Reúne-se e generaliza-se o cálculo anterior na proposição que se segue.

Proposição 1.2.4. *Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $n \in \mathbb{N}_0$, então*

$$\langle f, z^n\rangle = \pi f^{(n)}(0).$$

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Sabe-se que f coincide com o seu desenvolvimento na sua série de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Para qualquer j, de (1.10) segue que

$$\|\sum_{k=0}^{j}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k\|_2^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty}|f^{(k)}(0)|^2 < \infty.$$

Da convergência uniforme nos compactos da serie de Taylor e da desigualdade anterior, usando a Proposição 1.1.5, temos que a série de Taylor converge fracamente para f. Então, para qualquer n,

$$\langle f, z^n\rangle = \langle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k, z^n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\langle z^k, z^n\rangle = \pi f^{(n)}(0).$$

□

Utilizando a Proposição 1.2.4 prova-se a densidade dos polinómios no espaço de Fock.

Proposição 1.2.5. *$\mathbb{P}[z]$ é denso em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Ademais*

$$\left\{\frac{z^n}{\sqrt{\pi n!}}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

Demonstração. $\mathbb{P}[z]$ é gerado por as combinações lineares de z^n, onde $n \in \mathbb{N}_0$. Verificando que o ortogonal de $\{z^n\}$ é trivial temos que os polinómios são densos em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ é ortogonal a $\{z^n\}$, então $\langle f, z^n \rangle = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. De (1.10) e da série de Taylor, temos que $f = 0$. Logo os polinómios são densos em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

De (1.10), temos que se $n \neq m$, então $\langle z^n, z^m \rangle$ e $\|z^n\|_2 = \pi n!$. Logo

$$\left\{ \frac{z^n}{\sqrt{\pi n!}} \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

$\square$

Na próxima proposição é dada uma forma de escrever explicitamente o núcleo de Fock através do conhecimento de uma base ortonormal de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

Proposição 1.2.6. *Seja e_n, com $n \in \mathbb{N}_0$, uma base ortonormal de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. O núcleo de Fock é dado por*

$$K(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{e_j(w)} e_j(z), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Seja e_n uma base ortonormal de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Se $w \in \mathbb{C}$, então da alínea *(c)* da Proposição 1.2.2, existem constantes $c_j \in \mathbb{C}$, com $j = 0, 1...$, tal que

$$K(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e_j(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da propriedade reprodutora do núcleo de Fock, temos que $c_j = \langle \kappa_w, e_j \rangle = \overline{\langle e_j, \kappa_w \rangle} = \overline{e_j(w)}$. Logo

$$K(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{e_j(w)} e_j(z), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

$\square$

Através da base ortonormal do espaço de Fock calculada na Porposição 1.2.5 e da proposição anterior, é dada uma forma explicita do núcleo de Fock.

Corolário 1.2.7. *O núcleo de Fock é explicitamente dado por*

$$K(z,w) = \frac{e^{\overline{w}z}}{\pi}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Da Proposição 1.2.5, temos que

$$K(z,w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\overline{w}z)^k}{\pi k!} = \frac{e^{\overline{w}z}}{\pi}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

$\square$

1.3 Problemas de minimização

Na presente secção estudamos dois problemas de minimização. Os problemas propostos de seguida são resolvidos utilizando o facto do espaço de Fock ser um espaço de Hilbert com núcleo reprodutor. Estes problemas podem ser igualmente propostos para outros espaços de Hilbert com núcleo reprodutor e tem resolução semelhante. No primeiro problema encontramos uma forma explícita para o minimizante enquanto no segundo, que é uma generalização do primeiro, apenas afirmamos a existência e a unicidade da solução. Os problemas são analisados separadamente, pois são utilizadas técnicas de resolução distintas.

Sejam w e α números complexos. Define-se o subconjunto de $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ dado por

$$M_{w,\alpha} := \left\{ f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) : f(w) = \alpha \right\}.$$

Na próxima proposição estudamos o problema de minimização associado ao conjunto $M_{w,\alpha}$. Desde já, observa-se que $M_{w,\alpha} \neq \emptyset$, porque as funções constantes pertencem ao espaço de Fock.

Proposição 1.3.1. *Sejam $w, \alpha \in \mathbb{C}$. Então existe um único $f_0 \in M_{w,\alpha}$ tal que*

$$\inf_{f \in M_{w,\alpha}} \|f\|_2 = \|f_0\|_2.$$

A função f_0 verifica as seguintes igualdades

$$f_0(z) = \alpha \frac{K(z,w)}{K(w,w)} = \alpha e^{\overline{w}z - |w|^2} \quad e \quad \|f_0\|_2 = |\alpha|\sqrt{\pi} e^{-\frac{|w|^2}{2}}.$$

Demonstração. Sejam $w, \alpha \in \mathbb{C}$. Se $f \in M_{w,\alpha}$, então, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as propriedades do núcleo de Fock *(b)* e *(c)* da Proposição 1.2.2, temos que

$$\alpha = \langle f, \kappa_w \rangle \leq \|f\|_2 \|\kappa_w\|_2 = \|f\|_2 \sqrt{K(w,w)}.$$

Portanto

$$\|f\|_2 \geq \alpha K(w,w)^{-\frac{1}{2}}.$$

Do lema de Cauchy-Schwarz, temos que a igualdade na desigualdade anterior é estabelecida se e só se $f(z) = CK(z,w)$, para alguma constante $C \in \mathbb{C}$. Como $f_0(w) = \alpha$, então

$$C = \frac{\alpha}{K(w,w)} \quad \text{e} \quad f_0(z) = CK(z,w) = \alpha \frac{K(w,z)}{K(w,w)}.$$

Da propriedade do núcleo de Fock *(c)* da Proposição 1.2.2, segue que

$$\|f_0\|_2 = \frac{|\alpha|}{\sqrt{K(w,w)}}.$$

Utilizando o Corolário 1.2.7, temos que

$$f_0(z) = \alpha e^{\overline{w}z - |w|^2} \quad \text{e} \quad \|f_0\|_2 = |\alpha|\sqrt{\pi} e^{-\frac{|w|^2}{2}}.$$

□

Sejam $w_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$, onde $j = 0, 1, .., n$. Define-se o seguinte conjunto

$$M = \left\{ f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) : f(w_j) = \alpha_j, \ j = 0, 1, .., n \right\} = \bigcap_{j=0}^{n} M_{w_j, \alpha_j}.$$

Observamos que $M \neq \emptyset$, porque existe um polinómio de grau n que satisfaz as condições de interpolação impostas na definição de M. É evidente que M é convexo. Na proposição seguinte estudamos a existência e unicidade o minimizante de M.

Proposição 1.3.2. *Seja $w_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$, com $j = 0, 1, .., n$ e o conjunto associado,*

$$M = \left\{ f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) : f(w_j) = \alpha_j \; j = 0, 1, .., n \right\}.$$

Então existe um único $F \in M$ tal que

$$\inf_{f \in M} \|f\|_2 = \|F\|_2,$$

e constantes $c_j \in \mathbb{C}$ tais que F é da forma

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j K(z, w_j). \tag{1.11}$$

Demonstração. Sejam $w_j, \alpha_j \in \mathbb{C}$, com $j = 0, 1, .., n$ e M tal como é definido na proposição. Da continuidade do funcional de avaliação, temos que M é fechado. De M ser fechado e convexo, temos que a aplicação $M \ni f \mapsto \|f\|_2$ admite um mínimo, o qual designamos por minimizante de M. Primeiro supomos que F é o minimizante de M e verificamos que é da forma (1.11). Seja

$$M_0 = \left\{ f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) : f(w_j) = 0, j = 0, 1, .., n \right\}.$$

Se $g \in M_0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ então $F + \lambda g \in M$. Por F ser o minimizante temos que

$$\|F\|_2^2 \leq \|F + \lambda g\|_2^2 = \|F\|_2^2 + 2Re(\langle \lambda g, F \rangle) + |\lambda|^2 \|g\|_2^2.$$

Escrevendo $\lambda = re^{i\theta}$, segue que

$$2rRe(e^{i\theta} \langle g, F \rangle) + r^2 \|g\|_2^2 \geq 0.$$

Aplicando o limite quando r vai para 0, obtemos que para todo o θ

$$Re(e^{i\theta} \langle g, F \rangle) \geq 0.$$

Da arbitrariedade de θ obtemos que g é ortogonal a F. Logo F pertence ao ortogonal de M_0. Como $f(z) = \langle f, \kappa_z \rangle$, para todo o $z \in \mathbb{C}$, o ortogonal de M_0 é dado por

$$M_0^{\perp} = \left\{ f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) : f(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j K(z, w_j), c_j \in \mathbb{C} \right\}.$$

Logo, F tem de ser da forma

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j K(z, w_j).$$

Para provar a unicidade da solução consideramos as equações de interpolação $f(w_j) = \alpha_j$ e obtemos o sistema de equações,

$$\begin{bmatrix} K(w_1, w_1) & K(w_1, w_2) & \dots & K(w_1, w_n) \\ K(w_2, w_1) & K(w_2, w_2) & \dots & K(w_2, w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(w_n, w_1) & K(w_n, w_2) & \dots & K(w_n, w_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

A matriz $n \times n$ tem a seguinte forma hermitiana

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} K(w_k, w_j)\beta_j\overline{\beta_k} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle \kappa_{w_j}, \kappa_{w_j}\rangle \beta_j\overline{\beta_k} \\ &= \langle \sum_{j=1}^{n}\beta_j\kappa_{w_j}, \sum_{k=1}^{n}\beta_k\kappa_{w_j}\rangle = \| \sum_{j=1}^{n}\beta_j\kappa_{w_j}\|_2^2.\end{aligned}$$

Portanto é uma matriz definida positiva, e consequentemente tem uma solução única.

$\square$

Capítulo 2

Operadores de Fock-Toeplitz

2.1 Propriedades elementares dos operadores de Fock-Toeplitz

Nesta secção introduzimos o operador de Fock-Toeplitz e estudamos algumas das suas propriedades elementares. Seja (X, Ω, ν) um espaço de medida, com a medida ν $\sigma-$finita e $g : X \to X$ uma função mensurável. Define-se o operador de multiplicação M_g em $L^2(X, d\nu)$ por

$$M_g f := fg, \quad f \in L^2(X, d\nu).$$

Proposição 2.1.1. *Se $g \in L^\infty(X, d\nu)$, então o operador de multiplicação é linear limitado de $L^2(X, d\nu)$ para $L^2(X, d\nu)$ e*

$$\|M_g\| = \|g\|_\infty.$$

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(X, d\nu)$. Temos que

$$\|M_g f\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2, \quad f \in L^2(X, d\nu).$$

Logo $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$. Seja $\epsilon > 0$. Existe $A \in \Omega$ tal que $\infty > \nu(A) > 0$ e se $x \in A$, então $|g(x)| \geq \|g\|_\infty - \epsilon$. Considere-se a função $h = (\nu(A))^{-1/2}\chi_A$, onde χ_A é a função caraterística do conjunto A, temos que $h \in L^2(X, d\nu)$ e $\|h\|_2 = 1$. Por

$$\|M_g h\|_2^2 = \frac{1}{\nu(A)} \int_A |g(x)|^2 d\nu(x) \geq (\|g\|_\infty - \epsilon)^2,$$

temos que $\|M_g\| \geq \|g\|_\infty - \epsilon$, para todo o $\epsilon > 0$. Da arbitrariedade de ϵ, temos que $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.

□

Seja $g : X \to X$ uma função mensurável. Com facilidade se verifica que o adjunto do operador de multiplicação é dado por

$$M_g^* = M_{\overline{g}}. \tag{2.1}$$

Neste capítulo consideramos o operador de multiplicação no caso em que $X = \mathbb{C}$ e $\nu = \mu$, a medida definida em (1.1). Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mensurável. O operador de Fock-Toeplitz T_g com símbolo g é a composição da projeção de Fock com o operador de multiplicação M_g, definido para todo o $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ tal que $gf \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, i.e.

$$T_g : \mathcal{D} \subset \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}^2(\mathbb{C}), \quad T_g := PM_g,$$

onde o conjunto $\mathcal{D}$ é composto por as funções $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ tais que $gf \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

Designa-se o conjunto de polinómios em z e $\overline{z}$ por $\mathbb{P}[z,\overline{z}]$. De seguida, analisa-se o conjunto onde o operador de Fock-Toeplitz com símbolo em $\mathbb{P}[z,\overline{z}]$ está definido. Posteriormente analise-se a continuidade dos operadores de Fock-Toeplitz com símbolo em $\mathbb{P}[z,\overline{z}]$. Sejam $k, j \in \mathbb{N}_0$. Temos que

$$\|z^k\overline{z}^j\|_2 = \langle z^k\overline{z}^j, z^k\overline{z}^j\rangle = \langle z^{k+j}, z^{k+j}\rangle = \|z^{k+j}\|_2.$$

Da Proposição 1.1.1 e da desigualdade de Hölder, temos que se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ então

$$\|z^k\overline{z}^j f(z)\|_2^2 \leq \|z^{k+j}\|_2\|f\|_4^2 \leq \pi\|z^{k+j}\|_2\|f\|_2^2$$

Por linearidade, se $g \in \mathbb{P}[z,\overline{z}]$, então $fg \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, para todo o $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Logo, o operador de Fock-Toeplitz com símbolo em $\mathbb{P}[z,\overline{z}]$ está definido em todo o espaço de Fock.

Proposição 2.1.2. *Se $f \in \mathbb{P}[z]$, então*

$$T_{\overline{z}}f = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}f.$$

Demonstração. Provamos primeiro para $p_k := z^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Se $z \in \mathbb{C}$, então

$$T_{\overline{z}}p_k(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} w^k\overline{w}e^{\overline{w}z}d\mu(w) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial z}w^k e^{\overline{w}z}d\mu(w).$$

Da continuidade da função $w^k e^{\overline{w}z}$ e da sua derivada em ordem a z pode-se aplicar a regra de Leibniz, obtemos que

$$T_{\overline{z}}p_k(z) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\mathbb{C}} w^k e^{\overline{w}z}d\mu(w) = \frac{\partial}{\partial z}\langle p_k, \kappa_z\rangle = \frac{\partial}{\partial z}z^k.$$

Provado o resultado para z^k e usando a linearidade do operador concluímos que

$$T_{\overline{z}}f = \frac{\partial}{\partial z}f,$$

para todo o $f \in \mathbb{P}[z]$. $\square$

A densidade dos polinómios no espaço de Fock e a seguinte igualdade

$$\|\frac{\partial}{\partial z}z^k\|_2 = \|z^k\|_2, \quad k \in \mathbb{N},$$

garantem que $\|T_{\overline{z}}\| = 1$. Por outro lado o operador de Fock-Toeplitz com símbolo z não é limitado, porque

$$\|T_z(z^k)\| = (k+1)\|z^k\|_2 \quad k \in \mathbb{N}.$$

No que se segue, limitamos o estudo dos operadores de Fock-Toeplitz apenas aos que tem símbolo essencialmente limitado. Isto garante que o domínio do operador é todo o espaço de Fock. A classe de símbolos para as quais os resultados que são apresentados nesta e na próxima secção são verdadeiros pode ser alargada, como pode ser consultado em [5].

Da Proposição 1.2.3 e do Corolário 1.2.7 temos que o operador de Fock-Toeplitz com símbolo essencialmente limitado é dado por

$$T_g f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w)g(w)e^{\overline{w}z}d\mu(w),$$

em que $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. De seguida verificamos algumas propriedades do operador de Fock-Toeplitz, entre as quais uma que garante a continuidade dos operadores de Fock-Toeplitz com símbolo essencialmente limitado.

Proposição 2.1.3. *Sejam g e g_k funções essencialmente limitadas e λ_k números complexos, $k = 1, 2$. Então*

(a) $T_{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2} = \lambda_1 T_{g_1} + \lambda_2 T_{g_2}$;

(b) $\|T_g\| \leq \|g\|_\infty$;

(c) $T_g^* = T_{\overline{g}}$.

Demonstração. Da linearidade da projeção de Fock e da linearidade do operador M_g em relação ao seu símbolo obtemos *(a)*.

Seja $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Para provar a limitação do operador de Fock-Toeplitz, considere-se a seguinte desigualdade

$$\|T_g f\|_2 = \|PM_g f\|_2 \leq \|M_g f\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2.$$

Se $f, h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned} \langle T_g^* f, h \rangle &= \langle f, T_g h \rangle = \langle f, P(gh) \rangle = \langle f, gh \rangle \\ &= \langle f\overline{g}, h \rangle = \langle P(f\overline{g}), h \rangle = \langle T_{\overline{g}} f, h \rangle. \end{aligned}$$

Logo $T_g^* = T_{\overline{g}}$.

□

Seja $a \in \mathbb{C}$. O núcleo de Fock normalizado é designado por k_a e é dado por a formula

$$k_a(z) := \frac{\kappa_a(z)}{\|\kappa_a\|_2} = \frac{e^{\overline{a}z - \frac{|a|^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Seja φ_a a seguinte função essencialmente limitada

$$\varphi_a(z) := e^{\frac{|a|^2}{2} + 2iIm(\overline{a}z)}.$$

O operador de Fock-Toeplitz com símbolo φ_a é designado por operador de Weyl e designado por W_a, i.e.

$$W_a : \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}^2(\mathbb{C}), \quad W_a := T_{\varphi_a}. \tag{2.3}$$

Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, da desigualdade de Hölder segue que a função $\mathbb{C} \ni w \mapsto f(w)e^{\overline{a}w}$ pertence a $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e que

$$\begin{aligned} W_a f(z) &= T_{\varphi_a} f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\frac{|a|^2}{2} + 2iIm(\overline{a}w)} e^{\overline{w}z} d\mu(w) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\frac{|a|^2}{2} + (\overline{a}w)} e^{\overline{w}(z-a)} d\mu(w) \\ &= e^{\frac{|a|^2}{2} + \overline{a}(z-a)} f(z-a) = \sqrt{\pi} k_a(z) f(z-a), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

O cálculo anterior permite estender o operador de Weyl a $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, da seguinte forma

$$W_a : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \to L^2(\mathbb{C}, d\mu), \quad W_a f(w) = \sqrt{\pi} k_a(w) f(w-a).$$

O operador de Weyl tem norma unitária. De facto, se $f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, então

$$
\begin{aligned}
\|W_a f\|_2 &= \|\sqrt{\pi}k_a(z)f(z-a)\|_2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z-a)|^2 |e^{2\overline{a}z-\overline{a}a-\overline{z}z}| dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z-a)|^2 |e^{\overline{a}z-\overline{z}a}| e^{-|z-a|^2} dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z-a)|^2 |e^{iIm(2\overline{a}z)}| e^{-|z-a|^2} dA(z) = \|f\|_2.
\end{aligned}
$$

Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Por uma translação na variável de integração, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle W_a^* f, g\rangle &= \langle f, W_a g\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\sqrt{\pi}\overline{k_a}(z)\overline{g}(z-a)e^{-|z|^2} dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} f(z+a)e^{a(\overline{z+a})-\frac{|a|^2}{2}}\overline{g}(z)e^{-|z+a|^2} dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} f(z+a)e^{-\overline{a}z-\frac{|a|^2}{2}}\overline{g}(z)e^{-|z|^2} dA(z) = \langle \sqrt{\pi}k_{-a}(z)f(z+a), g(z)\rangle.
\end{aligned}
$$

Logo o operador de Weyl é unitário e o seu adjunto é dado por a seguinte expressão

$$
W_a^* f(z) = \sqrt{\pi}k_{-a}(z)f(z+a), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.4}
$$

Calcula-se o valor do operador de Weyl aplicado ao núcleo de Fock normalizado,

$$
\begin{aligned}
W_a k_\lambda &= \sqrt{\pi}k_a(z)k_\lambda(z-a) = e^{\overline{a}z-\frac{\overline{a}a}{2}}\frac{e^{\overline{\lambda}z-\overline{\lambda}a-\frac{\overline{\lambda}\lambda}{2}}}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{e^{\overline{\lambda+a}z}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{|a+\lambda|^2}{2}}e^{\frac{\overline{a}\lambda-\overline{\lambda}a}{2}} = k_{a+\lambda}(z)e^{iIm(\overline{a}\lambda)}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ essencialmente limitada. O operador de Fock-Hankel com símbolo g é definido por a seguinte expressão

$$
H_g : \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) \to L^2(\mathbb{C}, d\mu), \quad H_g := (I-P)M_g.
$$

Tal como para o operador de Fock-Toeplitz podem-se considerar operadores de Fock-Hankel com símbolos diferentes dos acimas propostos, no entanto, à semelhança do operadores de Fock-Toeplitz, limita-se o estudo aos símbolos essencialmente limitados.

Observa-se que, se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então $H_g f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})^\perp$ e

$$
M_g f = T_g f + H_g f.
$$

Proposição 2.1.4. *Sejam g e g_k funções essencialmente limitadas e λ_k complexos, $k = 1, 2$. Então,*

(a) $H_{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2} = \lambda_1 H_{g_1} + \lambda_2 H_{g_2}$;

(b) $\|H_g\| \leq \|g\|_\infty$;

(c) $H_g^* : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \to \mathbb{F}^2(\mathbb{C}), \quad H_g^* = PM_{\overline{g}}(I-P)$;

(d) $T_{g_1 g_2} - T_{g_1}T_{g_2} = (H_{\overline{g}_1})^* H_{g_2}$.

Demonstração. Da linearidade do operador de projeção, $I-P$, e da linearidade do operador de multiplicação em relação ao símbolo deduz-se *(a)*.

Seja $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. A limitação do operador de Fock-Hankel é imediata da seguinte desigualdade

$$
\|H_g f\|_2 = \|(I-P)M_g f\|_2 \leq \|M_g f\|_2 \leq \|g\|_\infty \|f\|_2.
$$

Se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $h \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, então

$$\langle f, H_g^* h \rangle = \langle (I-P)M_g f, h \rangle = \langle f, M_{\overline{g}}(I-P)h \rangle = \langle f, PM_{\overline{g}}(I-P)h \rangle.$$

Logo $H_g^* = PM_{\overline{g}}(I-P)$, o que termina a demonstração de *(c)*.

Por último observa-se que

$$\begin{aligned} T_{g_1 g_2} &= PM_{g_1 g_2} = PM_{g_1}(P + (I-P))M_{g_2} = PM_{g_1}PM_{g_2} + PM_{g_1}(I-P)M_{g_2} \\ &= T_{g_1}T_{g_2} + \left(H_{\overline{g}_1}\right)^* H_{g_2}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1.5. *$\mathbb{P}[z, \overline{z}]$ é denso em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$.*

Demonstração. Os espaços $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx) \otimes L^2(\mathbb{R}, e^{-y^2}dy)$ e $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ são isomorfos através do seguinte isomorfismo $f \otimes g \mapsto f(x)g(y)$, onde $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e $j, k \in \mathbb{N}_0$, observa-se que

$$x^j y^k = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^j \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^k,$$

$$z^j \overline{z}^k = (x+iy)^j (x-iy)^k.$$

O isomorfismo identifica o conjunto dos elementos da forma $f \otimes g$, onde f e g são polinómios na variável x e y, com os polinómios nas variáveis z e $\overline{z}$. Sabemos que o conjunto dos polinómios é denso em $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, [20, página 53]. Logo $\mathbb{P}[z, \overline{z}]$ é denso em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$.

□

Na próxima proposição prova-se que os operadores de Fock-Toeplitz com símbolos essencialmente limitados são univocamente definidos pelo seu símbolo, i.e. a seguinte aplicação é injetiva

$$g \mapsto T_g, \quad g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu).$$

Proposição 2.1.6. *Se $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então $T_g = 0$ se e só se $g = 0$ quase em toda a parte.*

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Se $g = 0$, então $T_g = 0$.

Se $T_g = 0$, então $\langle gz^k, z^j \rangle = 0$ para todo o j e k não negativos. Temos que $\langle gz^k, z^j \rangle = \langle g, \overline{z}^k z^j \rangle = 0$. Do Lema 2.1.5, sabemos que os polinómios $z^j \overline{z}^k$ são densos em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Então $g = 0$ em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ e $g = 0$ q.t.p..

□

No exemplo seguinte observa-se que os operadores de Fock-Hankel não gozam desta propriedade.

Exemplo 2.1.7. *Temos que $H_c = 0$, onde c designa a função constante igual a $c \in \mathbb{C}$.*

Num espaço de Banach E, designa-se o conjunto dos operadores lineares limitados de E para E por $\mathcal{L}(E)$ e o conjunto dos operadores lineares compactos de E para E por $\mathcal{K}(E)$. Convenciona-se que $\mathcal{K} := \mathcal{K}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$. designa-se o conjunto das funções essencialmente limitadas que decaem para zero no ponto infinito por V_∞, i.e.

$$V_\infty := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : \lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 \right\}.$$

O conjunto das funções essencialmente limitadas que são símbolos de operadores de Fock-Toeplitz compactos designa-se por $\mathfrak{B}$, i.e.

$$\mathfrak{B} := \{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : T_f \in \mathcal{K} \},$$

e o conjunto análogo dos operadores de Fock-Hankel por Γ, i.e.

$$\Gamma := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : H_f P \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{C}, d\mu)) \right\}.$$

O conjunto V_∞ é claramente fechado em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e invariante para a operação de conjugação. Da alínea (b) das Proposições 2.1.3 e 2.1.4 e do limite de operadores compactos ser um operador compacto temos que $\mathfrak{B}$ e Γ são fechados em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. A alínea *(c)* da Proposição 2.1.3 garante que B é invariante para a operação de conjugação.

Proposição 2.1.8. *A inclusão $V_\infty \subset \mathfrak{B}$ é válida.*

Demonstração. Provamos primeiro que os operadores de Toeplitz com símbolo funções mensuráveis de suporte compacto são operadores compactos. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ com suporte compacto e $e_k = z^k/(\pi k!)^{1/2}$, onde $k \in \mathbb{N}_0$, a base ortonormal do espaço de Fock, calculada na Proposição 1.2.5. Calculamos

$$\langle T_f e_k, e_j \rangle = \frac{1}{\pi (k!j!)^{1/2}} \int_{\mathbb{C}} f(z) z^k \overline{z}^j e^{-|z|^2} dA(z).$$

Como f é essencialmente limitada e tem suporte compacto existem constantes $M > 0$ e $a > 0$ tais que $f(z) = 0$ se $|z| \geq a$ e $|f(z)| \leq M$ q.t.p.. Então,

$$\begin{aligned} |\langle T_f e_k, e_j \rangle| &\leq \frac{M}{\pi (k!j!)^{1/2}} \int_{|z|<a} |z|^{k+j} e^{-|z|^2} dA(z) \\ &\leq \frac{2M}{(k!j!)^{1/2}} \int_0^a r^{k+j+1} e^{-r^2} r dr \leq \frac{2Ma^2 a^{k+j}}{(k!j!)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k,j} |\langle T_f e_k, e_j \rangle|^2 &\leq 4M^2 a^4 \sum_{k,j} \frac{(a^2)^k}{(k!)} \frac{(a^2)^j}{(j!)} \\ &\leq 4M^2 a^4 \left(\sum_k \frac{(a^2)^k}{(k!)} \right)^2 = 4M^2 a^4 e^{2a^2}. \end{aligned}$$

Logo T_f é um operador de Hilbert-Schmidt e portanto é compacto. As funções de suporte compacto são densas em V_∞ na norma uniforme. Como $\mathfrak{B}$ é fechado, então temos que $V_\infty \subset \mathfrak{B}$.

□

2.2 Transformada de Berezin

A transformada de Berezin pode ser útil para estudar operadores em espaços de Hilbert com núcleo reprodutor. Nesta secção estudamos algumas das suas propriedades.

A transformada de Berezin de um operador linear limitado A em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ é definido por a seguinte fórmula

$$\tilde{A} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \tilde{A}(a) := \langle A k_a, k_a \rangle, \tag{2.6}$$

onde k_a é o núcleo de Fock normalizado, definido em (2.2). Provamos de seguida algumas propriedades da transformada de Berezin.

Proposição 2.2.1. *Sejam $A, A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$ e λ_k números complexos, onde $k = 1, 2$. Temos que*

(a) $\tilde{A} \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$;

(b) $\|\tilde{A}\|_\infty \leq \|A\|$;

(c) Se $B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, então $\tilde{B} = \lambda_1 \tilde{A}_1 + \lambda_2 \tilde{A}_2$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$. Se $a \in \mathbb{C}$, então

$$|\tilde{A}(a)| = |\langle Ak_a, k_a\rangle| \leq \|Ak_a\|_2\|k_a\|_2 \leq \|A\|.$$

Sejam $A_k \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$ e λ_k números complexos, onde $k = 1, 2$. A demonstração de *(c)* é imediata tendo em conta o seguinte

$$\langle(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)k_a, k_a\rangle = \lambda_1\langle A_1 k_a, k_a\rangle + \lambda_2\langle A_2 k_a, k_a\rangle.$$

□

O conjunto dos números reais é designado por $\mathbb{R}$. Para provar a injetividade da transformada de Berezin mostra-se primeiro o seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.2.2. *Seja $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $\mathbb{C}^2$. Se $h(z, \overline{z}) = 0$ qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, então $h = 0$.*

Demonstração. Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Da analiticidade de h temos que $h(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(z, w)$, onde h_m são polinómios homogéneos de grau m e $z, w \in \mathbb{C}$. Considere-se a seguinte função de variável real

$$\varphi(t) = h(tz, \overline{tz}) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(tz, t\overline{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(z, \overline{z})t^m.$$

Se $h(z, \overline{z}) = 0$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, então $\varphi(t) = 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Da analiticidade de φ temos que $h_m(z, \overline{z}) = 0$. Então é suficiente provar a proposição para polinómios homogenios. Se h é um polinómio homogéneo de grau $m \in \mathbb{N}_0$, então existem únicas constantes $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, ..., m$, tal que $h(z, w) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k w^{m-k}$, em que $z, w \in \mathbb{C}$. Se $h(z, \overline{z}) = 0$ e $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, então

$$\sum_{k=0}^{m} a_k e^{2ki\theta} = 0.$$

Como as funções $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto (e^{i\theta})^k$, onde $k = 0, 1, ..., m$, são ortogonais em $L^2([0, 2\pi], d\theta)$, consultar [13, Exemplo 4.3]. Então temos que $a_k = 0$, para todo o $k = 0, 1, ...m$. Logo $h = 0$. □

Proposição 2.2.3. *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$. Temos que $A = 0$ se e só se $\tilde{A} = 0$.*

Demonstração. Se $A = 0$ é evidente que $\tilde{A} = 0$. Suponha-se que $\tilde{A} = 0$ e considere-se a função $h_A(z, w) = \langle Ak_{\overline{w}}, k_z\rangle$, em que $z, w \in \mathbb{C}$. Temos que

$$h_A(z, w) = \langle Ak_{\overline{w}}, k_z\rangle = \int_{\mathbb{C}} Ak_{\overline{w}}(a)k_a(z)d\mu(a), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Logo a função $h_A(z, w)$ é analítica na variável z. Observamos que

$$h_A(z, w) = \overline{\langle A^* k_z, k_{\overline{w}}\rangle} = \overline{h_A(\overline{w}, \overline{z})}.$$

Como uma função $g(w)$ é analítica se e só se $\overline{g(\overline{w})}$ é analítica, então $h_A(z, w)$ é analítica na variável w. Consequentemente, h_A é analítica em $\mathbb{C}^2$. Como $h_A(z, \overline{z}) = 0$, aplicamos o Lema 2.2.2 e temos que $Ak_w = 0$, para todo o $w \in \mathbb{C}$. Da Proposição 1.2.1, sabemos que a expansão linear de k_w, com $w \in \mathbb{C}$, é densa em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Logo $A = 0$.

□

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. A transformada de Berezin de uma função f é a transformada de Berezin do operador de Fock-Toeplitz com símbolo f, i.e.

$$\tilde{f}(a) := \tilde{T}_f(a).$$

Da definição da transformada de Berezin (consultar (2.6)) e do núcleo normalizado de Fock (consultar (2.2)) temos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a) &= \langle T_f k_a, k_a\rangle = \langle f k_a, k_a\rangle \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)e^{\overline{a}z+\overline{z}a-|a|^2}e^{-|z|^2}dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)e^{-|z-a|^2}dA(z).\end{aligned}$$

Como foi provado na Proposição 2.2.1, temos que a transformada de Berezin de uma função essencialmente limitada é também essencialmente limitada. Podemos então considerar a m-ésima transformada de Berezin da função f, designada por $\tilde{f}^{(m)}$ i.e.

$$\tilde{f}^{(1)} := \tilde{f}(a) \quad \text{e} \quad \tilde{f}^{(m)} := \widetilde{\tilde{f}^{(m-1)}}, \quad m = 2, 3... .$$

Seja a equação do calor com condição inicial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad u(x, y, 0) = f(x + iy), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Tal como pode ser consultado em [21], a equação do calor tem a seguinte solução única

$$u_f(x, y, t) := \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}^2} f(a + ib)e^{-\frac{|a-x|^2+|b-y|^2}{4t}}dadb, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Por a unicidade da solução da equação do calor, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\tilde{f}^{(m)}(x + iy) = u_{\tilde{f}^{(m-1)}}(x, y, \frac{1}{4}) = u_f(x, y, \frac{m}{4}), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Lema 2.2.4. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\tilde{f}^{(m)}(a) - \tilde{f}^{(m)}(b)| \leq C\|f\|_\infty m^{-1/2}|a - b|,$$

para todo o $m \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Sejam $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Primeiro prova-se o lema para $m = 1$. Temos que

$$|\tilde{f}(a) - \tilde{f}(b)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)||e^{-|z-a|^2} - e^{-|z-b|^2}|dA(z).$$

Por a mudança de variáveis de z para $z + (a + b)/2$ e escrevendo $c = (a - b)/2$, temos que

$$|\tilde{f}(a) - \tilde{f}(b)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |e^{-|z-c|^2} - e^{-|z+c|^2}|dA(z).$$

Usando a mudança de variáveis de z para $zc/|c|$, temos que

$$\int_{\mathbb{C}} |e^{-|z-c|^2} - e^{-|z+c|^2}|dA(z) = \int_{\mathbb{C}} |e^{-|z-|c||^2} - e^{-|z+|c||^2}|dA(z).$$

Observando que a função $h(z) = e^{-|z-|c||^2} - e^{-|z+|c||^2}$ é uma função impar e $h(z) \geq 0$ se e só se $Re(z) \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |e^{-|z-|c||^2} - e^{-|z+|c||^2}|dA(z) &= 2\int\limits_{Re(z)\geq 0} e^{-|z-|c||^2} - e^{-|z+|c||^2}dA(z)\\ &= 2\left(\int\limits_{Re(z)\geq 0} e^{-|z-|c||^2}dA(z) - \int\limits_{Re(z)\leq 0} e^{-|z-|c||^2}dA(z)\right).\end{aligned}$$

Analisando o valor da função $e^{-|z-|c||^2}$ em bolas centradas em $|c|$ é fácil estabelecer que

$$\begin{aligned}\int\limits_{Re(z)\geq 0} e^{-|z-|c||^2}dA(z) - \int\limits_{Re(z)\leq 0} e^{-|z-|c||^2}dA(z) &= \int\limits_{0\leq Re(z)\leq 2|c|} e^{-|z-|c||^2}dA(z)\\ &= \int\limits_{-|c|\leq Re(z)\leq |c|} e^{-|z|^2}dA(z).\end{aligned}$$

Calculando em coordenadas cartesianas, temos que

$$\begin{aligned}\int\limits_{-|c|\leq Re(z)\leq |c|} e^{-|z|^2}dA(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-|c|}^{+|c|} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy\int_{-|c|}^{+|c|} e^{-x^2}dx\\ &\leq \sqrt{\pi}2|c| = \sqrt{\pi}|a-b|.\end{aligned}$$

Seja $C = 2/\sqrt{\pi}$. Como enunciado para $m = 1$, temos que

$$|\tilde{f}(a) - \tilde{f}(b)| \leq C\|f\|_\infty |a-b|.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$. De (2.7), observa-se que para todo o $a \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(m)}(a) &= u_f\left(Re(a), Im(a), \frac{m}{4}\right) = \frac{1}{\pi m}\int_{\mathbb{C}} f(z)e^{-\frac{|z-a|^2}{m}}dA(z)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z\sqrt{m})e^{-|z-\frac{a}{\sqrt{m}}|^2}dA(z).\end{aligned}$$

Escrevendo $g(z) = f(z\sqrt{m})$, em que $z \in \mathbb{C}$, temos que $\tilde{f}^{(m)}(a) = \tilde{g}(a/\sqrt{m})$, em que $a \in \mathbb{C}$ e $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. Logo

$$|\tilde{f}^{(m)}(a) - \tilde{f}^{(m)}(b)| = |\tilde{g}\left(\frac{a}{\sqrt{m}}\right) - \tilde{g}\left(\frac{b}{\sqrt{m}}\right)| \leq C\|f\|_\infty m^{-1/2}|a-b|, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

□

Observa-se, de seguida, que k_a converge fracamente para 0, quando $|a| \to +\infty$. Isto permite, em particular, encontrar uma condição necessária do símbolo f tal que o operador de Fock-Toeplitz T_f seja compacto.

Proposição 2.2.5. *Se* $|a| \to \infty$, *então* $k_a \rightharpoonup 0$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{C}$. Se $k \in \mathbb{N}_0$, então

$$\langle k_a, z^k\rangle = \overline{\langle z^k, \frac{e^{\overline{a}z}}{\sqrt{\pi}}\rangle} e^{-\frac{|a|^2}{2}} = \sqrt{\pi}\overline{a}^k e^{-\frac{|a|^2}{2}}.$$

Sabemos que $\sqrt{\pi}\overline{a}^k e^{-\frac{|a|^2}{2}} \to 0$, quando $|a| \to +\infty$. Da densidade dos polinómios em $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, temos que se $f \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então $\langle k_a, f\rangle \to 0$, quando $|a| \to +\infty$. Do Teorema de representação de Riesz, temos que $k_a \rightharpoonup 0$, quando $|a| \to +\infty$. □

designa-se por BC o conjunto das funções contínuas limitadas e por C_0 o conjunto das funções contínuas que decaem para zero, i.e.

$$C_0 := BC \cap V_\infty.$$

É direto da definição de BC e C_0 que ambos são fechados em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e são invariantes para a operação de conjugação.

Proposição 2.2.6. *Se $f \in \mathfrak{B}$, então $\tilde{f} \in C_0$.*

Demonstração. Do Lema 2.2.4 sabemos que $\tilde{f}$ é contínua. Seja $f \in \mathfrak{B}$. Como k_a converge fracamente para 0 quando $|a| \to +\infty$, então $T_f k_a$ converge fortemente para 0, quando $|a| \to +\infty$, porque T_f é compacto. Se $a \in \mathbb{C}$, então

$$|\tilde{f}(a)| = |\frac{1}{\pi}\langle T_f k_a, k_a\rangle| \leq \frac{1}{\pi}\|T_f k_a\|.$$

De $T_f k_a$ convergir fortemente para 0, temos que $|\tilde{f}(a)| \to 0$, quando $a \to \infty$. Logo $\tilde{f} \in C_0$.

□

Seja ν uma medida $\sigma-$finita em X e H um espaço de Hilbert. Se $g(x) \in \mathcal{L}(H)$, para todo o $x \in X$, então diz-se que o operador linear da forma

$$G = \int_X g(x) d\nu(x),$$

está definido fracamente se

$$\int_X \|g(x)\| d\nu(x) < \infty, \tag{2.8}$$

e é definido por o único operador tal que para todo o $u, v \in H$ satisfaz a equação

$$\langle Gu, v\rangle = \int_X \langle g(x)u, v\rangle d\nu(x). \tag{2.9}$$

Para provar a existência e unicidade do operador linear limitado G definido por (2.9), o Teorema da representação de Riesz garante que é suficiente mostrar que o integral no lado direito de (2.9) é uma forma sesquilinear (i.e. ser um funcional linear na primeira variável e ser um funcional conjugado linear na segunda variável) limitada. Se $v \in H$, então

$$\int_X \langle g(x)\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_1, v\rangle d\nu(x) = \lambda_1 \int_X \langle g(x)u_1, v\rangle d\nu(x) + \lambda_2 \int_X \langle g(x)u_2, v\rangle d\nu(x),$$

para todo o $u_k \in H$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$, onde $k = 1, 2$. Se $u \in H$, então

$$\int_X \langle g(x)u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle d\nu(x) = \overline{\lambda_1} \int_X \langle g(x)u, v_1\rangle d\nu(x) + \overline{\lambda_2} \int_X \langle g(x)u, v_2\rangle d\nu(x),$$

para todo o $v_k \in H$ e $\lambda_k \in \mathbb{C}$, onde $k = 1, 2$. Ademais, se $u, v \in H$, então

$$\left|\int_X \langle g(x)u, v\rangle d\nu(x)\right| \leq \int_X \|g(x)\| d\nu(x)\|u\|\|v\|.$$

Se $A \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{C}, d\mu))$ ou $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$, definimos fracamente o operador

$$\hat{A} : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \to L^2(\mathbb{C}, d\mu), \quad \hat{A} := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* A W_a d\mu(a)$$

ou

$$\hat{A} : \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}^2(\mathbb{C}), \quad \hat{A} := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* A W_a d\mu(a),$$

respetivamente. Na proposição seguinte obtemos a relação entre o operador $\hat{A}$ e o operador de Fock-Toeplitz com símbolo $\tilde{A}$.

Proposição 2.2.7. *Se* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$, *então* $\hat{A} = T_{\tilde{A}}$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2(\mathbb{C}))$. Provamos que $\tilde{\hat{A}} = \widetilde{T_{\tilde{A}}}$ e utilizando a injetividade da transformada de Berezin terminamos a demonstração. Por o Teorema de Fubini e (2.5), temos para todo o $\lambda \in \mathbb{C}$ que

$$\begin{aligned}
\widetilde{T_{\tilde{A}}}(\lambda) &= \langle T_{\tilde{A}} k_\lambda, k_\lambda \rangle = \langle \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle A k_\alpha, k_\alpha \rangle k_\lambda(\alpha) e^{\overline{\alpha} z} d\mu(\alpha), k_\lambda(z) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle A k_\alpha, k_\alpha \rangle k_\lambda(\alpha) \langle \frac{e^{\overline{\alpha} z}}{\pi}, k_\lambda(z) \rangle d\mu(\alpha) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle A k_\alpha, k_\alpha \rangle k_\lambda(\alpha) \overline{k_\lambda(\alpha)} d\mu(\alpha) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle A k_\alpha, k_\alpha \rangle e^{-|\alpha - \lambda|^2} dA(\alpha) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle A k_{\alpha+\lambda}, k_{\alpha+\lambda} \rangle d\mu(\alpha) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle A W_\alpha k_\lambda, W_\alpha k_\lambda \rangle d\mu(\alpha) \\
&= \langle \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_\alpha^* A W_\alpha k_\lambda d\mu(\alpha), k_\lambda \rangle = \langle \hat{A} k_\lambda, k_\lambda \rangle = \tilde{\hat{A}}(\lambda).
\end{aligned}$$

Por a observação inicial, concluímos que

$$T_{\tilde{A}} = \hat{A}.$$

□

Corolário 2.2.8. *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, *então* $\hat{T}_f = T_{\tilde{f}}$.

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Por a Proposição 2.2.7, temos que $\hat{T}_f = T_{\tilde{T}_f} = T_{\tilde{f}}$. □

Existe um análogo ao Corolário 2.2.8 correspondente ao operador de multiplicação.

Proposição 2.2.9. *Se* $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, *então* $\hat{M}_f = M_{\tilde{f}}$.

Demonstração. Sejam $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $g \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Por (2.4), temos que

$$\hat{M}_f g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* M_f W_a g(z) d\mu(a) = \int_{\mathbb{C}} k_{-a}(z) f(z+a) k_a(z+a) g(z) d\mu(a), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Usando uma translação na variável de integração, temos que

$$\hat{M}_f g(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(a) e^{-|a-z|^2} dA(a) g(z) = \tilde{f}(z) g(z).$$

Logo $\hat{M}_f = M_{\tilde{f}}$.

□

O operador de Fock-Hankel respeita uma igualdade semelhante à igualdade verificada nas proposições anteriores para o operador de Fock-Toeplitz e de multiplicação.

Corolário 2.2.10. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então $\widehat{H_f P} = H_{\tilde{f}} P$.*

Demonstração. Seja $g \in L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Primeiro verificamos que $W_a P = P W_a$ em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$,

$$PW_a g(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} k_a(z) g(z-a) e^{\overline{z} w} d\mu(z), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Por mudança de variáveis, temos que

$$\begin{aligned} PW_a g(w) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} g(z) k_a(z+a) e^{(\overline{z+a})w} e^{-|z+a|^2} dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(z) e^{\overline{z}(w-a)} d\mu(z) e^{\overline{a}w - |a|^2/2} \\ &= \sqrt{\pi} k_a(w) Pg(w-a) = W_a P g(w), \quad w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então por o cálculo anterior

$$\begin{aligned} \widehat{H_f P} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* (I-P) M_f P W_a d\mu(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* M_f W_a P d\mu(a) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} W_a^* P M_f W_a P d\mu(a) \\ &= \hat{M}_f P - \hat{T}_f P. \end{aligned}$$

Por o Corolário 2.2.8 e a Proposição 2.2.9 temos, como pretendido, que

$$\widehat{H_f P} = \hat{M}_f P - \hat{T}_f P = (M_{\tilde{f}} - T_{\tilde{f}}) P = H_{\tilde{f}} P.$$

□

Seja o operador unitário $U : L^2(\mathbb{C}, d\mu) \to L^2(\mathbb{C}, dA)$ dado por

$$Uf(z) := f(z) e^{-\frac{|z|^2}{2}}, \quad f \in L^2(\mathbb{C}, d\mu).$$

Este operador será útil, particularmente, através das igualdades provados no próximo lema.

Lema 2.2.11. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Se $b \in L^2(\mathbb{C}, dA)$, então*

$$U[M_f, P] U^* b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (f(z) - f(w)) e^{-\frac{|z-w|^2}{2} + iIm(\overline{w}z)} b(w) dA(w), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$UPM_f PU^* b(z) = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} b(w) e^{-\frac{|z-w|^2}{4}} \int_{\mathbb{C}} f(u) e^{-|u - \frac{w+z}{2}|^2 + iIm(\overline{u}(z-w))} dA(u) dA(w), \quad z \in \mathbb{C}$$

Demonstração. O operador adjunto de U é dado por

$$U^* b(z) = b(z) e^{\frac{|z|^2}{2}}, \quad b \in L^2(\mathbb{C}, dA).$$

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $b \in L^2(\mathbb{C}, dA)$. Se $z \in \mathbb{C}$, então

$$U[M_f, P] U^* b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (f(z) - f(w)) e^{\overline{z}z} e^{-\frac{|w|^2}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{2}} b(w) dA(w).$$

Da igualdade $2iIm(\overline{w}z) = \overline{w}z - \overline{z}w$ obtemos a primeira fórmula do enunciado. Para obter a segunda igualdade observamos que, se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $b \in L^2(\mathbb{C}, dA)$, então

$$UPM_fPU^*b(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(u)\int_{\mathbb{C}} b(w)e^{-\frac{|w|^2}{2}}e^{\overline{w}u}dA(w)e^{\overline{u}z}e^{-|u|^2}e^{-\frac{|z|^2}{2}}dA(u), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Para $u, z, w \in \mathbb{C}$ temos que

$$-\frac{|w|^2}{2} + \overline{w}u + \overline{u}z - |u|^2 - \frac{|z|^2}{2} = -|u - \frac{w+z}{2}|^2 - \frac{|z-w|^2}{4} + iIm(\overline{u}(z-w)).$$

Utilizando o Teorema de Fubini e a observação anterior temos que

$$UPM_fPU^*b(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} b(w)e^{-\frac{|z-w|^2}{4}}\int_{\mathbb{C}} f(u)e^{-|u-\frac{w+z}{2}|^2 + iIm(\overline{u}(z-w))}dA(u)dA(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

□

Seja $a \in L^1(\mathbb{C}, dA)$. Define-se a convolução de a com $b \in L^2(\mathbb{C}, dA)$ por a seguinte expressão

$$a * b(z) = \int_{\mathbb{C}} a(z-w)b(w)dA(w), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

Da desigualdade integral de Minkowski temos que $\|a * b\|_2 \leq \|a\|_1\|b\|_2$.

Proposição 2.2.12. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então*

$$\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|T_f\| \leq 2\|\widetilde{|f|}\|_\infty.$$

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Da definição da transformada de Berezin de f, temos que

$$|\tilde{f}(a)| = |\tilde{T}_f(a)| = |\langle T_f k_a, k_a\rangle| \leq \|T_f\|, \quad a \in \mathbb{C}$$

Do Lema 2.2.11, se $b \in L^2(\mathbb{C}, dA)$, então

$$UPM_fPU^*b(z) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} b(w)e^{-\frac{|z-w|^2}{4}}\int_{\mathbb{C}} f(u)e^{-|u-\frac{w+z}{2}|^2 + iIm(\overline{u}(z-w))}dA(u)dA(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aplicando o módulo à igualdade anterior obtemos a seguinte desigualdade

$$|UPM_fPU^*b(z)| \leq \int_{\mathbb{C}} |b(w)|\frac{e^{-\frac{|z-w|^2}{4}}}{\pi}dA(w)\|\widetilde{|f|}\|_\infty, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.11}$$

Seja $a(z) = e^{-|z|^2/4}/\pi$, em que $z \in \mathbb{C}$. Temos que $a \in L^1(\mathbb{C}, dA)$ e

$$\|a\|_1 = \int_{\mathbb{C}} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4}}}{\pi}dA(z) = 2.$$

De (2.11), notamos que

$$|UPM_fPU^*b(z)| \leq |\widetilde{|f|}\|_\infty |b| * a(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Logo, para todo o $g \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, temos que

$$\|T_f g\|_2 = \|PM_fPg\|_2 \leq \|\widetilde{|f|}\|_\infty\||Ug| * a\|_2 \leq 2\|\widetilde{|f|}\|_\infty\|g\|_2.$$

$\square$

2.3 Semi comutador compacto

Nesta secção estudamos qual a maior classe de funções em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que o semi comutador de Fock-Toeplitz $T_fT_g - T_{gf}$ é compacto. Introduz-se o conjunto Q formado por as funções f essencialmente limitadas tais que H_f e $H_{\overline{f}}$ são operadores compactos, i.e.

$$Q := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : H_f, H_{\overline{f}} \in \mathcal{K} \right\} = \Gamma \cap \Gamma^*,$$

onde $\Gamma^* := \left\{ \overline{f} : f \in \Gamma \right\}$. Na próxima proposição mostra-se que Q é o maior subconjunto, na relação de ordem de inclusão de conjuntos em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que o semi comutador de Fock-Toeplitz $T_fT_g - T_{gf} \in \mathcal{K}$, para todo o $f, g \in Q$.

Proposição 2.3.1. *Se $f \in Q$, então $T_fT_g - T_{fg}$ e $T_gT_f - T_{gf}$ são operadores compactos para todo o $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Q é o maior subconjunto fechado de $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que se $f, g \in Q$, então $T_fT_g - T_{gf} \in \mathcal{K}$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Da alínea *(d)* da Proposição 2.1.4 temos que

$$T_fT_g - T_{fg} = -(H_{\overline{f}})^* H_g \quad \text{ e } \quad T_gT_f - T_{gf} = (H_{\overline{g}})^* H_f.$$

Se $f \in Q$, então $T_fT_g - T_{gf} \in \mathcal{K}$ e $T_gT_f - T_{gf} \in \mathcal{K}$, porque $H_{\overline{f}} \in \mathcal{K}$ e $H_f \in \mathcal{K}$, respetivamente.

Seja f_n uma sucessão em Q que converge em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ para f. Da Proposição 2.1.1 temos que

$$\|H_f - H_{f_n}\| = \|(I - P)M_f - (I - P)M_{f_n}\| \leq \|f - f_n\|_\infty.$$

Da compacidade de H_{f_n} e da convergência da sucessão considerada, temos que H_f é compacto. De forma idêntica temos que $H_{\overline{f}}$ é compacto. Logo Q é um subconjunto fechado.

Para verificar que Q é o maior subconjunto de $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que $T_fT_g - T_{gf}$ é compacto para qualquer $f, g \in Q$. Nota-se que se $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então

$$T_{g\overline{g}} - T_gT_{\overline{g}} = -(H_g)^* H_g \quad \text{ e } \quad T_{\overline{g}g} - T_{\overline{g}}T_g = -(H_{\overline{g}})^* H_{\overline{g}}.$$

Logo $T_{g\overline{g}} - T_gT_{\overline{g}}$ e $T_{\overline{g}g} - T_{\overline{g}}T_g$ são compactos se e só se $g \in Q$. $\square$

O comutador de dois operadores lineares A e B num espaço de Hilbert é o operador linear dado por a seguinte formula

$$[A, B] := AB - BA.$$

Na próxima proposição encontra-se uma condição necessária e suficiente para uma função pertencer a Q.

Proposição 2.3.2. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então $f \in Q$ se e só se $[M_f, P] \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{C}, d\mu))$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. A seguinte igualdade é válida em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$[M_f, P] = (I - P)M_fP - PM_f(I - P) = H_fP - (H_{\overline{f}})^*.$$

Se $f \in \Gamma$ e $\overline{f} \in \Gamma$, então $[M_f, P]$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Se $[M_f, P]$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, então as restrições de $[M_f, P]$ a $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ e a $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})^\perp$ são operadores compactos. Observamos que $[M_f, P]\,P = H_fP$ e $[M_f, P]\,(I - P) = (H_{\overline{f}})^*$. Logo, $[M_f, P]$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$ se e só se $f \in \Gamma$ e $\overline{f} \in \Gamma$, i.e $f \in Q$. $\square$

Seja ESV a classe de funções essencialmente limitadas tais que a oscilação em bolas de raio 1 tende para 0 quando o centro da bola vai para o infinito, i.e.

$$ESV := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : \lim_{r\to+\infty} \sup_{\substack{|z-w|\le 1 \\ |z|\ge r}} |f(z) - f(w)| = 0 \right\}.$$

As funções de ESV dizem-se funções com oscilação nula no infinito. Da definição de ESV é imediato que ESV é invariante para a operação de conjugação. De seguida, prova-se que ESV também é fechado em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Para tal prova-se que se $\{f_n\} \subset ESV$ é uma sucessão tal que $f_n \to f$ em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então f está em ESV.

Seja $\{f_n\} \subset ESV$ tal que $f_n \to f$ em $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Da convergência uniforme, se $\epsilon > 0$, então existe N tal que se $n \ge N$, temos que

$$\sup_{\substack{|z-w|\le 1 \\ |z|\ge r}} |f(z) - f(w)| \le \sup_{\substack{|z-w|\le 1 \\ |z|\ge r}} |f_n(z) - f_n(w)| + \epsilon, \quad r > 0.$$

Como $f_n \in ESV$, existe $R > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{|z-w|\le 1 \\ |z|\ge R}} |f(z) - f(w)| \le 2\epsilon.$$

Da arbitrariedade de ϵ temos que $f \in ESV$.

De seguida estudam-se diferentes classes de funções (homogéneas, com limite no infinito e radiais) relativamente a sua inclusão em ESV. Diz-se que $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função homogénea, se existe $g_\theta : S^1 \to \mathbb{C}$, onde S^1 é a circunferência unitária, tal que

$$g(z) = g_\theta\left(\frac{z}{|z|}\right), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

A função g_θ denomina-se por componente homogénea de g.

Proposição 2.3.3. *Seja $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ uma função homogénea, com componente homogénea g_θ. Então $g \in ESV$ se e só se g_θ é contínua.*

Demonstração. Seja $g \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ uma função homogénea e g_θ a sua componente homogénea. Se $|z - w| \le 1$, então

$$\left|\frac{z}{|z|} - \frac{w}{|z|}\right| \le \frac{1}{|z|} \quad \text{e} \quad \left|\frac{w}{|z|} - \frac{w}{|w|}\right| \le \frac{|w|||w| - |z||}{|w||z|} \le \frac{1}{|z|}.$$

Combinando as duas expressões anteriores obtemos que

$$\left|\frac{z}{|z|} - \frac{w}{|w|}\right| \le \frac{2}{|z|}. \tag{2.12}$$

Se g_θ é contínua, então

$$\lim_{r\to+\infty} \sup_{\substack{|z-w|\le 1 \\ |z|\ge r}} |g(z) - g(w)| \le \lim_{r\to+\infty} \sup_{\substack{|z-w|\le 2/r \\ z,w\in S^1}} |g_\theta(z) - g_\theta(w)| = 0.$$

Logo $g \in ESV$. Se g_θ não é contínua em $z \in S^1$, então existe uma sucessão $z_n \in S^1$ convergente para z tal que $f(z_n)$ não converge para $f(z)$. Por a convergência de z_n, para todo o $r > 0$, existe N tal que se $j > N$, então $rz_j \in B_1(rz)$. Temos que

$$\sup_{j>N} |g(rz) - g(rz_j)| = \sup_{j>N} |g_\theta(z) - g_\theta(z_j)| > 0.$$

Logo $g \notin ESV$. $\square$

Diz-se que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem limite no infinito, se existe $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(\infty) := \lim_{|z| \to +\infty} f(z) = c.$$

Proposição 2.3.4. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Se f tem limite no infinito, então $f \in ESV$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ tal que $f(\infty) = c \in \mathbb{C}$. Se $\epsilon > 0$, então existe $R > 0$ tal que, se $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > R$, então $|f(z) - c| \leq \epsilon$. Da desigualdade triangular temos que

$$\sup_{\substack{|z-w| \leq 1 \\ |z| \geq R+1}} |f(z) - f(w)| \leq 2\epsilon.$$

Da arbitrariedade de ϵ, temos que $f \in ESV$. $\square$

O seguinte exemplo é uma consequência imediata da Proposição 2.3.4.

Exemplo 2.3.5. $\{V_\infty + \lambda : \lambda \in \mathbb{C}\} \subset ESV$.

Diz-se que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é radial, se existe $f_r : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, onde $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, tal que

$$f(z) = f_r(|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

A função f_r diz-se a componente radial de f. Na seguinte proposição é dada uma condição necessária e suficiente para a classe das funções radiais diferenciáveis pertencer a ESV.

Proposição 2.3.6. *Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ uma função radial tal que a componente radial f_r é continuamente diferenciável e $f_r'(\infty)$ existe. Então $f \in ESV$ se e só se $f_r'(\infty) = 0$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ uma função radial tal que a componente radial f_r é continuamente diferenciável. Por o Teorema de Lagrange, se $z, w \in \mathbb{C}$ são tais que $|z - w| \leq 1$, então

$$|f(z) - f(w)| = |f_r(|z|) - f_r(|w|)| = |f_r'(\xi(z, w))| ||z| - |w||,$$

onde $\xi(z, w)$ é tal que $|z| - 1 < |\xi(z, w)| < |z| + 1$. Se $f \in ESV$, então

$$0 = \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{|z-w| \leq 1 \\ |z| \geq r}} |f(z) - f(w)| = \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{|z-w| \leq 1 \\ |z| \geq r}} |f_r'(\xi(z, w))| ||z| - |w||.$$

Temos que $|\xi(z, w)| \to +\infty$, quando $|z| \to \infty$. Então, da continuidade de f_r', temos que $f_r'(\infty) = 0$.
Se $f_r'(\infty) = 0$, então

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{|z-w| \leq 1 \\ |z| \geq r}} |f(z) - f(w)| \leq \lim_{r \to +\infty} \sup_{\substack{|z-w| \leq 1 \\ |z| \geq r}} |f_r'(\xi(z, w))| = 0.$$

Logo $f \in ESV$. $\square$

Da proposição anterior, temos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.7. *Se $\alpha < 1$, então $e^{i|z|^\alpha} \in ESV$.*

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Diferenciando a função $[0, +\infty[\ni r \mapsto e^{ir^\alpha}$, temos que

$$(e^{ir^\alpha})' = \alpha r^{\alpha-1} e^{ir^\alpha}, \quad r \in \mathbb{R}_0^+.$$

Se $\alpha < 1$, então

$$(e^{ir^\alpha})' \to 0,$$

quando $r \to \infty$. Usando a Proposição 2.3.6, temos que se $\alpha < 1$, então $e^{i|z|^\alpha} \in ESV$.

A classe das funções fracamente oscilantes no infinito é designada por $SO(\mathbb{R}_0^+)$ e é constituída por as funções $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{r \to +\infty} \sup_{x,y \in [r,2r]} |f(x) - f(y)| = 0.$$

No seguinte exemplo provamos que esta classe está em ESV, mas não esgota a classe das funções radiais que estão em ESV.

Exemplo 2.3.8. *Identificando cada elemento f_r de $SO(\mathbb{R}_0^+)$ com a seguinte função radial complexa $f(z) = f_r(|z|)$, temos que $f \in ESV$. No entanto $e^{i\sqrt{r}} \notin SO(\mathbb{R}_0^+)$.*

Para provar que as funções induzidas de $SO(\mathbb{R}_0^+)$ estão em ESV, basta notar que se $|z| \geq 3$, então $\overline{B_1(z)} \subset A_{|z|-1}^{2(|z|-1)}$. De seguida verifica-se que $e^{i\sqrt{r}}$ não pertence a $SO(\mathbb{R}_0^+)$. Seja $r = r'^2$, com $r' > 0$, temos que

$$|e^{ir'} - e^{ir'\sqrt{2}}| = |1 - e^{ir'(\sqrt{2}-1)}|.$$

Para todo o $0 < \delta < 2$ e $M > 0$, existe $r' > M$ tal que

$$|1 - e^{ir'(\sqrt{2}-1)}| > \delta.$$

Logo $e^{i\sqrt{r}} \notin SO(\mathbb{R}_0^+)$.

Lema 2.3.9. *Se $f \in ESV$, então $f - \tilde{f} \in V_\infty$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Temos que

$$f(a) - \tilde{f}(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (f(a) - f(z)) e^{-|z-a|^2} dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (f(a) - f(z+a)) e^{-|z|^2} dA(z), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Da seguinte igualdade

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-|z|^2} dA(z) = \pi,$$

sabemos que para qualquer que seja $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq N} |f(a) - f(z+a)| e^{-|z|^2} dA(z) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi} \int_{|z| \geq N} e^{-|z|^2} dA(z) < \epsilon, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Da desigualdade anterior, concluímos que

$$|f(a) - \tilde{f}(a)| \leq \epsilon + \frac{1}{\pi} \int_{|z| < N} |f(a) - f(z+a)| e^{-|z|^2} dA(z), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Se $f \in ESV$, então existe $R > 0$ tal que para todo o $|a| > R$, temos que $|f(a) - f(z+a)| < \epsilon$, quando $|z| < N$. Logo $|f(a) - \tilde{f}(a)| \leq 2\epsilon$, para todo o $|a| > R$. Da arbitrariedade de ϵ, temos que $f - \tilde{f} \in V_\infty$

□

Define-se o conjunto

$$\Lambda(\epsilon) := \{f \in BC : |f(a) - f(b)| \leq \epsilon |a-b|\}, \quad \epsilon > 0.$$

Na proposição que se segue são dadas condições necessárias e suficientes para uma função pertencer a ESV.

Teorema 2.3.10. *As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $f \in ESV$,

(b) $f - \tilde{f} \in V_\infty$,

(c) $f - \tilde{f}^{(m)} \in V_\infty$, *para todo* $m = 1, 2, ...,$

(d) $f \in \bigcap_{\epsilon > 0} (\Lambda(\epsilon)) + V_\infty$.

Demonstração. A implicação de *(a)* para *(b)* é o Lema 2.3.9.

De V_∞ ser fechado para combinações lineares, a transformada de Berezin ser linear, $V_\infty \subset ESV$ e do Lema 2.3.9, temos que *(b)* implica *(c)*.

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. O Lema 2.2.4 garante que, para qualquer $\epsilon \geq 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{f}^{(m)} \in \Lambda(\epsilon)$. Logo *(c)* implica *(d)*.

Supomos agora que $f = g_\epsilon + h_\epsilon$ tal que $g_\epsilon \in \Lambda(\epsilon)$ e $h_\epsilon \in V_\infty$, com $\epsilon > 0$. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ tais que $|a - b| \leq 1$. Temos que

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &\leq |g_\epsilon(a) - g_\epsilon(b)| + |h_\epsilon(a)| + |h_\epsilon(b)| \\ &\leq \epsilon + |h_\epsilon(a)| + |h_\epsilon(b)| \end{aligned}$$

Como $h_\epsilon \in V_\infty$, existe $M > 0$ tal que se $|a| \geq M$, então $|h_\epsilon(a)| \leq \epsilon$. Se $|a| \geq M+1$, então $|f(a) - f(b)| \leq 3\epsilon$. Logo $f \in ESV$.

□

Na próxima proposição garante-se que os únicos símbolos com oscilação nula no infinito associados a operadores de Fock-Toeplitz compactos são os que tem limite zero no infinito.

Proposição 2.3.11. *Seja* $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. *Então* $f \in V_\infty$ *se e só se* $f \in ESV \cap \mathfrak{B}$, *i.e*

$$ESV \cap \mathfrak{B} = V_\infty.$$

Demonstração. Da Proposição 2.1.8 e de $V_\infty \subset ESV$ temos que $V_\infty \subset ESV \cap \mathfrak{B}$.

Seja $f \in ESV \cap \mathfrak{B}$. Do Lema 2.3.9, temos que $f - \tilde{f} \in V_\infty$. Da Proposição 2.2.6, temos que $\tilde{f} \in C_0 \subset V_\infty$. Logo $f \in V_\infty$.

□

Proposição 2.3.12. *Temos as seguintes igualdades de conjuntos*

$$\Gamma \cap \mathfrak{B} = Q \cap \mathfrak{B} = \left\{f : |f|^2 \in \mathfrak{B}\right\}.$$

Demonstração. Temos que $Q \cap \mathfrak{B} \subset \Gamma \cap \mathfrak{B}$. Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então

$$H_{\overline{f}}(H_{\overline{f}})^* = (I-P)M_{\overline{f}}PM_f(I-P) = (I-P)(PM_f)^*M_f(I-P).$$

Se $f \in \Gamma \cap \mathfrak{B}$, então M_fP é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Logo $\overline{f} \in \Gamma$ e $f \in Q \cap \mathfrak{B}$.

Para provar a segunda igualdade enunciada, considere-se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Se $f \in Q$, então $T_{|f|^2} - T_f T_{\overline{f}} \in \mathcal{K}$. Se $f \in Q \cap \mathfrak{B}$, então $T_{|f|^2} \in \mathcal{K}$, i.e $|f|^2 \in \mathfrak{B}$. Verifica-se a seguinte igualdade entre operadores de $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$PM_f(PM_f)^* = PM_{\overline{f}}(PM_{\overline{f}})^* = PM_{|f|^2}P.$$

Se $|f|^2 \in \mathfrak{B}$, então $PM_f, PM_{\overline{f}} \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{C}, d\mu))$ e $f \in \mathfrak{B}$. Ademais

$$H_f P = (I - P)M_f P = (I - P)(PM_{\overline{f}})^*,$$

$$H_{\overline{f}} P = (I - P)M_{\overline{f}} P = (I - P)(PM_f)^*.$$

Se $|f|^2 \in \mathfrak{B}$, então $f \in Q$. Logo $Q \cap \mathfrak{B} = \{f : |f|^2 \in \mathfrak{B}\}$.

□

Proposição 2.3.13. *O conjunto das funções essencialmente limitadas que decaem para 0 no infinito pertencem a Q e a $\mathfrak{B}$, i.e.*

$$V_\infty \subset Q \cap \mathfrak{B}.$$

Demonstração. Se $f \in V_\infty \subset \mathfrak{B}$, então $|f|^2 \in V_\infty \subset \mathfrak{B}$. Da Proposição 2.3.12, temos que $f \in Q \cap \mathfrak{B}$. □

Teorema 2.3.14. *A seguinte inclusão de conjuntos é válida*

$$ESV \subset Q.$$

Demonstração. Por o Teorema 2.3.10, se $f \in ESV$, então existe $g_\epsilon \in \Lambda(\epsilon)$ e $h_\epsilon \in V_\infty$ tal que $f = g_\epsilon + h_\epsilon$. Do Lema 2.2.11, temos que

$$|U\,[M_{g_\epsilon}, P]\,U^* b(z)| \leq \epsilon \int_{\mathbb{C}} |z - w|\, e^{-\frac{|z-w|^2}{2}} |b(w)| dA(w), \quad b(z) \in L^2(\mathbb{C}, dA).$$

Seja $a(z) = |z| e^{-|z|^2/2}$ com $z \in \mathbb{C}$. Temos que $a \in L^1(\mathbb{C}, dA)$. Observa-se que o integral anterior é a convolução de a com $|b|$, tal como é definida em (2.10). Temos que

$$\|U\,[M_{g_\epsilon}, P]\,U^* b\|_2 \leq \epsilon \|a * |b|\|_2 \leq \epsilon \|a\|_1 \|b\|_2, \quad b(z) \in L^2(\mathbb{C}, dA).$$

Concluímos que

$$\|\,[M_f, P] - [M_{h_\epsilon}, P]\,\| = \|\,[M_{g_\epsilon}, P]\,\| \leq \epsilon \|a\|_1.$$

Segue, das Proposições 2.3.13 e 2.3.2, que $[M_{h_\epsilon}, P]$ é compacto para qualquer ϵ. Da arbitrariedade de ϵ, temos que $[M_f, P]$ é um operador compacto. Logo, por a Proposição 2.3.2, $f \in Q$. □

Lema 2.3.15. *Sejam ν uma medida finita em X e A uma função fracamente mensurável tal que $A(x) \in \mathcal{K}(H)$, para todo o $x \in X$, onde H é um espaço de Hilbert com uma base contável. Se existe $M > 0$ tal que $\|A(x)\| \leq M$, para todo o $x \in X$, então define-se fracamente o seguinte operador por*

$$B = \int_X A(x) d\nu(x).$$

Então B é um operador compacto.

Demonstração. Sejam ν uma medida finita e $A(x)$ nas condições do lema. Por $\|A(x)\| \leq M$, para todo o $x \in X$, e a medida ser finita, de acordo com (2.8) temos que o operador B está bem definido fracamente.

Considere-se $e_1, e_2, \ldots$ uma base ortonormal de H. Seja P_k a projeção de H no espaço gerado por os primeiros k elementos da base, onde $k \in \mathbb{N}$. Para $\epsilon > 0$, definimos

$$E_k = \{x \in X : \|P_k A(x) - A(x)\| < \epsilon\}.$$

Temos que $X = \bigcup_{k \geq 1} E_k$, porque $A(x)$ é compacto para todo o $x \in X$. Seja a partição de X por conjuntos disjuntos, construída através do seguinte método

$$E_1' := E_1 \quad E_k' := E_k \backslash \bigcup_{1 \leq j \leq k} E_j.$$

Como ν é uma medida finita existe $m > 0$ tal que $\sum_{k>m} \nu(E_k') < \epsilon/M$. Temos que

$$\int_X A(x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k'} P_k A(x) d\nu(x) + \sum_{k=1}^{m} \int_{E_k'} A(x) - P_k A(x) d\nu(x) + \int_{\bigcup_{k>m} E_k'} A(x) d\nu(x).$$

O primeiro integral define um operador cuja a imagem tem dimensão finita logo o operador resultante é compacto. A norma do operador definido fracamente por o segundo integral é limitada por $\epsilon\nu(\mathbb{C})$. O operador definido fracamente por o terceiro integral tem norma menor que ϵ. Portanto o operador B é o limite de operadores compactos, logo é compacto. $\square$

Teorema 2.3.16. *A seguinte inclusão é válida*

$$\Gamma \subset ESV + Q \cap \mathfrak{B}.$$

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. O Corolário 2.2.8 garante que

$$\begin{aligned} T_{f-\tilde{f}} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} [T_f, W_a^*] W_a d\mu(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P(M_f P M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z}} - M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z}} P M_f) W_a e^{\frac{|a|^2}{2}} d\mu(a) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P(M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z}}(I-P)M_f - M_f(I-P)M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z}}) W_a e^{\frac{|a|^2}{2}} d\mu(a) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P W_a^* H_f W_a d\mu(a) - \frac{1}{\pi} P M_f (I-P) \int_{\mathbb{C}} P M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z+\frac{|a|^2}{2}}} P W_a d\mu(a). \end{aligned}$$

Do operador de Weyl ser unitário, segue que se $a \in \mathbb{C}$, então $\|P W_a^* H_f W_a\| \leq \|f\|_\infty$. Se $f \in \Gamma$, então $P W_a^* H_f W_a P \in \mathcal{K}$, para todo o $a \in \mathbb{C}$. Além disso a medida μ é finita, logo estamos nas condições do Lema 2.3.15 o que permite concluir que

$$\int_{\mathbb{C}} P W_a^* H_f W_a P d\mu(a)$$

é compacto.

Considere-se o seguinte operador definido fracamente no espaço de Fock

$$J := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} P M_{e^{a\overline{z}-\overline{a}z+\frac{|a|^2}{2}}} P W_a d\mu(a) = P.$$

Como a imagem de J está contida no espaço de Fock então $P M_f (I-P) J = 0$.

Se $f \in \Gamma$, então $T_{f-\tilde{f}}$ é compacto, i.e. $f - \tilde{f} \in \mathfrak{B}$. De H_f ser compacto e o operador de Weyl ser unitário, podemos utilizar novamente o Lema 2.3.15 e concluir que $\widehat{H_f P}$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Do Corolário 2.2.10 e da Proposição 2.3.12, temos que $\tilde{f} \in \Gamma$, seguindo que $f - \tilde{f} \in \Gamma \cap \mathfrak{B} = Q \cap \mathfrak{B}$. Como $f - \tilde{f} \in \mathfrak{B}$ a Proposição 2.2.6 garante que $\tilde{f} - \tilde{f}^{(2)} \in C_0$. Do Teorema 2.3.10, temos que $\tilde{f} \in ESV$.

□

Teorema 2.3.17. *Temos a seguinte igualdade de conjuntos*

$$\Gamma = ESV + Q \cap \mathfrak{B} = Q.$$

Demonstração. A demonstração é imediata tendo em conta os Teoremas 2.3.14 e 2.3.16 e que $Q \subset \Gamma$.

□

Proposição 2.3.18. *A seguinte igualdade é válida*

$$Q \cap \mathfrak{B} = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu) : \widetilde{|f|^2} \in C_0 \right\}.$$

Demonstração. Se $f \in Q \cap \mathfrak{B}$, então $T_{|f|^2}$ é compacto. Da Proposição 2.2.6, temos que

$$\widetilde{|f|^2} = \langle PM_{|f|^2} k_\lambda, k_\lambda \rangle$$

está em C_0.

Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e χ_r a função caraterística da bola $B_r(0)$ com $r > 0$. Temos que $f = f\chi_r + f(1-\chi_r)$ e a seguinte igualdade de operadores em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$

$$M_f P = M_{f\chi_r} P + M_{f(1-\chi_r)} P.$$

De $f\chi_r \in V_\infty \subset Q \cap \mathfrak{B}$, segue que $M_{f\chi_r} P$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$. Provamos de seguida que o limite da norma de $M_{f(1-\chi_r)}$ é zero quando r vai para o infinito, o que garante que $M_f P$ é compacto em $L^2(\mathbb{C}, d\mu)$, i.e. f está em $Q \cap \mathfrak{B}$. Usando a Proposição 2.2.12, temos que

$$\|M_{f(1-\chi_r)} P\|_{L^2}^2 = \|PM_{|f|^2(1-\chi_r)} P\|_{L^2} = \|T_{|f|^2(1-\chi_r)}\|_{\mathbb{F}^2} \leq 2\|\widetilde{|f|^2(1-\chi_r)}\|_\infty.$$

Observa-se que

$$\widetilde{|f|^2(1-\chi_r)}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{|z| \geq r} |f(z)|^2 e^{-|z-\lambda|^2} dA(z), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

e que para todo o $\lambda \in \mathbb{C}$ o seguinte integral é limitado

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z-\lambda|^2} dA(z) \leq \|f\|_\infty^2.$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$\lim_{r\to\infty} \widetilde{|f|^2(1-\chi_r)}(\lambda) = 0.$$

Se $r_1 \leq r_2$, então $|f|^2(1-\chi_{r_2}) \leq |f|^2(1-\chi_{r_1})$ e $\|\widetilde{|f|^2(1-\chi_{r_2})}\|_\infty \leq \|\widetilde{|f|^2(1-\chi_{r_1})}\|_\infty$. Se $\widetilde{|f|^2} \in C_0$, então $\widetilde{|f|^2(1-\chi_r)} \in C_0$, com $r > 0$. Por ser uma sucessão decrescente de funções em C_0 que converge pontualmente para 0, temos que

$$\lim_{r\to\infty} \|\widetilde{|f|^2}(1-\chi_r)\|_\infty = 0.$$

Logo $f \in Q \cap \mathfrak{B}$. □

2.4 Caráter de Fredholm dos operadores de Fock-Toeplitz

Nesta secção estuda-se o caráter de Fredholm de operadores de Toeplitz, para tal começa-se por introduzir o conceito de C*-algebra. Diz-se que A é uma C*-algebra se A é uma álgebra de Banach que tem uma operação $*: A \to A$, tal que para todo o $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que

$$\begin{array}{lcl} (x^*)^* & = & x \\ (x+y)^* & = & x^* + y^* \\ (xy)^* & = & y^* x^* \\ (\lambda x)^* & = & \overline{\lambda} x^* \\ \|x\|^2 & = & \|x^* x\| \end{array}$$

Seja $B \subset A$. Diz-se que B é uma C*-subalgebra de A se é uma C*-algebra com as operações e a norma induzidas da C*-algebra A.

Exemplo 2.4.1. *Seja H um espaço de Hilbert. $\mathcal{L}(H)$ com a norma uniforme dos operadores lineares limitados e a operação $*$ dada por o adjunto é uma C*-algebra.*

Exemplo 2.4.2. *Temos que $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ com a norma uniforme e a operação $*$ dado por a conjugação de funções é uma C*-algebra.*

Exemplo 2.4.3. *Q, ESV e BC são C*-algebras. Sabemos que Q, ESV e BC são fechados para a conjugação. Como são subconjuntos fechados de $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então são C*-subalgebra de $L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$.*

Diz-se que I é um ideal de A se I é uma C*-subalgebra de A fechada para multiplicação por qualquer elemento, i.e. para qualquer $a \in A$ temos que $aI = \{ab : b \in I\} \subset I$.

Exemplo 2.4.4. *Seja H um espaço de Hilbert. $\mathcal{K}(H)$ é um ideal de $\mathcal{L}(H)$. V_∞ é um ideal de ESV. C_0 é um ideal de $BCESV := BC \cap ESV$.*

Seja A uma C*-algebra e I um ideal de A. Considere-se a relação de equivalência $[a] = [b]$ se e só se $a - b \in I$. A álgebra quociente A/I é a álgebra definida por esta relação de equivalência, i.e.

$$A/I := \{[a] : a \in A\}.$$

Como pode ser encontrado em [4, Corolário 1.3.2], se I é um ideal da C*-algebra A, então a álgebra quociente A/I é uma C*-algebra.

Sejam A e B C*-algebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras de Banach. Se $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ para todo o $a \in A$, então diz-se que φ é um *-homomorfismo de C*-algebras. Diz-se que A e B são isomorfas se existe um *-isomorfismo entre A e B.

Proposição 2.4.5. *As seguintes C*-algebra são isomorfas $Q/(Q \cap \mathfrak{B})$, ESV/V_∞ e $BCESV/C_0$.*

Demonstração. Da Proposição 2.3.11 e do Teorema 2.3.17, temos que $Q/(Q \cap \mathfrak{B}) \simeq ESV/(ESV \cap \mathfrak{B}) \simeq ESV/V_\infty$. Observamos que

$$ESV = BCESV + V_\infty,$$

porque se $f \in ESV$, então $f - \tilde{f} \in V_\infty$ e $\tilde{f}$ é uma função contínua limitada que está em ESV. Da observação anterior temos que $ESV/V_\infty \simeq BCESV/(BCESV \cap V_\infty)$. Como $C_0 \subset ESV$, então $BCESV \cap V_\infty = ESV \cap C_0 = C_0$.

□

Uma C*-algebra B de operadores num espaço de Hilbert é uma álgebra irredutível se as únicas projeções que comutam com B são as projeções triviais.

Lema 2.4.6. *Sejam A e B C*-algebras. Se $B \subset A_w$, em que A_w simboliza o fecho de A para a convergência fraca, e B é irredutível, então A é irredutível.*

Demonstração. Supomos que A não é irredutível, então existe uma projeção P não trivial tal que $PT = TP$ para todo o $T \in A$. Se $S \in B$, então existe $T_n \in A$ tal que $T_n \rightharpoonup S$ na convergência fraca. Logo

$$T_n P \rightharpoonup SP \quad \text{e} \quad PT_n \rightharpoonup PS.$$

De $T_n P = PT_n$, segue que $SP = PS$. No entanto, a irredutibilidade de B implica que $P = I$ ou 0. Então A é irredutível.

□

Seja $A \subset L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Designa-se por $\tau(A)$ a C*-algebra gerada por $\{T_f : f \in A\}$.

Proposição 2.4.7. *Verifica-se o seguinte*

$$\tau(V_\infty) = \mathcal{K} \subset \tau(Q).$$

Demonstração. Temos que $\tau(V_\infty) \subseteq \tau(Q) \subseteq \tau(L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)) \subseteq \tau(V_\infty)_w$, porque $V_\infty \subset Q \subset L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, $f\chi_r \in V_\infty$ e $T_{f\chi_r} \rightharpoonup T_f$, quando $r \to \infty$. De [7] sabemos que $\{W_a\}$, com $a \in \mathbb{C}$, é irredutível. Como $\{W_a\} \subseteq \tau(L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)) \subseteq \tau(V_\infty)_w$, então $\tau(L^\infty(\mathbb{C}, d\mu))$ e $\tau(V_\infty)_w$ são irredutíveis. Por o Lema 2.4.6, $\tau(V_\infty)$ é irredutível. A Proposição 2.1.8 garante que $\tau(V_\infty) \subset \mathcal{K}$. Como $\tau(V_\infty)$ contêm um operador compacto e é irredutível, então $\tau(V_\infty) = \mathcal{K}$.

□

Sejam A e B duas álgebras de Banach e φ um homomorfismo entre A e B. O núcleo do homomorfismo φ designa-se por $Ker\ \varphi$ e é dado por o seguinte conjunto

$$Ker\ \varphi := \{a \in A : \varphi(a) = 0\}.$$

A imagem do homomorfismo φ designa-se por $Im\ \varphi$ e é o seguinte conjunto

$$Im\ \varphi := \{\varphi(a) \in B : a \in A\}.$$

Proposição 2.4.8. *Existem os seguinte *-isomorfismos*

$$\tau(Q)/\mathcal{K} \simeq Q/(Q \cap \mathfrak{B}) \simeq ESV/V_\infty \simeq BCESV/C_0.$$

Demonstração. Seja o *-homomorfismo $\varphi(f) = [T_f]$, em que $f \in ESV$ e $[T_f]$ representa a classe de equivalência de T_f em $\tau(Q)/\mathcal{K}$. O Teorema 2.3.17 garante que $\tau(Q)$ é o fecho algébrico de $\{T_f + B : f \in ESV, B \in \mathcal{K}\}$. Por a imagem de um homomorfismo ser fechada algebricamente temos que φ é sobrejetivo e

$$ESV/Ker\ \varphi \simeq \tau(Q)/\mathcal{K}.$$

Da Proposição 2.3.11, segue que $Ker\ \varphi = ESV \cap \mathfrak{B} = V_\infty$. Os restantes *-isomorfismos do teorema são evidentes tendo em conta a Proposição 2.4.5. □

Sejam X e Y dois espaços vetoriais e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Diz-se que T é um operador de Fredholm se

$$dim\, Ker\ T < \infty \quad \text{e} \quad codim\, Im\ T < \infty,$$

onde $codim\ Im\ T := dim\ (Y/Im\ T)$. Se T é um operador de Fredholm, define-se o índice de Fredholm de T é dado por

$$ind\, T = dim\, Ker\ T - codim\ Im\ T.$$

Exemplo 2.4.9. *Se n é um número inteiro então $ind\, T_{(\overline{z}/|z|)^n} = n$.*

Sejam n e r inteiros com $r \geq 0$. Escreve-se $p_r(z) = z^r$, em que $z \in \mathbb{C}$. Se $r \geq n$, então

$$\begin{aligned}
T_{(\frac{\overline{z}}{|z|})^n} p_r(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\overline{w}}{|w|}\right)^n w^r e^{\overline{w}z} e^{-|w|^2} dA(w) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho^{r+1} e^{i(r-n)\theta} e^{\rho e^{-i\theta} z} e^{-\rho^2} d\theta d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} \int_0^{2\pi} e^{-i(r-n)\theta} e^{\rho e^{i\theta} z} d\theta d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} \frac{1}{i} \int_{|w|=1} \frac{e^{\rho w z}}{w^{r-n+1}} dw d\rho.
\end{aligned}$$

Por a fórmula integral de Cauchy, temos que

$$T_{(\overline{z}/|z|)^n} p_r = \frac{2\pi}{(r-n)!} \int_0^\infty \rho^{2r-n+1} e^{-\rho^2} d\rho p_{r-n}.$$

Como p_k, com $k = 0, 1, ...$, geram o espaço de Fock temos que $codim\ Im\ T_{(\overline{z}/|z|)^n} = 0$, se $n \geq 0$, e $codim\ Im\ T_{(\overline{z}/|z|)^n} = -n$, se $n < 0$. Se $0 \leq r < n$, então

$$\begin{aligned}
T_{(\overline{z}/|z|)^n} p_r(z) &= \int_{\mathbb{C}} |w|^{2r-n}\, \overline{w}^{n-r} e^{\overline{w}z} e^{-|w|^2} dA(w) \\
&= \int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-r)\theta} e^{\rho e^{-i\theta} z} d\theta d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} \int_0^{2\pi} e^{i(n-r)\theta} e^{\rho e^{i\theta} z} d\theta d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{r+1} e^{-\rho^2} \frac{1}{i} \int_{|w|=1} \frac{w^{n-r} e^{\rho w z}}{w} dw d\rho = 0.
\end{aligned}$$

Logo $dim\ Ker\ T_{(\overline{z}/|z|)^n} = n$, se $n \geq 0$, e $dim\ Ker\ T_{(\overline{z}/|z|)^n} = 0$, se $n < 0$. Temos assim que o operador de Fock-Toeplitz com símbolo $(\overline{z}/|z|)^n$ é de Fredholm e tem índice igual a n.

Apresentam-se de seguida alguns resultados conhecidos na teoria de operadores de Fredholm, apresentados em [13, XI.2.4, XI.3.7 e XI.3.11].

Proposição 2.4.10. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear limitado. Então T é um operador de Fredholm se e só se T tem uma regularização, i.e. existe R operador linear limitado entre Y e X tal que*

$$RT - I_X = S_1 \quad e \quad TR - I_Y = S_2,$$

onde I_X designa operador identidade em X, I_Y designa operador identidade em Y, $S_1 \in \mathcal{K}(X)$ e e $S_2 \in \mathcal{K}(Y)$.

Proposição 2.4.11. *Se $T : X \to Y$ é um operador de Fredholm e $B : X \to Y$ um operador compacto, então $T + B$ é de Fredholm e $ind\,(T + B) = ind\, T$.*

Proposição 2.4.12. *Se $T : X \to Y$ e $S : Y \to Z$ são operadores de Fredholm então ST é de Fredholm e $ind\, ST = ind\, T + ind\, S$.*

Diz-se que dois operadores de Fredholm T_o e $T_1 : X \to Y$ são homotópicos se existe uma função contínua $H : [0,1] \times X \to Y$ tal que para qualquer $t \in [0,1]$, H_t é um operador de Fredholm e temos que

$$H_0 = T_0 \quad \text{e} \quad H_1 = T_1.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em [10, 3.6.1(vi)]

Proposição 2.4.13. *O índice de Fredholm é invariante para operadores homotópicos.*

Diz-se que os caminhos α e γ são homotópicos se existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ contínua tal que fixando $s \in [0,1]$, temos que $H(t,s)$ define um caminho em X, $H(t,0) = \alpha(t)$ e $H(t,1) = \gamma(t)$, onde $t \in [0,1]$. O grupo fundamental $\pi_1(X)$ de um espaço X conexo é formado por o quociente dos caminhos fechados em X por a relação de homotopia de caminhos.

Seja $f \in BCESV$ tal que existem $R > 0$ e $m > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$. Para $r \geq R$ consideremos a curva fechada

$$\gamma_r : [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad \gamma_r(t) = f(re^{2\pi i t}).$$

O caminho γ_r projetado no grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \approx \mathbb{Z}$ é representado por um inteiro n, então diz-se que f tem número de rotação n. O número de rotação de uma função f designa-se por $index\ f$. Sejam $r, r' \geq R$. Da continuidade de f os caminhos γ_r e $\gamma_{r'}$ são homotópicos e definem o mesmo número de rotação.

Caraterizamos de seguida quais as funções em $BCESV$ que tem inverso na álgebra quociente $BCESV/C_0$.

Lema 2.4.14. *Seja $f \in BCESV$. Então existe $g \in BCESV$ tal que $gf - 1 \in C_0$ se e só se existe $R > 0$ e $m > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$.*

Demonstração. Seja $f \in BCESV$. Supomos que existe $g \in BCESV$ tal que $h := gf - 1 \in C_0$ e que para cada $\epsilon > 0$ existe uma sucessão z_k com $|z_k| \to \infty$ tal que $|f(z_k)| < \epsilon$, então

$$|1 + h(z_k)| = |g(z_k)||f(z_k)| < \epsilon \|g\|_\infty,$$

o que é uma contradição com o facto de $h \in C_0$.

Sejam $R > 0$ e $m > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$ e n o número de rotação de f. A função $f(z)(\overline{z}/|z|)^n$ tem número de rotação 0 então existe uma homotopia $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ entre o caminho constante $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e o caminho $[0,1] \ni t \mapsto f(Re^{2\pi i t})(e^{-2\pi i t})^n$ com $0 < t < 1$. Consideremos a função

$$F(sRe^{2\pi i t}) = H(t,s), \quad 0 < s, t < 1,$$

e

$$F(z) = f(z)(\overline{z}/|z|)^n, \quad |z| \geq R.$$

Seja

$$0 < m' = \min\left(m, \min_{s,t \in [0,1]} |H(t,s)|\right).$$

Temos que $|F(z)| \geq m' > 0$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. De $f \in BCESV$, temos que $F, 1/F \in BCESV$. Se $|z| \geq R$ então $f/F = (z/|z|)^n$. Seja a função $G(z) = (\overline{z}/R)^n$, se $|z| \leq R$, e $G(z) = (\overline{z}/|z|)^n$, se $|z| \geq R$. Temos que $G \in BCESV$ e $(G/F)f = 1$, se $|z| \geq R$. Para terminar a demonstração basta tomar $g = G/F$.

$\square$

Teorema 2.4.15. *Seja $f \in BCESV$. T_f é de Fredholm se e só se existe $m > 0$ e $R > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$. Ademais temos que $Ind\, T_f = -index\ f$.*

Demonstração. Seja $f \in BCESV$. Da Proposição 2.4.12, T_f é de Fredholm se e só se existe um operador R tal que $RT_f = I + S$, onde $S \in \mathcal{K}$. Temos que $R \in \tau(Q)$, porque I, S, T_f estão em $\tau(Q)$. Por a Proposição 2.4.8, T_f é de Fredholm se e só se f é invertível em $BCESV/C_0$. O Lema 2.4.14 garante que, T_f é de Fredholm se e só se existe $m > 0$ e $R > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$.

Sejam $m > 0$ e $R > 0$ tais que para qualquer $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$, temos que $|f(z)| \geq m$ e *index* $f = n$. Considere-se F tal como está definido na demonstração do Lema 2.4.14. Temos que

$$\left(\frac{\overline{z}}{|z|}\right)^n f = F, \quad z \geq R.$$

De $f \in BCESV \subset Q$ e das Proposições 2.4.10 e 2.4.12, obtemos a seguinte igualdade

$$Ind\, T_f = Ind\, T_F - Ind\, T_{(\overline{z}/|z|)^n} = Ind\, T_F - n.$$

Ao provar que $IndT_F = 0$ terminamos a demonstração do teorema. Como existe $M > 0$ tal que $|F| \geq M$, então $1/|F|$ está bem definido e pertence a $BCESV$. O caminho $t/|F| + (1-t)$, em que $0 \leq t \leq 1$, está em $BCESV$ logo $IndT_{1/|F|} = 0$. Seja $F' = F/|F|$. De $F' \in BCESV \subset Q$, temos que

$$Ind\, T_{F'} = Ind\, T_F + Ind\, T_{\frac{1}{|F|}} = Ind\, T_F.$$

Como $|F'| = 1$, sabe-se que existe uma função contínua G tal que $F'(z) = e^{iG(z)}$. Prova-se de seguida que, $G \in ESV$.

Seja $0 < \epsilon < 1$. É evidente que, existe $\delta(\epsilon)$ tal que, se $|e^{ia} - 1| < \delta(\epsilon)$ e $|a| < 1$, então $|a| < \epsilon$. De $F' \in ESV$, segue que existe $R > 0$ tal que para todo o $|z| > R$ temos que $|F'(z) - F'(w)| < \delta(\epsilon)$ com $|z - w| \leq 1$. Existe uma função k com valores inteiros tal que $|G(z) - G(w) + 2\pi k(w)| < \epsilon$. Da continuidade de G segue que a função k é nula. Logo, se $|z| > R$ e $|z - w| \leq 1$, então $|G(z) - G(w)| < \epsilon$, i.e. $G \in ESV$. Considere-se $H_m = e^{iG/m}$ no qual m é um inteiro positivo. Temos que $H_m \in BCESV$ e

$$Ind\, T_{F'} = mInd\, T_{H_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Portanto $Ind\, T_{F'} = 0$.

$\square$

Capítulo 3

Transformada de Bargmann e operadores de localização

3.1 Transformada de Fourier de tempo curto

Na corrente secção estuda-se a transformada de Fourier de tempo curto. Tal como é mencionado no inicio da secção 1.2, $L^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}, dt)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Define-se a transformada de Fourier de tempo curto com janela g da função f por a seguinte fórmula

$$V_g f(x, y) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-2i\pi ty}dt, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então a desigualdade de Hölder garante que $V_g f$ está bem definida pontualmente para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. O operador de translação por x é o seguinte operador unitário

$$\tau_x : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad \tau_x g(t) := g(t-x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Se $g = \chi_{[a,b]}$, então

$$\lim_{x_n \to x} \|\tau_{x_n} g - \tau_x g\|_2 = \lim_{x_n \to 0} \|\tau_{x_n} g - g\|_2 = 0.$$

A densidade da expansão linear das funções $\chi_{[a,b]}$ em $L^2(\mathbb{R})$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, permite estender o limite anterior a $L^2(\mathbb{R})$. Logo, se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$\lim_{x_n \to x} \|\tau_{x_n} g - \tau_x g\|_2 = \lim_{x_n \to 0} \|\tau_{x_n} g - g\|_2 = 0,$$

i.e. se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então a aplicação $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \tau_x g \in L^2(\mathbb{R})$ é uniformemente contínua.

Seja $y \in \mathbb{R}$. Considere-se a função

$$e_y(t) := e^{2\pi iyt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O operador de modulação em $L^2(\mathbb{R})$ é o operador de multiplicação por e_y em $L^2(\mathbb{R})$, o qual se designa simplesmente por M_y, i.e.

$$M_y : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad M_y g(t) := e^{2\pi i y t} g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então da Proposição 2.1.1 temos que

$$\lim_{y_n \to y} \|M_y g - M_{y_n} g\|_2 = \lim_{y_n \to 0} \|g(1 - e_{y_n})\|_2 \leq \lim_{y_n \to 0} \|g\|_2 \|1 - e_{y_n}\|_\infty = 0,$$

i.e. se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então a aplicação $\mathbb{R} \ni y \longmapsto M_y g \in L^2(\mathbb{R})$ é uniformemente contínua. De (2.1), temos que $M_y^* = M_{-y}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$. Então o operador de modulação é unitário.

Observa-se que, se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier de tempo curto com janela g verifica

$$V_g f(x, y) = \langle f, M_y \tau_x g \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Proposição 3.1.1. *Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então $V_g f$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Se x_n é uma sucessão que converge para $x \in \mathbb{R}$, então, por (3.1), temos que

$$\begin{aligned} |V_g f(x, y) - V_g f(x_n, y)| &= |\langle f, M_y(\tau_x g - \tau_{x_n} g)\rangle| \\ &\leq \|f\|_2 \|M_y(\tau_x g - \tau_{x_n} g)\|_2, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Como o operador de modulação é unitário, segue que

$$|V_g f(x, y) - V_g f(x_n, y)| \leq \|f\|_2 \|\tau_x g - \tau_{x_n} g\|_2.$$

Da continuidade uniforme da aplicação $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \tau_x g$, temos que se $y \in \mathbb{R}$, então $V_g f(x, y)$ é uniformemente contínua em x.

Se y_n é uma sucessão convergente para $y \in \mathbb{R}$, então por (3.1) temos que

$$\begin{aligned} |V_g f(x, y) - V_g f(x, y_n)| &= |\langle f, M_y \tau_x g - M_{y_n} \tau_x g\rangle| \\ &\leq \|f\|_2 \|M_y \tau_x g - M_{y_n} \tau_x g\|_2, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da continuidade uniforme da aplicação $\mathbb{R} \ni y \longmapsto M_y g$, temos que se $x \in \mathbb{R}$, então $V_g f(x, y)$ é uniformemente contínuo em y.

Observa-se que, se $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, então

$$|V_g f(x, y) - V_g f(a, b)| \leq |V_g f(x, y) - V_g f(x, b)| + |V_g f(x, b) - V_g f(a, b)|.$$

Logo a continuidade uniforme na duas variáveis implica que, $V_g f$ é uniformemente contínuo em $\mathbb{R}^2$. $\square$

Designa-se por $C^\infty(\mathbb{R})$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis. A classe de Schwartz $\mathcal{S}$ é definida por

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|x^i f^{(j)}(x)\|_\infty < \infty,\ i, j \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Se $1 \leq p < +\infty$, então a classe de Schwartz é densa em $L^p(\mathbb{R})$ (consultar [13, Proposição 6.5]).

A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ atuando na classe de Schwartz é o operador dado por a seguinte fórmula

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad \mathcal{F} f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Note-se que na definição da transformada de Fourier de tempo curto pode-se considerar janelas essencialmente limitadas. A transformada de Fourier de tempo curto com a janela constante igual a 1 restrita à classe de Schwartz é igual à transformada de Fourier. Usando a densidade da classe de Schwartz, tal como é feito para a transformada de Fourier, podemos extender por continuidade V_1 a $L^p(\mathbb{R})$, onde $1 \leq p < +\infty$.

Relembra-se algumas propriedades da transformada de Fourier, que podem ser consultadas em [37, Pagina 148] e [33, Teorema 9.2]. Se $f, g \in \mathcal{S}$, então

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{3.2}$$

$$\mathcal{F}(\tau_x f) = M_{-x}\mathcal{F}f, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

$$\mathcal{F}(M_y f) = \tau_y \mathcal{F}f, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Da definição da transformada de Fourier de tempo curto temos que, se $f, g \in \mathcal{S}$, então

$$V_g f(x, y) = \mathcal{F}(f\tau_x\overline{g})(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

De (1.6), o produto interno no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2) := L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ é o seguinte

$$\langle F, G\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(x, y)\overline{G}(x, y)dxdy, \quad F, G \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Proposição 3.1.2. *Se $f_k, g_k \in L^2(\mathbb{R})$, onde $k = 1, 2$, então*

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle.$$

Demonstração. Sejam $f_k, g_k \in \mathcal{S}$, com $k = 1, 2$. Por (3.5), temos que

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f_1\tau_x\overline{g_1})(y)\mathcal{F}(f_2\tau_x\overline{g_2})(y)dydx.$$

De (3.2), segue que

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1(y)\overline{g_1(y-x)f_2(y)}g_2(y-x)dydx.$$

O Teorema de Fubini, garante que

$$\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_1(y)\overline{f_2(y)}\int_{\mathbb{R}} \overline{g_1(y-x)}g_2(y-x)dxdy = \langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle. \tag{3.6}$$

De seguida, usando a densidade da classe de Schwartz, generaliza-se a igualdade em (3.6) para todas as funções de $L^2(\mathbb{R})$. Considere-se $g_1, f_k \in \mathcal{S}$, onde $k = 1, 2$. Define-se o operador linear

$$\mathcal{S} \ni g_2 \longmapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle.$$

De (3.6), temos que $\langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle = \langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle$ num subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$. Logo estendemos o funcional para $L^2(\mathbb{R})$, i.e. $L^2(\mathbb{R}) \ni g_2 \longmapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle$ é limitado e temos que a igualdade em (3.6) se estende a todo o $g_2 \in L^2(\mathbb{R})$. Considere-se $g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ e $f_k \in \mathcal{S}$, onde $k = 1, 2$. Define-se o operador conjugado linear

$$\mathcal{S} \ni g_1 \longmapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle,$$

que coincide com $\langle f_1, f_2\rangle\langle g_2, g_1\rangle$ num subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R})$. Logo o funcional conjugado $L^2(\mathbb{R}) \ni g_1 \longmapsto \langle V_{g_1}f_1, V_{g_2}f_2\rangle$ é limitado e estendemos a igualdade em (3.6) para todo o $g_k \in L^2(\mathbb{R})$, onde $k = 1, 2$. Procedendo de forma análoga para f_1, f_2, temos que a igualdade em (3.6) é válida para todo o $f_k, g_k \in L^2(\mathbb{R})$, onde $k = 1, 2$. $\square$

O seguinte teorema é um resultado imediato da proposição anterior.

Teorema 3.1.3. *Se $g \in L^2(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier de tempo curto com janela g é um operador continuo de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e temos que*

$$\|V_g\| = \|g\|_2.$$

Se $\|g\|_2 = 1$, então a transformada de Fourier de tempo curto é uma isometria entre $L^2(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Seja $g \in L^2(\mathbb{R})$. Da Proposição 3.1.2, sabemos que $\|V_g f\|_2 = \|f\|_2\|g\|_2$, para todo o $f \in L^2(\mathbb{R})$.

$\square$

Proposição 3.1.4. *Se $g \in L^2(\mathbb{R})$ é tal que $g \neq 0$, então o seguinte conjunto é denso em $L^2(\mathbb{R})$*

$$\{M_y\tau_x g : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstração. Considere-se uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ não nula. Supomos que o conjunto enunciado não é denso em $L^2(\mathbb{R})$. Então existe uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ não nula tal que $\langle f, M_y\tau_x g\rangle = 0$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$. Por (3.1) sabemos que $V_g f = 0$. No entanto por a Proposição 3.1.3 temos que $\|f\|_2 = 0$ ou $\|g\|_2 = 0$, o que contradiz as hipóteses. $\square$

Na proposição seguinte considera-se a inversa da transformada de Fourier de tempo curto.

Proposição 3.1.5. *Se $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ são tais que $\langle g, h\rangle \neq 0$, então para qualquer $f \in L^2(\mathbb{R})$ temos que*

$$f(t) = \frac{1}{\langle h, g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, y) M_y\tau_x h(t)dxdy, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Sejam $f, g, h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\langle g, h\rangle \neq 0$ e considere-se

$$\dot{f}(t) := \frac{1}{\langle h, g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, y) M_y\tau_x h(t)dxdy, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De (3.1) e da Proposição 3.1.2, se $a \in L^2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
\langle \dot{f}, a\rangle &= \frac{1}{\langle h, g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, y)\overline{\langle a, M_y\tau_x h\rangle}dxdy \\
&= \frac{1}{\langle h, g\rangle}\int_{\mathbb{R}^2} V_g f(x, y)\overline{V_h a}(x, y)dxdy \\
&= \langle f, a\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $\dot{f} = f$.

$\square$

Proposição 3.1.6. *Sejam $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ tais que $\langle g, h\rangle \neq 0$ e $\{K_n\}$ uma sucessão de conjuntos compactos tais que $K_n \subset K_{n+1}$ e $\mathbb{R}^2 = \bigcup_n K_n$. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, define-se*

$$f_n(t) := \frac{1}{\langle h, g\rangle} \int_{K_n} V_g f(x,y) M_y \tau_x h(t) dxdy.$$

Então f_n converge para f em $L^2(\mathbb{R})$.

Demonstração. Sejam $a, g, h, f \in L^2(\mathbb{R})$ tais que $\langle g, h\rangle \neq 0$ e $\|a\|_2 = \|h\|_2 = 1$. Verificamos que f_n está bem definido. Se $K_n \subset \mathbb{C}$, então do Teorema 3.1.3 temos que

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, a\rangle| &= \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \left| \int_{K_n} V_g f(x,y) \langle M_y \tau_x h, a\rangle dxdy \right| \\
&\leq \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \|V_g f\|_2 \|V_h a\|_2 \\
&\leq \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \|g\|_2 \|f\|_2.
\end{aligned}$$

Para provar a convergência de f_n, observa-se que

$$\langle fn - f, a\rangle = \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \int_{K_n^c} V_g f(x,y) \overline{V_h a}(x,y) dxdy.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e o Teorema 3.1.3, temos que

$$\begin{aligned}
|\langle fn - f, a\rangle| &\leq \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \|V_h a\|_2 \left(\int_{K_n^c} |V_g f(x,y)|^2 dxdy \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{|\langle h, g\rangle|} \left(\int_{K_n^c} |V_g f(x,y)|^2 dxdy \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como $V_g f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e K_n cobre $\mathbb{R}^2$, o integral da ultima expressão tende para 0, quando $n \to +\infty$. Logo f_n converge para f em $L^2(\mathbb{R})$.

□

Seja $g \in L^2(\mathbb{R})$. Considere-se A_g o seguinte operador linear associado a g definido por

$$A_g : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}), \quad A_g F(t) := \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y) M_y \tau_x g(t) dxdy, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Seja $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Do Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\|A_g F\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |A_g F(t)|^2 dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y) M_y \tau_x g(t)|^2 dxdydt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y)|^2 \int_{\mathbb{R}} |g(t-x)|^2 dtdxdy \\
&\leq \|F\|_2^2 \|g\|_2^2.
\end{aligned}$$

Logo o operador A_g está bem definido e é linear limitado. De seguida verificamos que A_g é o operador adjunto da transformada de Fourier de tempo curto com janela g, ou seja $V_g^* = A_g$. De (3.1), se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $F \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então

$$\langle A_g F, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y) \langle M_y \tau_x g, f\rangle dxdy = \langle F, V_g f\rangle.$$

Proposição 3.1.7. *Se $f, g \in \mathcal{S}$, então*

$$V_g f(x,y) = e^{-2\pi i x y} V_{\mathcal{F}g} \mathcal{F} f(y, -x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{S}$. Para auxiliar a demonstração da proposição prova-se primeiro que

$$V_g f(x,y) = e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\tau_y\overline{\mathcal{F}g})(-x), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Desenvolvendo o lado direito de (3.9), segue que

$$e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\tau_y\overline{\mathcal{F}g})(-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi-y)}e^{2\pi ix(\xi-y)}d\xi, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Por translação da variável de integração no integral anterior, temos que

$$e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\tau_y\overline{\mathcal{F}g})(-x) = \int_{\mathbb{R}} \tau_{-y}\mathcal{F}f(\xi)\overline{M_{-x}\mathcal{F}g(\xi)}d\xi, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as propriedades da transformada de Fourier enunciadas em (3.2), (3.3) e (3.4) no integral anterior, obtemos que

$$e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\tau_y\overline{\mathcal{F}g})(-x) = \int_{\mathbb{R}} M_{-y}f(t)\overline{\tau_x g(t)}dt = V_g f(x,y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerando (3.5) e (3.9), deduz-se que

$$V_g f(x,y) = e^{-2\pi ixy}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)\tau_y\overline{\mathcal{F}g})(-x) = e^{-2\pi ixy}V_{\mathcal{F}g}\mathcal{F}f(y,-x), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

□

3.2 Transformada de Bargmann

A transformada de Bargmann da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define-se formalmente por

$$\mathcal{B}f(z) := \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{2\pi tz-(\pi t)^2-\frac{z^2}{2}}dt, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então aplicando a desigualdade de Hölder em (3.10) temos que

$$|\mathcal{B}f(z)| \leq \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\|f\|_2 e^{\frac{Re(z)^2+Im(z)^2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2(\pi t-Re(z))^2}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}e^{\frac{|z|^2}{2}}\|f\|_2, \quad z \in \mathbb{C}$$

Logo a transformada de Bargmann de $f \in L^2(\mathbb{R})$ está bem definida pontualmente. Seja a função

$$\phi(x) := 2^{1/4}e^{-(\pi x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verifica-se com facilidade que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|\phi\|_2 = 1$.

Proposição 3.2.1. *Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $z = x + iy$, então*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}V_\phi f(\frac{x}{\pi}, -y) = e^{ixy}\mathcal{B}f(z)e^{-\frac{|z|^2}{2}}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}V_\phi f(\frac{x}{\pi}, -y) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\pi^2(t-\frac{x}{\pi})^2}e^{2\pi ity}dt.$$

Se $z = x + iy$, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} V_\phi f(\frac{x}{\pi}, -y) &= e^{ixy} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-(\pi t)^2 + 2\pi t(x+iy)} e^{-\frac{x^2+2ixy+(iy)^2}{2}} dt \\
&= e^{ixy} e^{-\frac{|z|^2}{2}} \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi t z - (\pi t)^2 - \frac{z^2}{2}} dt = e^{ixy} \mathcal{B}f(z) e^{-\frac{|z|^2}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.2.2. *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, então $\mathcal{B}f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$*

Demonstração. Sejam $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $x, y \in \mathbb{R}$. A função $f(t)e^{2\pi t(x+iy)-(\pi t)^2-(x+iy)^2/2}$ e as suas derivadas parciais em ordem a x e y são contínuas em $x, y, t \in \mathbb{R}$. Utilizando a regra de Leibniz para calcular as derivadas parciais de $\mathcal{B}f$ obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{B}f(x+iy) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2\pi t - x - iy) f(t) e^{2\pi t(x+iy) - (\pi t)^2 - \frac{x^2-y^2+i2xy}{2}} dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{B}f(x+iy) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2\pi i t + y - ix) f(t) e^{2\pi t(x+iy) - (\pi t)^2 - \frac{x^2-y^2+i2xy}{2}} dt.$$

As derivadas parciais estão bem definidas pontualmente e são contínuas. Então a transformada de Bargmann é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e respeita a seguinte condição de analiticidade

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{B}f(x+iy) = -i \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{B}f(x+iy).$$

Logo $\mathcal{B}f(z)$ é diferenciável em todo o $z \in \mathbb{C}$. □

Na próxima proposição usa-se a relação entre a transformada de Bargamnn e a transformada de Fourier de tempo curto para demonstrar que a transformada de Bargmann é uma isometria.

Teorema 3.2.3. *A transformada de Bargmann é uma isometria de $L^2(\mathbb{R})$ para o espaço de Fock $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Da Proposição 3.2.1, temos que

$$\|\mathcal{B}f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{C}} |\mathcal{B}f(z)|^2 e^{-|z|^2} dA(z) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |V_\phi f\left(\frac{x}{\pi}, -y\right)|^2 dxdy \right)^{1/2}.$$

Utilizando a mudanças de variáveis, $x' = x/\pi$ e $y' = -y$, e relembrando o Teorema 3.1.3, temos que

$$\|\mathcal{B}f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |V_\phi f(x,y)|^2 dxdy \right)^{1/2} = \|f\|_2. \tag{3.11}$$

Por a Proposição 3.2.2 e (3.11), a transformada de Bargmann é uma isometria entre $L^2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. □

O seguinte lema será útil para provar que a transformada de Bargmann é um operador unitário.

Lema 3.2.4. *Se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, então*

$$\langle \tau_a M_{-b}\phi, \tau_{\frac{x}{\pi}} M_{-y}\phi \rangle = \frac{1}{\pi} e^{-i(x-\pi a)(b+y)} e^{-\frac{(x-\pi a)^2+(b-y)^2}{2}}.$$

Demonstração. Seja $x, y \in \mathbb{R}$. Temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \phi, M_y \tau_x \phi \rangle &= \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\pi t)^2} e^{-2\pi i y t} e^{-\pi^2 (t-x)^2} dt \\
&= \sqrt{2} e^{-\frac{(\pi x)^2}{2}} \int_{\mathbb{C}} e^{-2\pi^2 \left(t - \frac{x}{2}\right)^2} e^{-2\pi i y t} dt \\
&= \sqrt{2} e^{-\frac{(\pi x)^2}{2}} \mathcal{F}(\tau_{\frac{x}{2}} e^{-2(\pi t)^2})(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Utilizando (3.3) para calcular a transformada de Fourier da última expressão, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\tau_{\frac{x}{2}} e^{-2(\pi t)^2})(y) &= e^{-\pi i x y} \mathcal{F}(e^{-2(\pi t)^2})(y) \\
&= e^{-\pi i x y} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\left(\pi t + \frac{iy}{2}\right)^2} dt \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{2}} e^{-\pi i x y} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dos cálculos anteriores, segue que

$$
\langle \phi, M_y \tau_x \phi \rangle = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(\pi x)^2}{2}} e^{-\pi i x y} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.12}
$$

Para provar o resultado do lema, considere-se $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Observa-se que

$$
\langle \tau_a M_{-b} \phi, \tau_{\frac{x}{\pi}} M_{-y} \phi \rangle = \langle \phi, M_b \tau_{\frac{x}{\pi} - a} M_{-y} \phi \rangle.
$$

De (3.12), concluímos que

$$
\begin{aligned}
\langle \tau_a M_{-b} \phi, \tau_{\frac{x}{\pi}} M_{-y} \phi \rangle &= e^{2\pi i y \left(\frac{x}{\pi} - a\right)} \langle \phi, M_{b-y} \tau_{\frac{x}{\pi} - a} \phi \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} e^{2\pi i y (\frac{x}{\pi} - a)} e^{-\frac{\left(\pi\left(\frac{x}{\pi} - a\right)\right)^2}{2}} e^{-\pi i (\frac{x}{\pi} - a)(b-y)} e^{-\frac{(b-y)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-i(x - \pi a)(b+y)} e^{-\frac{(x-\pi a)^2 + (b-y)^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.2.5. *A transformada de Bargmann é um operador unitário de* $L^2(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{F}^2(\mathbb{C})$.

Demonstração. Do Teorema 3.2.3, sabemos que a transformada de Bargmann é uma isometria então é suficiente provar que é sobrejetiva para termos que é um operador unitário. Sejam $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. De (3.1) e do Lema 3.2.4, segue que

$$
\begin{aligned}
V_\phi(\tau_a M_{-b} \phi)(\tfrac{x}{\pi}, -y) &= \langle \tau_a M_{-b} \phi, M_{-y} \tau_{\frac{x}{\pi}} \phi \rangle \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-i(x-\pi a)(b+y)} e^{-\frac{(x-\pi a)^2 + (b-y)^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Se $z = x + iy$ e $\omega = \pi a + ib$, então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(\tau_a M_{-b} \phi)(z) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-ixy} e^{\frac{|z|^2}{2}} V_\phi(\tau_a M_{-b} \phi)(\frac{x}{\pi}, -y) \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-ixy} e^{\frac{x^2 + y^2}{2}} e^{-i(x-\pi a)(b+y)} e^{-\frac{(x-\pi a)^2 + (b-y)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-i\pi ab} e^{-\frac{(\pi a)^2 + b^2}{2}} e^{(\pi a x + by) + i(\pi a y - xb)} \\
&= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-i\pi ab} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} e^{\overline{\omega} z}.
\end{aligned}
$$

Supomos que a transformada de Bargmann não é sobrejetiva. Então existe uma função $F \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ não nula tal que $\langle F, \mathcal{B}f\rangle = 0$, para todo o $f \in L^2(\mathbb{R})$. Se $\omega \in \mathbb{C}$, então

$$0 = \langle F, \mathcal{B}(\tau_a M_{-b}\phi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi ab} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \langle F, \kappa_\omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\pi ab} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} F(\omega).$$

Da igualdade anterior concluímos que $F = 0$. Logo a transformada de Bargmann é sobrejetiva e um operador unitário.

$\square$

Corolário 3.2.6. *A inversa da transformada de Bargmann é dada por*

$$\mathcal{B}^{-1}F(t) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} F(z) e^{2\pi t\overline{z} - (\pi t)^2 - \frac{\overline{z}^2}{2} - |z|^2} dA(z), \quad F \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}) \quad e \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Como a transformada de Bargmann é um operador unitário, para todo o $F \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $g \in L^2(\mathbb{R})$ temos que,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^{-1}F, g\rangle &= \langle F, \mathcal{B}g\rangle = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} F(z) \int_{\mathbb{R}} \overline{g(t)} e^{2\pi t\overline{z} - (\pi t)^2 - \frac{\overline{z}^2}{2}} dt e^{-|z|^2} dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} F(z) e^{2\pi t\overline{z} - (\pi t)^2 - \overline{z}^2/2 - |z|^2} dA(z) \overline{g(t)} dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{B}^{-1}F(t) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{C}} F(z) e^{2\pi t\overline{z} - (\pi t)^2 - \frac{\overline{z}^2}{2} - |z|^2} dA(z), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

3.3 Operadores de localização

Sejam $h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Define-se o operador de localização com janela h e símbolo f por o único operador linear que satisfaz a seguinte equação

$$\langle L_f^{(h)} g_1, g_2\rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} f(a) \langle g_1, W_a h\rangle \langle W_a h, g_2\rangle dA(a), \quad g_1, g_2 \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C}), \tag{3.13}$$

onde W_a é o operador de Weyl definido em (2.3). Na seguinte proposição prova-se que a forma sesquilinear do lado direito de (3.13) é limitada, então por o Teorema de representação de Riesz o operador de localização está bem definido e é limitado.

Proposição 3.3.1. *Se $h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então*

$$\|L_f^{(h)}\| \leq \|f\|_\infty \|h\|_2^2.$$

Demonstração. Sejam $h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$. Para $F, G \in L^2(\mathbb{R})$, temos que

$$\begin{aligned} \langle L_f^{(h)} \mathcal{B}F, \mathcal{B}G\rangle &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{C}} f(a) \langle \mathcal{B}F, W_a h\rangle \langle W_a h, \mathcal{B}G\rangle dA(a) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u+iv) \langle F, \mathcal{B}^{-1} W_{u+iv} \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} h\rangle \langle \mathcal{B}^{-1} W_{u+iv} \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1} h, G\rangle du dv. \end{aligned}$$

Calculamos o operador unitário $U_{u,v} := \mathcal{B}^{-1} W_{u+iv} \mathcal{B}$

$$\mathcal{B}U_{u,v}(z)F = W_{u+iv}(z)\mathcal{B}F = 2^{1/4}k_{u+iv}(z)\int_{\mathbb{R}} F(t)e^{2\pi t(z-(u+iv))-(\pi t)^2-\frac{(z-(u+iv))^2}{2}}dt, \quad z \in \mathbb{C}, u, v \in \mathbb{R}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tilde{t} = t + u/\pi$, temos que

$$\mathcal{B}U_{u,v}F(z) = 2^{1/4}\int_{\mathbb{R}} F(t-\frac{u}{\pi})e^{iuv-2\pi itv}e^{2\pi tz-(\pi t)^2-\frac{z^2}{2}}dt = \sqrt{\pi}\mathcal{B}(e^{iuv-2\pi itv}F(t-\frac{u}{\pi}))(z), \quad z \in \mathbb{C}, u, v \in \mathbb{R}.$$

Logo $U_{u,v}F(t) = \sqrt{\pi}e^{iuv-2\pi itv}F(t-u/\pi)$. Nota-se que

$$\langle F, U_{u,v}\mathcal{B}^{-1}h\rangle = \sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} F(t)e^{iuv-2\pi itv}\mathcal{B}^{-1}h(t-\frac{u}{\pi})dt = \sqrt{\pi}e^{iuv}\mathcal{F}(F(x)\mathcal{B}^{-1}h(x-\frac{u}{\pi}))(v). \tag{3.14}$$

A forma sesquilinear respeita a seguinte desigualdade

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(a)\langle g_1, W_a h\rangle\langle W_a h, g_2\rangle dA(a)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\langle F, U_{u,v}\mathcal{B}^{-1}h\rangle\langle U_{u,v}\mathcal{B}^{-1}h, G\rangle\right| dudv.$$

A desigualdade de Hölder, garante-nos que é suficiente estudar o seguinte integral. Por (3.14), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\langle F, U_{u,v}\mathcal{B}^{-1}h\rangle|^2 dudv &= \pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(F(x)\mathcal{B}^{-1}h(x-\frac{u}{\pi}))(v)|^2 dudv \\
&= \pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x)\mathcal{B}^{-1}h(x-\frac{u}{\pi})|^2 dudx \\
&= \pi\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{B}^{-1}h(x-\frac{u}{\pi})|^2 dudx \\
&= \pi^2\|F\|_2^2\|\mathcal{B}^{-1}h\|_2^2.
\end{aligned}$$

Por o Teroema da representação de Riesz, temos que

$$\|L_f^{(h)}\| \leq \|f\|_\infty\|\mathcal{B}^{-1}h\|_2\|\mathcal{B}^{-1}h\|_2 = \|f\|_\infty\|h\|_2^2.$$

□

De seguida relaciona-se operadores de localização com janela constante igual a 1 e operadores de Fock-Toeplitz.

Proposição 3.3.2. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$, então $L_f^{(1)} = \pi T_f$.*

Demonstração. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\mu)$ e $g, h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle L_f^{(1)}g, h\rangle &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(a)\langle g, \sqrt{\pi}k_a\rangle\langle\sqrt{\pi}k_a, h\rangle dA(a) \\
&= \pi\int_{\mathbb{C}} f(a)\langle g, \kappa_a\rangle\overline{\langle h, \kappa_a\rangle}e^{-|a|^2}dA(a) \\
&= \pi\int_{\mathbb{C}} f(a)g(a)\overline{h(a)}e^{-|a|^2}dA(a) \\
&= \pi\langle fg, h\rangle = \pi\langle T_f g, h\rangle.
\end{aligned}$$

Logo $L_f^{(1)} = \pi T_f$.

$\square$

Seja $BC^\infty(\mathbb{C})$ o conjunto das funções complexas que admitem derivadas parciais contínuas e limitadas de qualquer ordem. Na seguinte proposição usamos a transformada de Berezin, definida em (2.6), e a seguinte propriedade do operador de convolução, definido em (2.10). Designa-se as derivadas em $z(\overline{z})$ de ordem $k \in \mathbb{N}_0$ por $\partial^k(\overline{\partial}^k)$, i.e

$$\partial^k := \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k \ (\overline{\partial}^k := \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^k).$$

Seja D um operador de derivação dado por combinações lineares de ∂^j e $\overline{\partial}^k$ com coeficientes constantes, onde $j, k \in \mathbb{N}_0$, em semelhança com os polinómios nas variáveis z e $\overline{z}$ escrevemos que $D \in \mathbb{P}[\partial, \overline{\partial}]$. Da [37, Proposição VI.3.1] segue que, se $f, g \in BC^\infty(\mathbb{C})$ e $D \in \mathbb{P}[\partial, \overline{\partial}]$, então

$$D(f * g) = f * Dg = Df * g$$

.

Teorema 3.3.3. *Se $h \in \mathbb{P}[z] \subset \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$, então existe um operador de derivação $D = D^{(h)} \in \mathbb{P}[\partial, \overline{\partial}]$, tal que para todo o $f \in BC^\infty(\mathbb{C})$ temos que*

$$L_f^{(h)} = \pi T_{Df}.$$

Demonstração. Provamos primeiro que a transformada de Berezin do operador de localização é um operador de convolução. Seja $h \in \mathbb{F}^2(\mathbb{C})$ e $f \in BC^\infty(\mathbb{C})$. Temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{L_f^{(h)}}(z) &= \langle L_f^{(h)} k_z, k_z\rangle = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(a)\langle k_z, W_a h\rangle\langle W_a h, k_z\rangle dA(a) \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(a)|\langle W_a^* k_z, h\rangle|^2 dA(a), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Por (2.5), sabemos que $W_a^* k_b(z) = W_{-a}k_b(z) = k_{b-a}(z)e^{iIm(\overline{a}b)}$. Logo

$$\begin{aligned} \widetilde{L_f^{(h)}}(z) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(a)|\langle k_{z-a}, h\rangle|^2 dA(a) = \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}} f(z-y)|\langle k_y, h\rangle|^2 dA(y) \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(z-y)|h(y)|^2 e^{-|y|^2} dA(y) = (f * (|h(.)|^2 e^{-|.|^2})(z), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

No caso em que $h = 1$, estamos nas condições da Proposição 3.3.2 e temos que

$$\widetilde{\pi T_f}(z) = \widetilde{L_f^{(1)}}(z) = (f * e^{-|.|^2})(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Supondo que existe um operador de derivação tal que $De^{-|.|^2} = |h(.)|^2 e^{-|.|^2}$, então

$$\widetilde{L_f^{(h)}} = f * (|h(.)|^2 e^{-|.|^2}) = f * (De^{-|.|^2}) = Df * (e^{-|.|^2}) = \widetilde{\pi T_{Df}}.$$

Como a transformada de Berezin é injetiva, temos que

$$L_f^{(h)} = \pi T_{Df}.$$

Estudamos agora a existência do operador de derivação no caso em que $h \in \mathbb{P}[z]$. Observa-se que

$$\partial^i \overline{\partial}^j e^{-|.|^2} = e^{-|.|^2}\left[z^j \overline{z}^i + \sum_{k<i, l<j} c_{k,l} z^k \overline{z}^l\right],$$

para constantes $c_{k,l} \in \mathbb{C}$. Facilmente se reconhece que por combinação linear de operadores desta forma é possível encontrar $D = D^{(h)}$ tal que

$$De^{-|.|^2} = |h(.)|^2 e^{-|.|^2}.$$

$\square$

Bibliografia

[1] L. D. Abreu, *Sampling and interpolation in Bargmann-Fock spaces of polyanalytic functions*, Applied and Computational Harmonic Analysis, **29**, Pages 287–302 (2010)

[2] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Universty Press (1999)

[3] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, **68**, Number 3, Pages 337–404 (1950)

[4] W. Arveson, *An invitation to C*-algebra*, Springer-Verlag (1976)

[5] Wolfram Bauer, *Mean oscillation and Hankel operators on the Segal-Bargmann space*, Integral Equations and Operator Theory, **52**, Pages 1–15 (2005)

[6] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Heat flow and Berezin-Toeplitz estimates*, American Journal of Mathematics, **116**, Number 3, Pages 563–590 (1994)

[7] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Toeplitz operators on the Segal-Bargmann space*, Transactions of the American Mathematical Society, **301**, Number 2, Pages 813–829, (1987)

[8] C. A. Berger and L. A. Coburn, *Toeplitz operators and quantum mechanics*, Jormal of Functional Anlysis, **68**, Pages 273–299 (1986)

[9] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Providence, R.I.: American Mathematical Society, (1970)

[10] S. R. Caradus, W. E. Pfaffenberger, B. Yood, *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (1974)

[11] L. A. Coburn, *On the Berezin-Toeplitz calculus*, Proceedings of the American Mathematical Society, **129**, Number 11, Pages 3331–3338 (2001)

[12] L. A. Coburn, J. Isralowitz and Bo Li, *Toeplitz operators with BMO symbols on the Segal-Bargmann space*, Transactions of the American Mathematical Society, **363**, Number 6, Pages 3015–303 (2011)

[13] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlarg New York, Inc. (1990)

[14] J. B. Conway, *Functions of one complex variable II*, Springer-Verlarg New York, Inc. (1995)

[15] J. Dixmier, *C^*- algebras*, North-Holland publishing company (1997)

[16] Jingde Du and M. W. Wong, *Gaussian functions and Daubechies operators*, Integral Equations and Operator Theory, **38**, Number 1, Pages 1–8 (2000)

[17] P. Duren and A. Schuster, *Bergman spaces*, American Mathematical Society, **100** (2004)

[18] M. Englis, *Berezin transform on the harmonic Fock space*, Jornal of Mathematical Analysis and Applications, **367**, Pages 75–97 (2010)

[19] M. Englis, *Toeplitz operators and localization operators*, Transactions of the American Mathematical Society **361** , Number 2, Pages 1039–1052 (2009)

[20] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press (1989)

[21] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Robert E. Krieger Publishing Company (1983)

[22] K. Gröchenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser Boston (2000)

[23] S. M. Grudsky and N. L. Vasilevski, *Toeplitz operators on the Fock space: Radial compoment effects*, Integral Equations and Operator Theory, **44**, Pages 10–37 (2002)

[24] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag New York, Inc. (2000)

[25] J. Isralowitz and K. Zhu, *Toeplitz operators on the Fock space*, Integral Equations and Operator Theory, **66**, Pages 593–611 (2010)

[26] Y. I. Karlovich and L. Pessoa *Algebras Generated by the Bergaman and Anti-Bergman Projections and by Multiplications by Picewise Continous Functions*, Integral Equations and Operator Theory, **52**, Pages 219–270 (2005)

[27] N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall (1965)

[28] Min-Lin Lo, *The Bargmann transform and windowed Fourier localization*, Integral Equations and Operator Theroy, **57**, Pages 397–412 (2006)

[29] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall (2000)

[30] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press (1990)

[31] M. A. Pinsky, *Introduction to Fourier analysis and Wavelets*, Thomson Brooks/Cole (2001)

[32] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill, Inc. (1991)

[33] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc. (1987)

[34] S. Saitoh, *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*, Addison Wesley Longman Limited (1997)

[35] K. Stroethoff, *The Berezin transform and operators on space of analytic functions*, Banach Center Publications, **38**, Pages 361–380 (1997)

[36] N. L. Vasilevski, *Poly-Fock spaces*, Operator Theory Advances and Application, **117**, Pages 371–386 (2000)

[37] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag (1980)

Lista de símbolos

Lista de palavras