



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Estudo do Comportamento em Flexão de Vigas Compósitas *Sandwich*

Pedro Miguel Grifo Belbute

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Aeroespacial

Júri

Presidente:	Professor Fernando José Parracho Lau
Orientador:	Professor Manuel José Moreira de Freitas
Co-orientador:	Professor Aurélio Lima Araújo
Vogais:	Professor Luís Filipe Galvão dos Reis Doutora Filipa Andreia de Matos Moleiro

Outubro de 2010

Agradecimentos

Como autor do presente texto desejo expressar os meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que ajudaram à sua elaboração. Seja esse apoio directo ou no âmbito de formação académica e pessoal.

Agradeço ao meu orientador, o Professor Manuel Freitas, pela oportunidade proporcionada, apoio, pelas reuniões muito úteis e esclarecedoras e ainda pelo material disponibilizado.

Agradeço ao meu co-orientador, o Professor Aurélio Araújo, por todo o apoio e motivação prestados, pela constante disponibilidade em responder às mais variadas dúvidas, por todo o material que me facultou, sejam eles artigos ou código Matlab®, pelo ininterrupto acompanhamento dos progressos desta dissertação e paciência na análise dos inúmeros códigos e resultados.

Agradeço ao Professor Luís Reis, pelo apoio, aconselhamentos e força prestada.

Agradeço à Engenheira Sofia Teixeira de Freitas pelo apoio, sugestões e por permitir a utilização dos seus resultados, sem os quais esta dissertação ficaria muito menos rica.

Agradeço aos meus Pais toda a esperança e motivação que sempre depositaram em mim e na minha educação e sem a qual não estaria onde estou hoje. Adoro-vos.

Agradeço à Sofia por fazer parte da minha vida e me apoiar e acompanhar sempre em todos os momentos. Amo-te.

Agradeço ao resto da minha família todo o apoio e incentivo.

Resumo

As estruturas de materiais compósitos laminados são cada vez mais utilizadas nas indústrias de transportes automóvel, ferroviária, civil, aeronáutica, espacial e naval. Recentemente tem havido um renovado interesse pelas estruturas laminadas tipo *sandwich* que apresentam desempenhos estruturais em flexão bastante superiores aos laminados clássicos.

As estruturas *sandwich*, essencialmente solicitadas em flexão, são caracterizadas pela presença de materiais com resistência mecânica substancialmente diferente nas faces e no núcleo. Consequentemente, o comportamento à flexão destas estruturas não se enquadra nas teorias clássicas de laminados, embora a sua estrutura simples permita análises estruturais simplificadas cujo rigor de cálculo depende da estrutura específica da *sandwich*.

Nesta tese de mestrado pretende-se estudar a aplicação de técnicas de cálculo de vigas *sandwich* em flexão recorrendo a um modelo híbrido de teoria *layerwise* de ordem superior (*Higher-Order Shear Deformation Theory*) para representar o campo de deslocamentos do núcleo viscoelástico e de corte de 1ª ordem (*First-Order Shear Deformation Theory*) para as faces, comparando-a a teorias simplificadas de camada equivalente (*Equivalent Single Layer*) como a teoria Clássica (CLPT) e de corte de 1ª ordem (FSDT).

Os resultados obtidos através desta teoria são comparados e validados com valores obtidos experimentalmente e numericamente, através de elementos finitos tridimensionais e ainda por elementos de placa também de ordem superior. São ainda analisadas as vantagens relativamente às teorias clássica e de 1ª ordem.

Palavras-chave

Estrutura *sandwich*

Teoria de deformação de ordem superior

Elementos finitos

Flexão a 3 pontos

Flexão a 4 pontos

Abstract

Nowadays, the use of composite laminates structures in the automobile, railroad, civil, aeronautical, space and naval industries is growing at a huge rate. Recently, there's been a renewed interest in sandwich laminate structures, whose bending capability and performance is much better when compared to classical laminates.

Sandwich structures, which are mainly used as bending components, are formed by materials with very different resistance in the faces and in the core. Therefore the behavior of such structures under bending conditions does not fit the classical laminate theories. Despite this, sandwich structures are simple enough to allow simplified analysis, whose mathematical accuracy depends greatly on the structure itself.

In this master's thesis the goal is to study the application of different analysis techniques on sandwich beams under bending conditions using a mixed layerwise approach, by considering a Higher-Order Shear Deformation Theory (HSDT) to represent the displacement field of the viscoelastic core and a First-Order Shear Deformation Theory (FSDT) for the face layers and compare it with simplified theories of Equivalent Single Layers (ESL), such as the Classical Theory (CLPT) and First-Order theories (FSDT).

The results obtained through this theory are compared and validated with values retrieved experimentally and numerically by a 3-D finite element and by a higher-order plate element. The advantages relative to the Classical Plate Theory and First-Order Shear Deformation Theory are also analyzed.

Keywords

Sandwich Structure

High Shear Deformation Theory

Finite Elements

3 point bending

4 point bending

Índice

Agradecimentos	I
Resumo.....	III
Abstract	V
Índice de Figuras	IX
Índice de Tabelas.....	XII
Nomenclatura.....	XIII
Abreviaturas.....	XIII
1. Introdução.....	1
2. Estruturas <i>Sandwich</i>	3
2.1. Princípios gerais	3
2.2. Enquadramento histórico.....	3
2.3. Materiais	5
2.3.1. Materiais das faces.....	5
2.3.2. Materiais do núcleo.....	7
2.3.3. Adesivos	9
2.4. Considerações estruturais.....	10
2.5. Vantagens e desvantagens.....	11
2.6. Aplicações na actualidade	12
2.7. Perspectiva ambiental.....	14
3. Desenvolvimento do elemento estrutural de viga compósita <i>sandwich</i>	15
3.1. Introdução e conceitos gerais	15
3.2. Desenvolvimento do elemento de viga de ordem superior	18
3.2.1. Teoria.....	18
3.2.2. Formulação.....	20
3.2.3. Núcleo	23
3.2.4. Face Superior (<i>top</i>) e Face Inferior (<i>bottom</i>)	25
3.3. Formulação do elemento finito.....	27
3.3.1. Formulação variacional	27
3.4. <i>Shear Locking</i>	32
4. Validação do modelo.....	35
4.1. Ensaio à flexão em três pontos para comparação de teorias	35
4.1.1. Procedimento experimental	35

4.1.2.	Resultados e discussão.....	36
4.2.	Ensaio experimental de vigas <i>sandwich</i> à flexão em quatro pontos para aplicação em tabuleiros de pontes	40
4.2.1.	Materiais e provetes	40
4.2.2.	Procedimento experimental	42
4.2.3.	Resultados e discussão.....	43
5.	Conclusões e propostas de desenvolvimento futuro.....	69
5.1.	Conclusões.....	69
5.2.	Desenvolvimentos futuros	71
	Referências Bibliográficas	73

Índice de Figuras

Figura 1: Componentes de uma estrutura <i>sandwich</i> .	3
Figura 2: <i>de Havilland Mosquito</i> [5].	4
Figura 3: Construção <i>sandwich</i> da cápsula <i>Apollo</i> [3].	4
Figura 4: a) Lâmina individual de compósito; b) Laminado de compósitos empilhados segundo direcções diferentes.	6
Figura 5: Placas de fibra de carbono.	6
Figura 6: Gama indicativa das propriedades de alguns materiais usados no núcleo para efeitos de comparação [2].	7
Figura 7: Vários tipos de espumas. a) PVC; b) Poliuretano; c) Rohacell.	8
Figura 8: Estrutura do núcleo em ninho de abelha de: a) alumínio; b) carbono.	8
Figura 9: Aglomerados de cortiça.	9
Figura 10: Modos de falha do adesivo [10].	10
Figura 11: Comparação do comportamento de vigas com núcleo a) rígido ao corte, b) fraco ao corte [4].	11
Figura 12: HSS 900.	12
Figura 13: Composição Estrutural da fuselagem do Boeing 787, Fonte: Boeing.	13
Figura 14: A350 XWB.	13
Figura 15: Geometrias não deformadas e após deformação da secção de uma viga sujeita às restrições de Kirchhoff.	15
Figura 16: Geometrias não deformadas e após deformação da secção de uma viga sujeita às restrições da teoria de primeira ordem.	16
Figura 17: Equilíbrio de tensões interlaminares.	18
Figura 18: Numeração das camadas da <i>sandwich</i> .	20
Figura 19: Lâmina de material ortotrópico. Coordenadas locais x_1, x_2, x_3 e coordenadas globais x, y, z [26].	22
Figura 20: Elemento de viga.	28
Figura 21: Esquema do problema para validação do elemento.	35
Figura 22: Evolução da deformada máxima relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza.	37
Figura 23: Secção homogeneizada de uma viga <i>sandwich</i> .	38
Figura 24: Evolução da deformada máxima com $E_c = 6.9 \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $hcht$.	38
Figura 25: Evolução da deformada máxima com $E_c = 0.069 \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $hcht$.	39
Figura 26: Evolução da deformada máxima com $E_c = 0.069 \times 10^{-3} \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $hcht$.	39
Figura 27: Tipo de carregamento à flexão em quatro pontos da norma ASTM-C393: a) Carregamento para vigas curtas; b) Carregamento para vigas longas.	42
Figura 28: Montagem para ensaios à flexão. Configuração para: a) vigas longas; b) vigas curtas, [18].	43
Figura 29: Extensómetros aplicados: a) nas faces b) no núcleo, [18].	43
Figura 30: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a temperatura ambiente para vigas longas.	44
Figura 31: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a temperatura ambiente para vigas longas.	45
Figura 32: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a temperatura ambiente para vigas longas.	45

Figura 33: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	46
Figura 34: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a -10°C para vigas longas.	47
Figura 35: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a -10°C para vigas longas. ...	47
Figura 36: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a -10°C para vigas longas.	48
Figura 37: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	48
Figura 38: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a 50°C para vigas longas.	49
Figura 39: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a 50°C para vigas longas.	49
Figura 40: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a 50°C para vigas longas.	50
Figura 41: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	50
Figura 42: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.	52
Figura 43: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.	52
Figura 44: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.	53
Figura 45: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	53
Figura 46: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a -10°C para vigas curtas.	54
Figura 47: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a -10°C para vigas curtas. ...	54
Figura 48: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a -10°C para vigas curtas.	55
Figura 49: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	55
Figura 50: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a 50°C para vigas curtas.	56
Figura 51: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a 50°C para vigas curtas.	56
Figura 52: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a 50°C para vigas curtas.	57
Figura 53: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.	57
Figura 54: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12305 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.	59
Figura 55: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12305 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.	59
Figura 56: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12305 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.	60
Figura 57: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12155 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.	60
Figura 58: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12155 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.	61
Figura 59: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12155 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.	61
Figura 60: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12205 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.	62
Figura 61: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12205 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.	62
Figura 62: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12205 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.	63
Figura 63: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12306 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.	63

Figura 64: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12306 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.	64
Figura 65: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12306 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.	64
Figura 66: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S10306 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.	65
Figura 67: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S10306 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.	65
Figura 68: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S10306 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.	66

Índice de Tabelas

Tabela 1: Dados para análise da viga.....	36
Tabela 2: Características do Aço S355.....	41
Tabela 3: Características do poliuretano.....	41
Tabela 4: Características dos provetes.....	41
Tabela 5: Propriedades médias do material do núcleo.....	44
Tabela 6: Resultados da rigidez de vigas longas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	46
Tabela 7: Resultados da rigidez de vigas longas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	48
Tabela 8: Resultados da rigidez de vigas longas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	50
Tabela 9: Resultados da rigidez de vigas curtas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	53
Tabela 10: Resultados da rigidez de vigas curtas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	55
Tabela 11: Resultados da rigidez de vigas curtas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.....	57
Tabela 12: Resultados da distorção transversal, γ_{xz} , nas faces superior (<i>t</i>) e inferior (<i>b</i>) de todos os provetes entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.....	68

Nomenclatura

Abreviaturas

ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CLPT	<i>Classical Laminated Plate Theory</i>
EFT	Elementos Finitos Tridimensionais
ESL	<i>Equivalent Single Layer</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FSDT	<i>First-Order Shear Deformation Theory</i>
HSDT	<i>Higher-Order Shear Deformation Theory</i>
HSS	<i>High-speed Sea Service</i>
PMI	Polimetacrilimida
PUR	Poliuretano
PVC	Cloreto de Polivinil
RTM	<i>Resin Transfer Molding</i>
SDT	<i>Shear Deformation Theory</i>
SPS	<i>Sandwich Plate System</i>
TA	Temperatura ambiente
TSVS	Teoria Simplificada de Viga <i>Sandwich</i>
XWB	<i>“Xtra” Wide Body</i>

E	Módulo de Elasticidade (ou de Young)
G	Módulo de Rigidez ao Corte
h_b	Espessura da face inferior
h_c	Espessura do núcleo
h_t	Espessura da face superior
h_T	Espessura total da viga
I	Momento de inércia
K	Rigidez da viga
L	Comprimento da viga
M	Momento Flector
N	Esforço longitudinal
P	Carga aplicada na direcção transversal
Q	Esforço Transversal
u	Deslocamento na direcção x (longitudinal)
v	Deslocamento na direcção y (lateral)

w	Deslocamento na direcção w (transversal)
γ	Distorção
ε	Extensão
θ	Ângulo de orientação das fibras num laminado
ρ	Massa específica
σ	Tensão
σ_{ced}	Tensão de cedência
σ_R	Tensão de rotura
ν	Coefficiente de Poisson

1. Introdução

O uso de estruturas *sandwich* está largamente globalizado em todo o tipo de indústrias como a aeronáutica, espacial, naval, civil, ferroviária e automóvel. No entanto o seu uso, salvo raras excepções, era restrito aos componentes secundários e não críticos e o interesse era conhecer apenas o desempenho geral da *sandwich*. Assim, com o crescente interesse na utilização deste tipo estruturas, surgiu a necessidade de aumentar a exigência nos estudos feitos e de melhorar a precisão dos resultados obtidos.

Painéis e vigas *sandwich* são estruturas relativamente simples que apresentam grandes melhorias no desempenho em flexão quando comparados com os laminados clássicos e que podem ser analisadas através dos princípios convencionais da mecânica estrutural, bastando para isso conhecer um pequeno número de propriedades que permitam projectar e prever o comportamento em termos de tensões e deslocamentos. No entanto, e como se verá mais à frente, estas estruturas são constituídas por um núcleo que na maior parte das vezes é relativamente flexível, o que impossibilita a seu projecto tendo como base as teorias de vigas e placas convencionais. A maior parte das estruturas *sandwich* sofre a influência de efeitos de corte no núcleo devido à sua baixa rigidez, o que obriga a que quando se faça a transição de componente secundário para primário, surja a necessidade de utilizar teorias e modelos de ordem superior que simulem o comportamento de uma maneira mais correcta.

Esse é o principal objectivo desta dissertação, que se centrará na validação de um modelo híbrido de teoria *layerwise* de ordem superior (*Higher-Order Shear Deformation Theory*) para representar o campo de deslocamentos do núcleo viscoelástico e de corte de 1ª ordem (*First-Order Shear Deformation Theory*) para representar o campo de deslocamentos das faces, tendo como comparação modelos de teoria simplificada de camada equivalente (*Equivalent Single Layer*), elementos tridimensionais, elemento de placa *layerwise* de ordem superior e, principalmente, resultados obtidos experimentalmente, através de ensaios à flexão em 3 e 4 pontos segundo as normas ASTM, com o intuito de saber se estas teorias mais complexas e, por vezes, pesadas e caras podem ser usadas fidedignamente nos mais diversos projectos em engenharia.

Sendo de vital importância neste tipo de estruturas vão ser apresentadas as distribuições de extensões de flexão e de corte ao longo da espessura especialmente na zona do núcleo que na sua maioria apresenta um comportamento viscoelástico e não linear elástico como é comum na maior parte dos materiais usados em engenharia e neste caso no núcleo das *sandwich*. O efeito dessa viscoelasticidade é muito crítico e acentuado no comportamento das estruturas e é bastante influenciado por variações de temperatura e mesmo de tempo. Tal dependência vai ser exposta e brevemente discutida embora não seja esse o principal objectivo deste trabalho. Serão também quantificados os já esperados efeitos zigzague muito característicos deste tipo de construção como consequência das descontinuidades de material entre faces e núcleo da *sandwich*.

O presente texto está dividido em cinco capítulos, incluindo o 1º de Introdução.

No capítulo II será exposto o estado da arte no que diz respeito a estruturas *sandwich*, dando-se uma definição geral de construção *sandwich* e das suas principais vantagens e características estruturais. São também apresentadas a origem deste tipo de estruturas, o tipo de materiais usados e suas propriedades mais significativas, exemplos práticos da aplicabilidade deste tipo de construção na indústria aeroespacial e não só e ainda um enquadramento em termos ambientais.

No capítulo III serão apresentadas algumas das teorias usadas actualmente para análise de estruturas e suas premissas e limitações. Será ainda apresentada toda a teoria de alta ordem e formulação necessária ao desenvolvimento do elemento estrutural de viga compósita *sandwich*, para posterior utilização em simulação por elementos finitos.

No capítulo IV serão expostos e discutidos todos os ensaios e resultados obtidos através do elemento híbrido de viga e ainda por teorias simplificadas de primeira ordem e clássica, por elementos finitos tridimensionais e também de placa de ordem superior.

Finalmente, no capítulo V, serão apresentadas as conclusões a que se chegaram ao longo de toda esta dissertação, assim como algumas propostas de desenvolvimento futuro, com vista a melhorar o conhecimento deste tipo de estruturas e também da aplicabilidade deste tipo de elementos e, conseqüentemente, teorias, nos mais diversos tipos de projectos.

2. Estruturas *Sandwich*

2.1. Princípios gerais

A construção de estruturas *sandwich* segue desde sempre os mesmos princípios básicos, isto é, a utilização de duas faces exteriores que são relativamente finas e de elevada rigidez estrutural e um núcleo que é mais espesso, leve e com uma rigidez mais baixa que as faces. O núcleo separa as duas faces que são coladas através de adesivos, conseguindo-se, deste modo, atingir o principal objectivo neste tipo de estruturas que é combinar uma maior rigidez a um peso global muito menor.

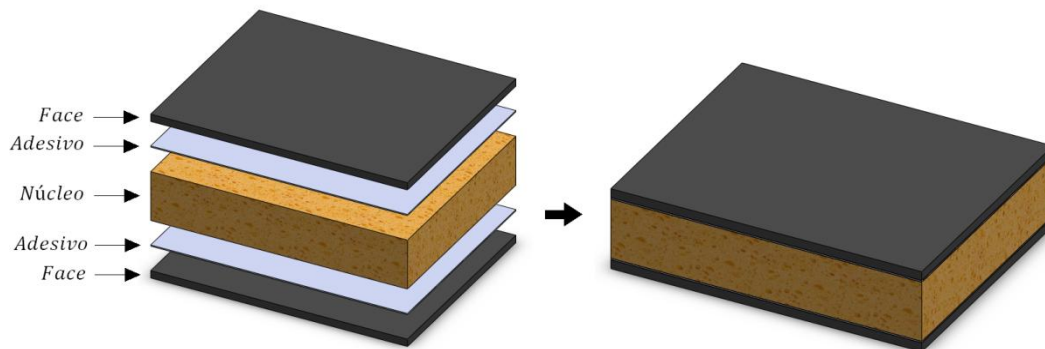


Figura 1: Componentes de uma estrutura *sandwich*.

Existem muitas formas de combinar os materiais utilizados em engenharia na construção das faces e do núcleo das *sandwich*, permitindo assim otimizar a estrutura consoante as necessidades das inúmeras aplicações existentes. Na sua maioria as faces são constituídas por aço, alumínio, madeira, laminados de compósitos com fibras de carbono, etc. Já para o núcleo usa-se a cortiça, balsa, espumas poliméricas como o poliuretano, PVC ou Rohacell®, favos de abelha, entre inúmeras outras [1, 2].

2.2. Enquadramento histórico

Historicamente, o princípio de utilização de duas faces que cooperassem entre si estando afastadas uma da outra, de modo a aumentar a resistência de uma estrutura, foi primeiramente apresentado por *Duleau* em 1820. Em todo o caso, até à Segunda Grande Guerra, especificamente na produção do *de Havilland Mosquito*, este tipo de estrutura não teve o seu verdadeiro papel na indústria. Assim sendo, e tendo em conta a escassez de

materiais em Inglaterra na Segunda Guerra Mundial, aliado à necessidade de fazer um bombardeiro que conseguisse transportar mais bombas, mas ao mesmo tempo fosse leve o suficiente para não necessitar de armamento de defesa, ou seja, depender da velocidade e performance para se defender e ainda para aproveitar a grande reserva de carpinteiros existentes, a empresa *de Havilland* decidiu conceber o *Mosquito* (Figura 2). Para conseguir cumprir estes objectivos a fuselagem era construída em duas metades que eram posteriormente unidas segundo o plano vertical e era constituída por painéis *sandwich* com as faces de contraplacado e o núcleo de balsa [3, 4, 5].



Figura 2: *de Havilland Mosquito* [5].

Após a guerra verificou-se um crescente interesse nesta tecnologia, principalmente no desenvolvimento de núcleos em favos de abelha. Mas foi a partir da década de 60 com a chegada do homem à Lua através da utilização de cascas de *sandwich* (constituídas por faces de aço e núcleo em favo de abelha) ligadas entre si e que constituíam as paredes da cápsula *Apollo* (Figura 3), que a massificação destas estruturas às indústrias naval, civil, automóvel, de refrigeração etc., chegou a todo o tipo de aplicações fora das até então principais áreas de interesse, isto é, a aeronáutica e aeroespacial [2, 4].

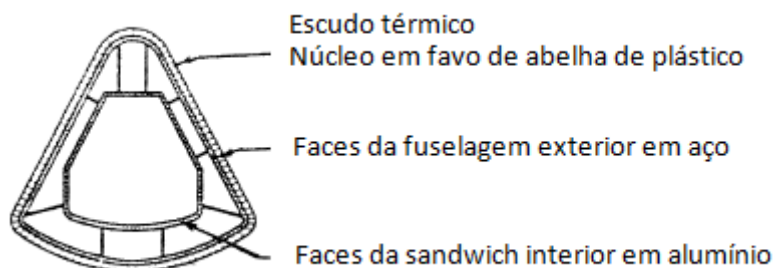


Figura 3: Construção *sandwich* da cápsula *Apollo* [3].

2.3. Materiais

Actualmente não existem ainda muitas maneiras de combinar em estruturas *sandwich* a grande variedade de materiais disponíveis para aplicações em engenharia. Por exemplo, normalmente um núcleo de espuma metálica é agrupado com faces também de metal e faces de compósitos laminados são agrupadas com espumas poliméricas ou com um núcleo em favo de abelha em papel impregnado de resina epoxídica. No entanto, a utilização de misturas menos convencionais tem mostrado um avanço na procura de combinações mais eficientes em termos de aumento de rigidez e de diminuição do peso [6, 7].

2.3.1. Materiais das faces

Como será visto mais à frente as faces têm como principal função suportar as tensões axiais, pelo que é necessário que estas tenham uma elevada rigidez. Aliado a isto e consoante a aplicação a dar à *sandwich*, a resistência ao impacto, à corrosão, à humidade e mesmo a diferença de materiais em termos de resistência elástica na face superior e inferior, são todos aspectos a ter em conta na escolha do material.

Como já foi mencionado os materiais mais usados para esta parte da *sandwich* são os aços, ligas de alumínio, madeira e derivados e os materiais compósitos.

As vantagens de usar faces metálicas prendem-se maioritariamente por uma elevada resistência mecânica, boa resistência à corrosão e ao fogo aliada ao baixo custo e facilidade de produção em massa. Por outro lado, a elevada densidade e dificuldade em fabricar painéis curvos, assim como alguns problemas de adesão, são algumas das desvantagens apresentadas por estes materiais [2, 3].

As madeiras e seus derivados, nomeadamente na forma de contraplacado, são menos densas e de fácil maquinabilidade sendo muitas vezes resultado de um processo de reciclagem, pelo que apresentam um baixo custo. A desvantagem está no facto dos painéis de madeira serem normalmente produzidos com tamanhos fixos que nunca excedem os 3.5 metros o que não é adequado para as “linhas de montagem” contínuas. Este tipo de material também absorve muito a humidade o que aumenta significativamente o peso da estrutura e diminui a sua rigidez, condicionando muito o tipo de ambiente em que pode ser aplicado [10].

Entre os materiais não metálicos que se podem utilizar nas faces da *sandwich*, os mais relevantes são os compósitos, isto porque se consegue obter um elevado módulo de elasticidade ao mesmo tempo que se melhora a relação peso-rigidez à flexão. Os materiais compósitos mais utilizados neste tipo de estrutura são os fibrosos e os laminados (se bem que estes últimos são no fundo constituídos por materiais compósitos fibrosos). Estes materiais resultam da dispersão de fibras numa ou mais direcções, responsáveis por suportar as cargas, num material de base denominado de matriz, que tem como função distribuir os esforços pelas fibras e protegê-las do meio ambiente.

Os compósitos laminados são constituídos por várias camadas de compósitos fibrosos empilhadas umas em cima das outras, que podem ser dispostas segundo várias direcções (como pode ser visto na figura 4.b)), garantindo assim que os requisitos de projecto são atingidos. Tal facilidade na escolha de diferentes propriedades permite assim aumentar o espectro de aplicabilidade destes materiais e é essa a razão pela qual são tão utilizados hoje em dia. Em contrapartida o risco de delaminação está bem presente nestes compósitos devido às tensões de corte produzidas pela descontinuidade de propriedades entre lâminas [8].

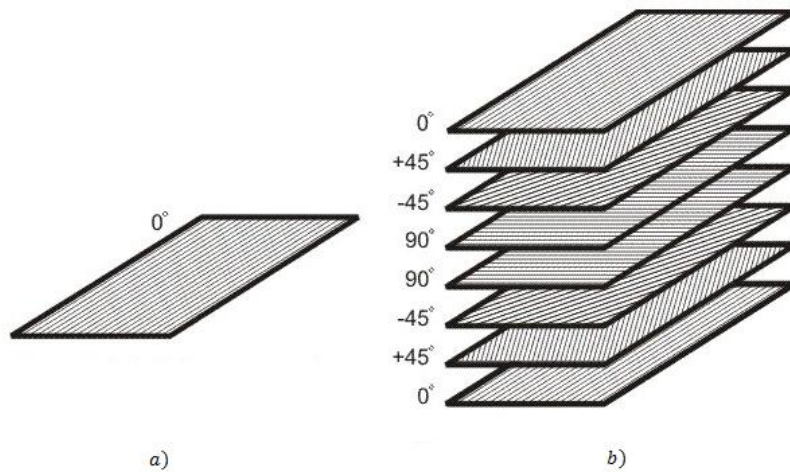


Figura 4: a) Lâmina individual de compósito; b) Laminado de compósitos empilhados segundo direcções diferentes.

Os tipos mais comuns de fibras usadas no reforço de materiais compósitos são as fibras de vidro, de carbono (Figura 5), aramida, e de juta por ser bastante barata e existir comercialmente na forma necessária. Mais detalhes sobre estes e outros materiais e suas aplicações em fibras de compósitos podem ser encontrados na referência [9].



Figura 5: Placas de fibra de carbono.

2.3.2. Materiais do núcleo

O núcleo numa *sandwich* tem como função suportar os esforços de corte e compressão, evitar que as faces deslizem uma relativamente à outra, garantir o melhoramento do comportamento à flexão da estrutura (ao aumentar a distância entre as faces) e conferir-lhe um menor peso. Também o isolamento térmico e acústico é da responsabilidade do núcleo e os materiais que são mais utilizados, de modo a garantir estes requisitos, são a balsa, a cortiça, espumas, favos de abelha e ainda material ondulado [3].

Como pode ser visto na figura 6 a escolha do material para o núcleo passa muito por uma questão de compromisso uma vez que os parâmetros que se encontram apresentados entram em conflito uns com os outros no que diz respeito à função desta zona numa *sandwich* [2].

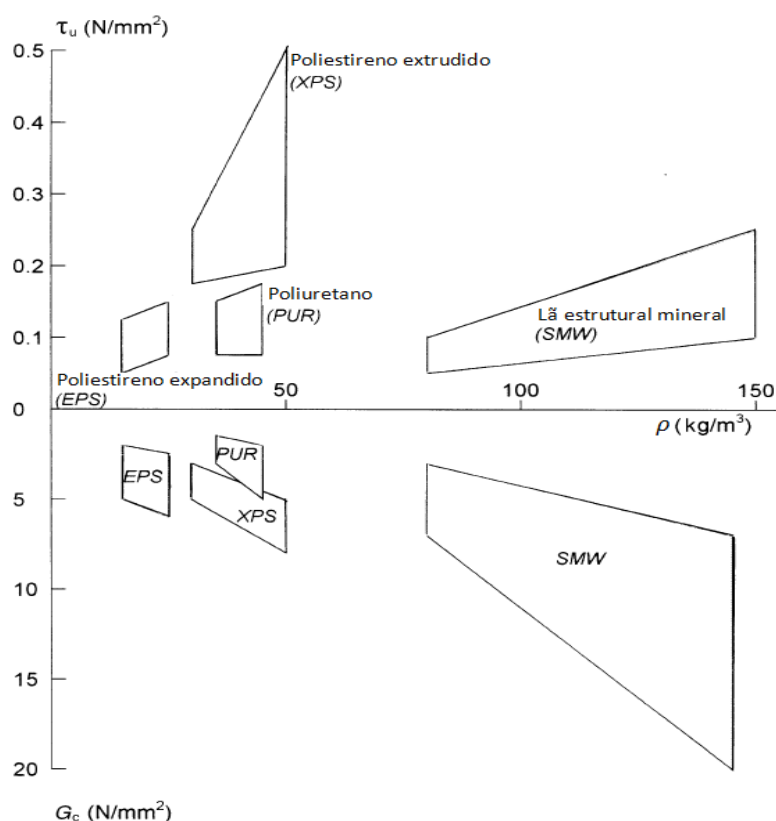


Figura 6: Gama indicativa das propriedades de alguns materiais usados no núcleo para efeitos de comparação [2].

Como já foi referido a madeira de balsa foi o primeiro material a ser usado como núcleo de uma estrutura *sandwich* com função estrutural, devido à sua muito baixa densidade, facilidade de manipulação, boa resistência à fadiga e à compressão e baixo custo [10].

Os tipos de espumas poliméricas mais utilizadas são o poliuretano (Figura 7.b)), o poliestireno, o PVC (Figura 7.a)), PMI (Rohacell®) (Figura 7.c)) e a resina fenólica. Estas

caracterizam-se principalmente e de um modo geral pela sua baixa densidade e custo, bom desempenho como isolantes térmicas e alta resistência [2, 10].



a)



b)

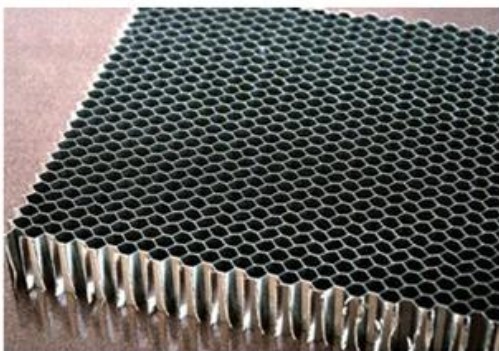


c)

Figura 7: Vários tipos de espumas. a) PVC; b) Poliuretano; c) Rohacell.

Os favos de abelha são estruturas celulares que podem apresentar diversas formas, sendo a mais comum a hexagonal, e que podem ser feitos de uma grande variedade de materiais como polímeros (Figura 8.b)), metais (Figura 8.a)), cerâmicos como o quartzo e até cartão (com reforço em resina).

As propriedades mais importantes e significativas deste tipo de estrutura são a boa rigidez, elevada resistência à compressão, resistência ao fogo, boa tolerância a temperaturas elevadas, boa condutividade térmica no caso de metais e baixa no caso de cerâmicos e polímeros, entre outras [10].



a)



b)

Figura 8: Estrutura do núcleo em ninho de abelha de: a) alumínio; b) carbono.

Como verificado por Lopes [11] a cortiça (aglomerados) (Figura 9) como núcleo de estruturas *sandwich* não está ainda ao nível dos materiais atrás mencionados no que toca a aplicações estruturais, no entanto, a margem para melhoria do desempenho deste material é bastante promissora. Isto verifica-se porque a escolha de materiais para o núcleo que sejam recicláveis e de origem natural, como é o caso da cortiça, é uma mais-valia para toda a indústria em termos ambientais e mesmo económicos, pois como se sabe Portugal é o maior produtor e exportador de cortiça no mundo. É também fácil de perceber que uma massificação na utilização deste material neste tipo de estruturas *sandwich*, devido às suas excelentes propriedades como isolante térmico, a sua boa capacidade de amortecer vibrações que se traduz num óptimo isolamento acústico, baixa densidade, boa resistência ao fogo, elevada elasticidade e tenacidade [10], seria sem dúvida um incentivo à economia e à procura de produtos de origem nacional.



Figura 9: Aglomerados de cortiça.

2.3.3. Adesivos

As camadas de adesivos, que têm como função manter o núcleo e as faces unidas, são de vital importância numa *sandwich*, pelo que não podem ser o elo mais fraco na estrutura, necessitando por isso de apresentar propriedades mecânicas no mínimo tão boas como as do núcleo [2].

Existe actualmente uma grande variedade de adesivos que são utilizados na união de juntas de materiais estruturais como sejam as faces e o núcleo de uma *sandwich*. Estes podem ser materiais sólidos, líquidos ou pastas e são na sua maioria feitos de resinas epoxídicas, fenólicas, poliuretano, silicões, elastómeros, produtos animais, entre outros [10].

As falhas possíveis numa ligação feita por adesivo são as adesivas e as coesivas. No caso de ocorrer falha deseja-se que esta seja do tipo coesiva, sobretudo a de substrato que ocorre quando a colagem entre o adesivo e os substratos é mais forte que a resistência destes. Há ainda a falha coesiva do adesivo quando este se rompe mas permanece colado aos

substratos, a falha adesiva quando o adesivo não se consegue manter colado ao substrato e ainda uma mista entre estas duas últimas (Figura 10).

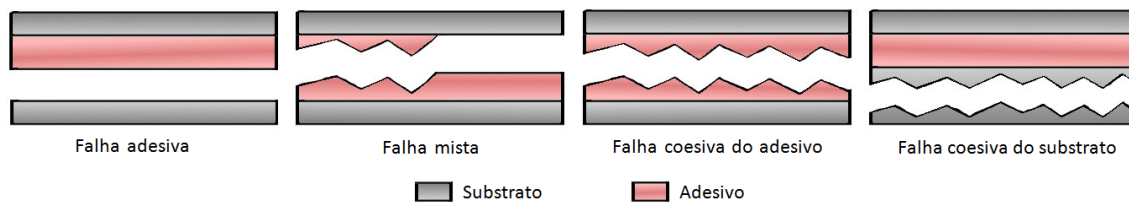


Figura 10: Modos de falha do adesivo [10].

Uma das principais características de um bom adesivo é a capacidade de endurecer durante o processo de polimerização e sofrer deformação durante o endurecimento de forma a libertar tensões residuais existentes.

A capacidade de unir materiais dissimilares como, por exemplo, metais com plásticos, de evitar as concentrações de tensões melhorando assim a resistência à fadiga e de ter muitas vezes uma melhor razão custo/eficiência, são alguns dos motivos que favorecem a utilização deste tipo de processos na união de materiais em detrimento de métodos mais convencionais como a soldadura, o aparafusamento e o uso de rebites [10].

2.4. Considerações estruturais

O uso das *sandwich* surge da necessidade de aumentar a eficiência das estruturas ao combinar um peso muito menor aliado a uma grande resistência mecânica. Isto é conseguido porque as duas faces são mantidas a uma distância elevada uma da outra, com o intuito de aumentar o momento de inércia, uma vez que este é proporcional ao cubo da altura da viga ou painel. Como consequência também a resistência à flexão relativamente ao eixo neutro da estrutura aumenta, conferindo assim esta tão desejada propriedade. Por outro lado, e em termos de peso, o ganho é conseguido através do núcleo, porque o uso de materiais de elevada resistência faz sentido apenas nas faces, onde as tensões normais máximas, devidas à flexão, ocorrem e porque são as zonas onde a estrutura está sujeita às forças axiais. Assim sendo, no núcleo podem ser usados materiais de baixa densidade, ainda que com um módulo de rigidez ao corte suficiente para evitar que as faces escorreguem uma relativamente à outra e também resistência suficiente para manter a distância entre as faces constante. É também preciso ter em conta a gama de temperaturas a que este vai estar sujeito, principalmente em materiais poliméricos, pois a alteração na rigidez do núcleo influencia em muito o comportamento global da *sandwich*, podendo alterar significativamente o erro relativo dos modelos analíticos usados na previsão do comportamento destas estruturas [1, 3, 4]. Tal será comprovado mais à frente aquando da validação do modelo de elementos finitos de ordem superior num caso de aplicação real sujeito a várias temperaturas.

Pode-se então considerar que o comportamento de uma estrutura *sandwich* simula e em tudo se assemelha ao de uma viga de perfil em I, já que as faces funcionam como os banzos, suportando as tensões axiais resultantes dos momentos flectores e o núcleo funciona como a alma da viga resistindo às tensões de corte geradas pelo esforço transversal e pela torção.

Em todo o caso, numa viga em I, a alma é rígida o suficiente para suportar o esforço transversal e permitir que se assumam que as normais aos planos assim se mantêm após deformação (restrição de Kirchhoff). Mas em estruturas *sandwich* isso não acontece com o núcleo e por isso a contribuição dos termos de corte em flexão não é desprezável, pelo que há necessidade de usar modelos que prevejam este comportamento, sendo esse o objectivo das teorias de ordem superior e, como já foi referido, desta dissertação.

O efeito da rigidez ao corte está patente na figura 11. Pode-se constatar em *a)* que as faces não deslizam uma sobre a outra, simulando assim o efeito de uma viga *sandwich* ideal, com uma rigidez ao corte suficiente para evitar esse fenómeno. Já o mesmo não se passa em *b)* onde essa rigidez é claramente insuficiente para garantir que as faces não se comportem de maneira independente [4].

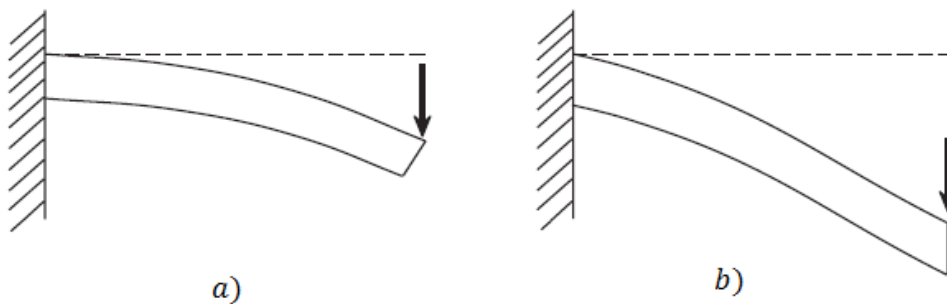


Figura 11: Comparação do comportamento de vigas com núcleo a) rígido ao corte, b) fraco ao corte [4].

Outra das principais funções do núcleo e dos adesivos é evitar a ocorrência de instabilidades locais na face que está à compressão, que podem ocorrer, mais uma vez, se a rigidez do núcleo for inadequada ou mesmo se a face for demasiado fina ou se estiver mal colada ao núcleo [2].

2.5. Vantagens e desvantagens

Para além do que já foi mencionado, de um modo geral, os painéis e vigas *sandwich* com núcleos feitos de cortiça, espumas e alguns favos de abelha caracterizam-se por terem boas propriedades de isolamento térmico (sendo alguns deles não inflamáveis) e acústico. Algumas das principais aplicações são por isso os diferentes lemes dos aviões e mesmo as carenagens dos motores, dado que actualmente em termos de projectos de aviação civil um

dos principais requisitos com o qual se tem verificado uma crescente preocupação é a redução do ruído.

Em contraposição, encontram-se os problemas de corrosão e de fadiga, nomeadamente se as faces forem constituídas de compósitos laminados, onde os principais mecanismos de aumento de danos na estrutura são a delaminação, que é de muito difícil detecção, e ainda danos por impacto. Dever-se-á também ter em atenção a humidade e sua absorção pelos laminados, que pode levar a um aumento de peso e diminuição de rigidez da estrutura, o que vai contra o objectivo de desempenho destas [12].

Outras das principais desvantagens das *sandwich* prendem-se com os problemas relativos aos critérios e modos de rotura, à grande variedade e, por vezes, incompatibilidade dos materiais e ainda aos processos de fabrico. Maior detalhe sobre estes pontos pode ser encontrado na consulta das seguintes referências, [9, 10, 12, 13, 14].

2.6. Aplicações na actualidade

Como já foi referido, foi na indústria aeroespacial que as estruturas *sandwich* tiveram a rampa de lançamento para uma globalização e massificação da sua aplicabilidade nas mais diversas áreas.

Um dos exemplos da implementação das *sandwich* encontra-se na indústria naval, mais propriamente na série de catamarãs HSS da companhia sueca *Stena Line*, que está actualmente a estudar a hipótese de alterar o seu modelo HSS 900 (Figura 12) feito de alumínio por uma super-estrutura *sandwich* que permitiria uma diminuição de peso em 2.9 kg/m^2 [15].



Figura 12: HSS 900.

Ainda assim, é no mercado aeronáutico que estas estruturas são mais necessárias, pois a constante procura por uma aeronave mais leve e, conseqüentemente, mais eficiente e económica é de longe o principal objectivo de qualquer projecto aeroespacial. Tal facto justifica o desenvolvimento de aviões como o Boeing 787 (Figura 13), constituído por 50% de materiais compósitos e o novo Airbus A350 XWB (Figura 14) feito com 53% de materiais compósitos [16, 17]. Essa escolha de materiais repercute-se, em conjunto com outros factores, numa redução do consumo de combustível em 20% para o Boeing e 30% para o Airbus.

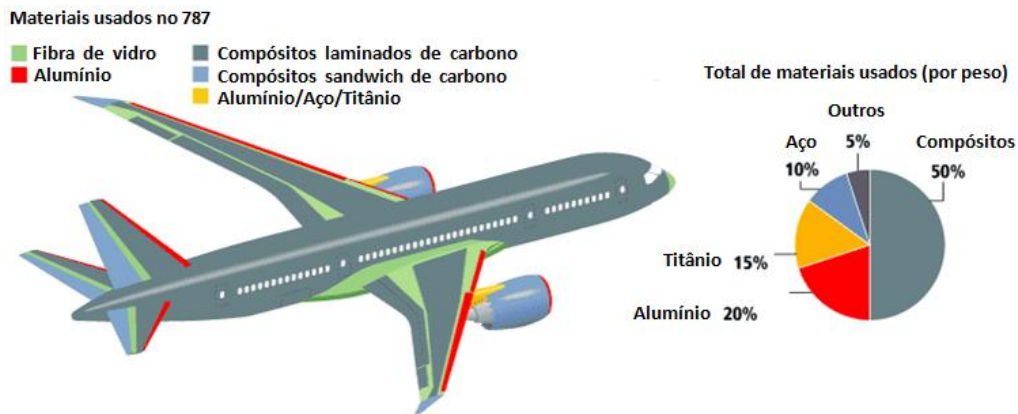


Figura 13: Composição Estrutural da fuselagem do Boeing 787, Fonte: Boeing.



Figura 14: A350 XWB.

A aplicação de estruturas *sandwich* tem vindo também a crescer no mercado da construção civil, nomeadamente no reforço de tabuleiros de pontes metálicas, como será visto e explicado mais à frente. Devido ao desgaste por fadiga, os tabuleiros de pontes metálicas, quer fixas quer móveis, são reforçados por uma estrutura *sandwich* (SPS), existindo já estudos

e aplicações reais implementados em todo o mundo, como é o caso da ponte Schönwasserpark na Alemanha [18, 19, 20].

Outros exemplos de aplicações são os painéis dos edifícios, componentes de carros e comboios, satélites, entre muitas outras que podem ser encontradas usando as referências [2, 21].

2.7. Perspectiva ambiental

Com o crescente aumento das preocupações com a preservação ambiental, surge a necessidade de adoptar medidas que previnam gastos desnecessários dado o aparecimento de regulamentação e legislação cada vez mais restritivas. É necessário também alterar a ideia de que apesar de ser actualmente difícil, a reciclagem de materiais compósitos não é impossível e um melhoramento nesta área iria muito provavelmente contribuir para um aumento da escolha deste tipo de materiais em detrimento dos tão conhecidos metais. É preciso ter em conta que as vantagens a nível ambiental que os materiais compósitos acarretam, muito por causa do grande melhoramento no consumo de combustível, perdem-se na sua maioria, se técnicas adequadas e eficientes de reciclagem não forem implementadas para estes materiais. Assim, e apesar de existirem todos os mecanismos necessários à reutilização e reciclagem de compósitos, a falta de sensibilidade para este assunto limita a sua aplicação. Não obstante, tal tem vindo a mudar ao longo dos últimos anos, graças a uma estratégia, quer por parte dos fabricantes quer dos utilizadores destes materiais, que passa por alterar a mentalidade e o modo como é feita a gestão dos negócios [12].

Por outro lado, há também a preocupação com os processos de fabrico que são na sua maioria muito poluentes, especialmente se realizados em molde aberto. Incentivam-se assim os produtores a usarem materiais pouco ricos em estireno, catalisadores para supressão da evaporação de solventes e novos processos de aplicação, que contribuem para o interesse na redução de volume de matérias-primas, o qual é alcançado usando processos de fabrico por molde fechado. Estes processos de fabrico por molde fechado, especialmente os de RTM (*Resin Transfer Molding*) produzem emissões bastante inferiores aos de molde aberto (cerca de 30%), sendo apenas ultrapassados por processos que utilizam fibras pré-impregnadas, como é o caso de cura por autoclave [10].

3. Desenvolvimento do elemento estrutural de viga compósita *sandwich*

3.1. Introdução e conceitos gerais

A análise de placas ou vigas de compósitos, seja em *sandwich* ou não, tem sido feita desde sempre segundo uma de três abordagens.

Primeiramente, por teorias bidimensionais de uma única camada equivalente (ESL), que se subdividem na teoria clássica de laminados (CLPT) e nas teorias de deformação de corte (SDT). Em segundo lugar, nas teorias de elasticidade tridimensional, onde se destacam as formulações tradicionais de elasticidade em 3-D e ainda as teorias “por camadas” (*layerwise*) e, finalmente, por um misto de modelos bidimensionais e tridimensionais.

As teorias ESL são obtidas fazendo suposições adequadas em termos da cinemática de deformação ou do estado de tensões ao longo da espessura da viga ou placa, que permitem reduzir o problemas de 3-D para 2-D.

A mais simples destas teorias é a teoria clássica de laminados (CLPT) (Figura 15), que mais não é que uma extensão da teoria clássica de laminados de Kirchhoff para placas de compósitos laminados. Nesta teoria está implícito no campo de deslocamentos que:

- Uma linha perpendicular ao plano médio xy antes de deformação se mantém recta e normal à superfície média após a deformação;
- As normais na direcção transversal não sofrem alongamento, i.e., são inextensíveis.

Ou seja, desprezam-se os efeitos de corte e normais na direcção transversal $\varepsilon_{zz} = 0, \varepsilon_{xz} = 0, \varepsilon_{yz} = 0$, pelo que a deformação se dá inteiramente devido à flexão e à extensão no plano [8].

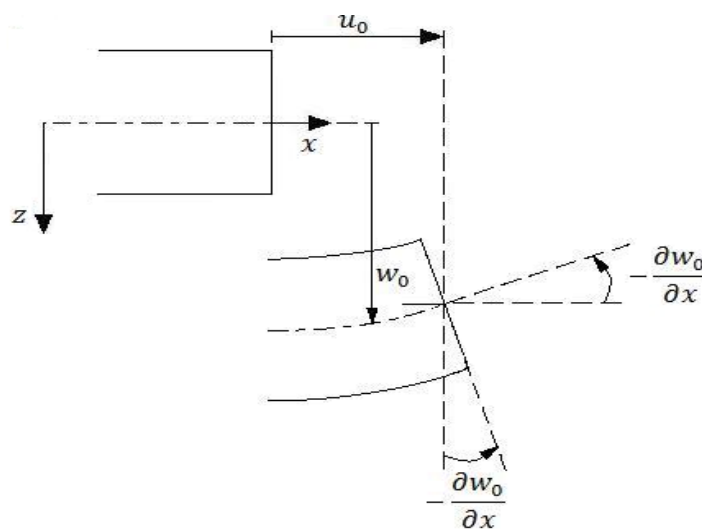


Figura 15: Geometrias não deformadas e após deformação da secção de uma viga sujeita às restrições de Kirchhoff.

Seguidamente tem-se a *teoria de deformação de corte de primeira ordem* (FSDT) baseada no modelo de Reissner-Mindlin [22, 23]. Esta teoria estende a cinemática da teoria clássica ao incluir um termo de deformação de corte transversal, i.e., assume-se a distorção transversal como constante ao longo da espessura e as normais na direcção transversal já não permanecem perpendiculares à superfície média após deformação (Figura 16).

Dentro destas suposições o campo de deslocamentos assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\theta_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\theta_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Onde u_0 e v_0 são os deslocamentos no plano, θ_x e θ_y são respectivamente as rotações das normais ao plano médio relativamente ao eixo y e ao eixo x e, no caso da teoria Clássica, $\theta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$ e $\theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$, w_0 é o deslocamento transversal do laminado [8].

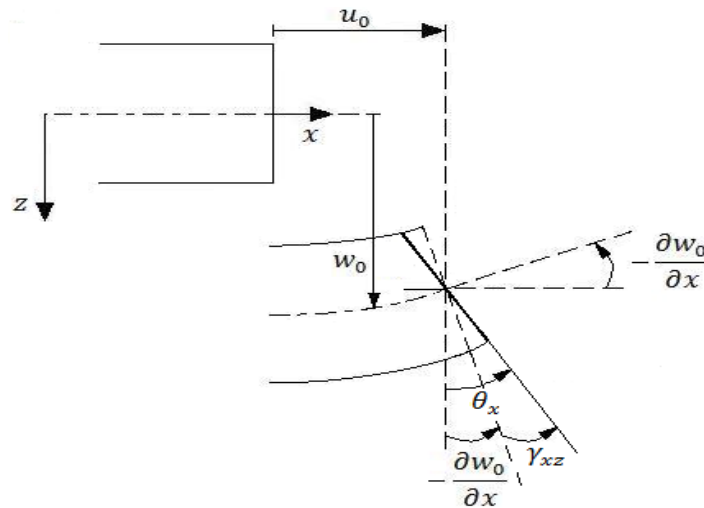


Figura 16: Geometrias não deformadas e após deformação da secção de uma viga sujeita às restrições da teoria de primeira ordem.

Em ambas as teorias devido à suposição de estado plano de tensões é usada uma formulação reduzida da lei constitutiva, destacando-se também que a suposição de manter a linearidade das normais ao plano médio pode ser removida, dando origem a teorias de segunda ordem ou de ordem superior (HSDT), tal como é objectivo deste trabalho.

Teorias de ordem superior (superior a 1) representam a cinemática de um modo mais preciso usando polinómios de maior ordem na expansão dos termos do campo de deslocamentos ao longo da espessura do laminado, pelo que introduzem incógnitas adicionais que são normalmente de difícil interpretação em termos físicos. Devido à complexidade algébrica e computacional envolvida nestas teorias a maior parte não vai além da terceira

ordem. A razão pela qual se expandem os deslocamentos até um termo cúbico na coordenada da espessura tem a ver com a possibilidade de ter variação quadrática na distorção transversal e nas tensões de corte transversais [8].

A teoria de ordem superior que se vai apresentar baseia-se no que já foi considerado para a teoria de primeira ordem e clássica, excepto que se deixa de considerar a hipótese de que a normal ao plano médio se mantém recta e perpendicular após deformação. Isto é conseguido através da expansão dos deslocamentos (u, v, w) em funções cúbicas da coordenada z .

Ao contrário dos materiais isotrópicos, a análise de estruturas de compósitos laminados apresenta uma vasta gama de problemas que ocorrem em diferentes escalas geométricas, como sejam ao nível das lâminas ou do laminado, das diferentes camadas ou ao nível das fibras/matrizes. Devida à sua baixa rigidez de corte transversal, estes materiais apresentam normalmente grandes deformações nesta direcção a baixas razões de espessura-comprimento.

Ao nível das diferentes camadas e mais especificamente em zonas de descontinuidade geométrica ou material, como é característica incontornável das estruturas *sandwich*, as concentrações de tensões transversais podem levar a danos críticos na estrutura em forma de delaminação, quebra da matriz e ainda separação das faces através da rotura das resinas usadas para as manter juntas.

Deste modo, quando estas estruturas passam a ser utilizadas como componentes primários e críticos, é fulcral alargar os objectivos da análise, permitindo obter dados precisos em zonas onde o início das roturas é mais provável de acontecer. É aqui que as teorias de camada equivalente (ESL) são menos eficazes, pois a maior parte dos componentes primários em engenharia são consideravelmente mais espessos que os secundários, pelo que mesmo a determinação de uma resposta global da estrutura pode requerer um teoria de laminados mais refinada que tenha em conta os efeitos da espessura. Por outro lado estas teorias são também incapazes de determinar o campo de tensões tridimensional, fulcral para a previsão de zonas de iniciação de danos.

Do equilíbrio de forças entre as camadas da *sandwich* tem-se a seguinte condição de continuidade entre os campos de tensões de faces adjacentes (Figura 17):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k \neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{k+1}, \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (2)$$

E uma vez que é normal que as constantes da matriz constitutiva sejam diferentes entre as diferentes camadas da estrutura, $[\bar{Q}^k] \neq [\bar{Q}^{k+1}]$, o campo de extensões entre camadas adjacentes cumpre as seguintes condições:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^k \neq \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (3)$$

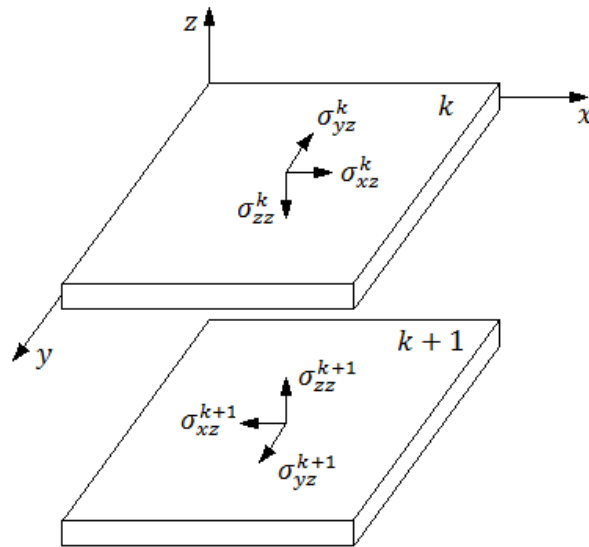


Figura 17: Equilíbrio de tensões interlaminares.

Em teorias de ESL assume-se que os deslocamentos são funções contínuas da coordenada da espessura, resultando em extensões transversais contínuas, contrariamente ao que é requerido em (3). Deste modo em ESL todas as tensões são descontínuas nas interfaces, incluindo as transversais, facto que dá azo a erros que em estruturas finas são desprezáveis, mas em estruturas mais espessas não o são de todo.

Com isto a análise de estruturas primárias requer o uso de teorias de elasticidade tridimensional como as *layerwise*.

As teorias *layerwise* são desenvolvidas assumindo que o campo de deslocamentos exhibe apenas continuidade C^0 ao longo da espessura. Tal condição impede a utilização de funções interpoladoras spline ou cúbicas de Hermite, permitindo assim que as derivadas do deslocamento relativamente à coordenada z possam ser descontínuas em vários pontos ao longo da espessura, garantindo-se assim a continuidade das tensões transversais ao longo das diferentes faces da *sandwich*, respeitando a condição (2), [8].

3.2. Desenvolvimento do elemento de viga de ordem superior

3.2.1. Teoria

Como já foi referido o uso de modelos tridimensionais pode dar lugar à utilização de modelos bidimensionais de modo a diminuir o seu peso e a facilitar a sua aplicação computacional. Isto foi o que fez Araújo *et al.* [24] no desenvolvimento de um modelo de elementos finitos com teoria *layerwise* para a análise de placas em *sandwich*.

As suposições utilizadas no desenvolvimento deste elemento são [24]:

1. Todos os pontos numa normal à placa têm o mesmo deslocamento transversal $w(x, y, t)$, em que t significa tempo e a origem do eixo z é o plano central do núcleo da *sandwich*;
2. Não há escorregamento entre as camadas;
3. O deslocamento tem, tal como referido anteriormente, continuidade C^0 ao longo das interfaces;
4. As faces da *sandwich* são modeladas com teoria de primeira ordem (FSDT) e o núcleo viscoelástico com uma teoria de ordem superior (HSDT);
5. Os materiais do núcleo são lineares, homogéneos e ortotrópicos e as faces são constituídas por laminados de materiais compósitos.

Contrariamente ao modelo usado por Araújo *et al.* [24], que desenvolveu esta teoria para um elemento de placa, no presente trabalho o objectivo passa por estudar apenas o comportamento de vigas em *sandwich*, pelo que interessa apenas considerar a direcção axial x e a direcção transversal z no desenvolvimento deste elemento de viga.

Assim e para as faces superior e inferior da viga o campo de deslocamentos da teoria de primeira ordem (FSDT) pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} u^k(x, y, z, t) &= u_0^k(x, y, t) + (z - \bar{z}_k)\theta_x^k(x, y, t) \\ w^k(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Onde u_0^k é o deslocamento no plano médio da face, θ_x^k é a rotação da normal ao plano médio relativamente ao eixo y (sentido anti-horário), w_0 é o deslocamento transversal do laminado (igual para todas as camadas na *sandwich*), \bar{z}_k é a coordenada do plano médio de cada face, relativamente ao plano médio do núcleo ($\bar{z}_c = 0$) e $k = t, b$ é o índice de cada face (t - top face, b - bottom face) [24].

Para o núcleo, o campo de deslocamentos da teoria de ordem superior é escrito como uma expansão em série de Taylor dos deslocamentos no plano e na direcção da espessura, também com deslocamento transversal constante:

$$\begin{aligned} u^c(x, y, z, t) &= u_0^c(x, y, t) + z\theta_x^c(x, y, t) + z^2u_0^{*c}(x, y, t) + z^3\theta_x^{*c}(x, y, t) \\ w^c(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (5)$$

Em que u_0^c é o deslocamento no plano médio do núcleo, θ_x^c é a rotação da normal ao plano médio relativamente ao eixo y (sentido anti-horário), w_0 é o deslocamento transversal do núcleo (igual para todas as camadas na *sandwich*) e c é o índice do núcleo (c - core). As funções u_0^{*c} e θ_x^{*c} são os termos de ordem superior em expansão da série de Taylor como já referido, definidos também no plano médio do núcleo [24].

3.2.2. Formulação

Por análise da figura 18 podem-se retirar as relações de continuidade dos deslocamentos entre as faces e o núcleo:

$$u^c\left(x, y, \frac{h_c}{2}, t\right) = u^t\left(x, y, \bar{z}_t - \frac{h_t}{2}, t\right) \quad (6.a)$$

$$u^c\left(x, y, -\frac{h_c}{2}, t\right) = u^b\left(x, y, \bar{z}_b + \frac{h_b}{2}, t\right) \quad (6.b)$$

Em que as coordenadas dos planos médios de cada camada são:

$$\bar{z}_t = \frac{h_c}{2} + \frac{h_t}{2} \quad (7.a)$$

$$\bar{z}_c = 0 \quad (7.b)$$

$$\bar{z}_b = -\frac{h_c}{2} - \frac{h_b}{2} \quad (7.c)$$

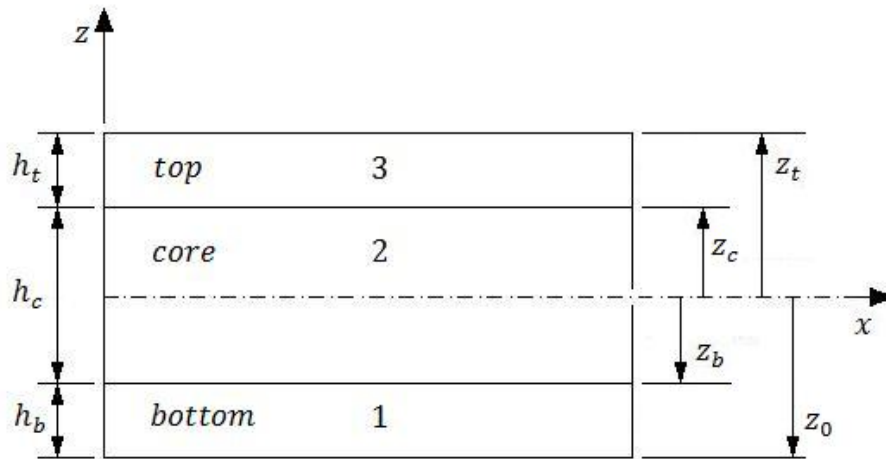


Figura 18: Numeração das camadas da sandwich.

As relações constitutivas para cada lâmina na sandwich podem ser expressas nas coordenadas locais e para tensão normal transversal nula como [8]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^k \quad (8)$$

Com,

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (9.a)$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12}$$

para materiais ortotrópicos, em que E_1 é o módulo de Young na direcção principal (1) do laminado (longitudinal), E_2 é o módulo de Young na direcção secundária (2) do laminado (transversal), ν_{12} é o coeficiente de Poisson e $\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$. Por fim G_{23} , G_{13} e G_{12} são os módulos de rigidez ao corte.

E, para materiais isotrópicos:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (9.b)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Em que E é o modulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

Mas como já foi referido este modelo é de viga, pelo que se consideram apenas as direcções x e z , logo as relações constitutivas em (8) ficam apenas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \quad (10)$$

Nas coordenadas globais da viga (x, z) as relações tensão-extensão podem ser escritas como:

$$\{\sigma\} = [T]^T [C] [T] \{\varepsilon\} = [Q] \{\varepsilon\} \quad (11.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (11.b)$$

Em que T é a matriz transformação necessária para converter a lei constitutiva (10) para as coordenadas globais (11) e é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

Com θ especificado na figura 19.

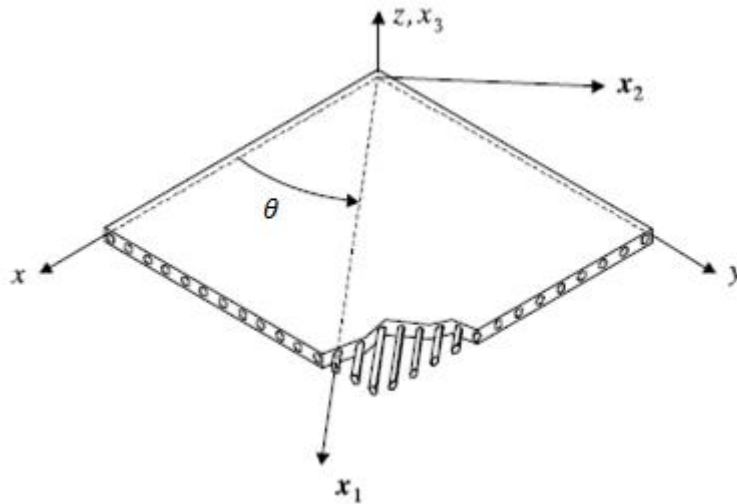


Figura 19: Lâmina de material ortotrópico. Coordenadas locais (x_1, x_2, x_3) e coordenadas globais (x, y, z) [26].

O campo de extensões associado ao campo de deslocamentos é obtido através da aplicação de uma matriz de operadores diferenciais $[L]$, pela relação:

$$\{\varepsilon\}^k = [L]\{u\}^k \quad (13.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}^k \quad (13.b)$$

Em seguida apresentam-se as formulações dos campos de tensões e extensões para cada uma das camadas da *sandwich*.

3.2.3. Núcleo

Recordando o campo de deslocamentos do núcleo, em forma compacta, dado pela equação (5):

$$\begin{cases} u^c = u_0^c + z\theta_x^c + z^2 u_0^{*c} + z^3 \theta_x^{*c} \\ w^c = w_0 \end{cases} \quad (14)$$

E aplicando a equação (13.b) ao campo de deslocamentos (14), fica-se com:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0^c}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x^c}{\partial x} + z^2 \frac{\partial u_0^{*c}}{\partial x} + z^3 \frac{\partial \theta_x^{*c}}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \theta_x^c + 2z u_0^{*c} + 3z^2 \theta_x^{*c} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (15.a)$$

Ou,

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x0}^c + z^2 \varepsilon_{x0}^{*c} + z \chi_{x0}^c + z^3 \chi_{x0}^{*c} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz0}^c + z^2 \gamma_{xz0}^{*c} + z \kappa_{xz0}^{*c} \end{cases} \quad (15.b)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0}^c &= \frac{\partial u_0^c}{\partial x}; & \varepsilon_{x0}^{*c} &= \frac{\partial u_0^{*c}}{\partial x}; \\ \chi_{x0}^c &= \frac{\partial \theta_x^c}{\partial x}; & \chi_{x0}^{*c} &= \frac{\partial \theta_x^{*c}}{\partial x}; \\ \gamma_{xz0}^c &= \theta_x^c + \frac{\partial w_0}{\partial x}; & \gamma_{xz0}^{*c} &= 3\theta_x^{*c}; & \kappa_{xz0}^{*c} &= 2u_0^{*c}; \end{aligned} \quad (15.c)$$

Os termos ε_{x0}^c e γ_{xz0}^c dizem respeito às extensões do plano médio do núcleo, χ_{x0}^c e κ_{xz0}^{*c} representam as curvaturas associadas aos termos de primeira ordem, ε_{x0}^{*c} e γ_{xz0}^{*c} representam as extensões associadas aos termos de segunda ordem e finalmente χ_{x0}^{*c} descreve as curvaturas associadas aos termos de terceira ordem [24].

Estes termos podem ainda ser agrupados em três vectores contendo contribuições de membrana (m), flexão (b-bending) e corte (s-shear), respectivamente:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_m\} &= \{\varepsilon_{x0}^c, \varepsilon_{x0}^{*c}\}^T \\ \{\varepsilon_b\} &= \{\chi_{x0}^c, \chi_{x0}^{*c}\}^T \\ \{\varepsilon_s\} &= \{\gamma_{xz0}^c, \gamma_{xz0}^{*c}, \kappa_{xz0}^{*c}\}^T \end{aligned} \quad (16)$$

A energia potencial do sistema é obtida avaliando o integral de volume no domínio da lâmina como:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon^k\}^t \{\sigma^k\} d\Omega - \left(\int_{\Omega} \{d\}^T \{f_b\} d\Omega + \int_S \{d\}^T \{f_s\} dS + \{d\}^T \{f_c\} \right) \quad (17)$$

Substituindo a expressão para as componentes da extensão dadas por (15) na expressão para a energia potencial (17), obtêm-se as seguintes resultantes de tensões:

$$[N_x \quad N_x^* \quad M_x \quad N_x^*] = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xx}\} (1, z^2, z, z^3) dz \quad (18.a)$$

$$[Q_x \quad Q_x^* \quad S_x] = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xz}\} (1, z^2, z) dz \quad (18.b)$$

Que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{\bar{\sigma}\} = [D] \{\bar{\varepsilon}\} \quad (19.a)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_m & D_c & 0 \\ D_c & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \quad (19.b)$$

Com:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_x, N_x^*\}^T \\ \{M\} &= \{M_x, M_x^*\}^T \\ \{Q\} &= \{Q_x, Q_x^*, S_x\}^T \end{aligned} \quad (19.c)$$

A matriz D é a matriz constitutiva desta camada do laminado e pode ser, tal como indicado, dividida nas suas contribuições de membrana (m), flexão (b-bending), corte (s-shear) e ainda um termo de acoplamento entre os termos de membrana e flexão (c):

$$\begin{aligned} [D_m] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11} \begin{bmatrix} 1 & z^2 \\ z^2 & z^4 \end{bmatrix} dz \\ [D_c] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11} \begin{bmatrix} z & z^3 \\ z^3 & z^5 \end{bmatrix} dz \\ [D_b] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11} \begin{bmatrix} z^2 & z^4 \\ z^4 & z^6 \end{bmatrix} dz \\ [D_s] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{55} \begin{bmatrix} 1 & z^2 & z \\ z^2 & z^4 & z^3 \\ z & z^3 & z^2 \end{bmatrix} dz \end{aligned} \quad (20)$$

3.2.4. Face Superior (*top*) e Face Inferior (*bottom*)

Para as faces o raciocínio é análogo ao usado para o núcleo. Partindo dos campos de deslocamentos da face superior e inferior, em forma compacta, dados pela equação (4):

$$\begin{cases} u^t = u_0^t + (z - \bar{z}_t)\theta_x^t \\ w^t = w_0 \end{cases} \quad (21.a)$$

$$\begin{cases} u^b = u_0^b + (z - \bar{z}_b)\theta_x^b \\ w^b = w_0 \end{cases} \quad (21.b)$$

Usando as relações de continuidade dos deslocamentos entre estas faces e o núcleo, dadas por (6.a) e (6.b), obtém-se uma relação entre a rotação da normal ao plano médio, os deslocamentos no plano e os restantes termos do núcleo, reduzindo-se assim em dois, os graus de liberdade do problema. Para a face superior tem-se:

$$u_0^c + \frac{h_c}{2}\theta_x^c + \frac{h_c^2}{4}u_0^{*c} + \frac{h_c^3}{8}\theta_x^{*c} = u_0^t + \left(\bar{z}_t - \frac{h_t}{2} - \bar{z}_t\right)\theta_x^t \quad (22.a)$$

$$\Rightarrow \theta_x^t = -\frac{2}{h_t}u_0^c + \frac{2}{h_t}u_0^t - \frac{h_c}{h_t}\theta_x^c - \frac{h_c^2}{2h_t}u_0^{*c} - \frac{h_c^3}{4h_t}\theta_x^{*c} \quad (22.b)$$

E para a face inferior:

$$u_0^c - \frac{h_c}{2}\theta_x^c + \frac{h_c^2}{4}u_0^{*c} - \frac{h_c^3}{8}\theta_x^{*c} = u_0^b + \left(\bar{z}_b + \frac{h_b}{2} - \bar{z}_b\right)\theta_x^b \quad (23.a)$$

$$\Rightarrow \theta_x^b = \frac{2}{h_b}u_0^c - \frac{2}{h_b}u_0^b - \frac{h_c}{h_b}\theta_x^c + \frac{h_c^2}{2h_b}u_0^{*c} - \frac{h_c^3}{4h_b}\theta_x^{*c} \quad (23.b)$$

A restante formulação é idêntica para ambas as faces. Assim, aplicando agora a equação (13.b) ao campo de deslocamentos anterior (21), fica-se com:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^k = \frac{\partial u_0^k}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x^k}{\partial x} - \bar{z}_k \frac{\partial \theta_x^k}{\partial x} \\ \gamma_{xz}^k = \theta_x^k + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \quad (24.a)$$

Ou,

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^k = \varepsilon_{xx0}^k + z\chi_{xx0}^k \\ \gamma_{xz}^k = \gamma_{xz0}^k \end{cases} \quad (24.b)$$

Onde:

$$\varepsilon_{x0}^k = \frac{\partial u_0^k}{\partial x} - \bar{z}_k \frac{\partial \theta_x^k}{\partial x}; \quad \chi_{x0}^k = \frac{\partial \theta_x^k}{\partial x}; \quad \gamma_{xz0}^k = \theta_x^k + \frac{\partial w_0}{\partial x}; \quad (24.c)$$

Os termos ε_{x0}^k e γ_{xz0}^k dizem respeito às extensões do plano médio da face, χ_{x0}^k representa a curvatura e $k = t, b$ é o índice de cada face (t - top face, b - bottom face) [24].

Estes termos podem ainda ser agrupados em três vectores contendo contribuições de membrana (m), flexão (b-bending) e corte (s-shear), respectivamente:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_m\}^k &= \{\varepsilon_{x0}^k\}^T \\ \{\varepsilon_b\}^k &= \{\chi_{x0}^k\}^T \\ \{\varepsilon_s\}^k &= \{\gamma_{xz0}^k\}^T \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo a expressão para as componentes da extensão dadas por (24) na expressão para a energia potencial (17), obtêm-se as seguintes resultantes de tensões:

$$[N_x \quad M_x]^k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xx}\}(1, z) dz \quad (26.a)$$

$$[Q_x]^k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \{\sigma_{xz}\}(1) dz \quad (26.b)$$

Que podem ser escritas da seguinte forma:

$$\{\bar{\sigma}\}^k = [D]^k \{\bar{\varepsilon}\}^k \quad (27.a)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_m & D_c & 0 \\ D_c & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_s \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_b \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}^k \quad (27.b)$$

Com:

$$\begin{aligned} \{N\} &= \{N_x\}^T \\ \{M\} &= \{M_x\}^T \\ \{Q\} &= \{Q_x\}^T \end{aligned} \quad (27.c)$$

A matriz D é a matriz constitutiva das faces e pode ser dividida nas suas contribuições de membrana (m), flexão (b-bending), corte (s-shear) e ainda um termo de acoplamento entre os termos de membrana e flexão (c);

$$\begin{aligned}
 [D_m] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}[1] dz \\
 [D_c] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}[z] dz \\
 [D_b] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{11}[z^2] dz \\
 [D_s] &= \int_{z_{k-1}}^{z_k} Q_{55}[1] dz
 \end{aligned} \tag{28}$$

Uma vez que ambas as faces são feitas do mesmo material e com as mesma propriedades, $[D]^t = [D]^b$, se tiverem a mesma espessura.

3.3. Formulação do elemento finito

3.3.1. Formulação variacional

Na derivação do princípio variacional equivalente às equações diferenciais que regem o sistema, assim como as condições fronteira naturais, é utilizado o princípio da energia potencial mínima, descrito por:

$$\Pi_k = U_k + W \tag{29}$$

Em que Π_k é a energia potencial de cada camada e U_k e W são, respectivamente, as energias internas associadas à extensão, em cada camada da *sandwich* e o trabalho das forças externas aplicadas:

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon^k\}^T \{\sigma^k\} d\Omega \tag{30.a}$$

$$W = - \left(\int_{\Omega} \{d\}^T \{f_b\} d\Omega + \int_S \{d\}^T \{f_s\} dS + \{d\}^T \{f_c\} \right) \tag{30.b}$$

Onde ε^k e σ^k são as componentes dos vectores de deformação e das tensões em (10), $\{d\}$, $\{f_b\}$, $\{f_s\}$ e $\{f_c\}$ são o vector de graus de liberdade do problema (especificado mais à frente), o vector de forças aplicadas no corpo (b - *body*), o vector de tracções de superfície (s - *surface tractions*) e o vector de forças concentradas (c), respectivamente. Por fim, Ω e S representam, respectivamente, o domínio de volume e de superfície da viga [24].

Fazendo a integração na direcção da espessura z nas equações (30.a) e (30.b) e substituindo o resultado na equação (29), obtém-se a equação variacional do movimento para a viga *sandwich*, cuja solução foi obtida através do método dos elementos finitos, modelando um elemento de viga com continuidade C^0 , com dois nós e inicialmente por nove graus de liberdade por nó, como mostra a figura 20. Tal foi feito por inspecção do campo de deslocamentos do núcleo e das faces dados por (4) e (5), $\{\mathbf{u}^k\} = \{u^k, w^k\}^T$, que pode ser apresentado da seguinte forma:

$$\{\mathbf{u}^k\} = [Z]^k \{d\} \quad (31)$$

Onde o vector de graus de liberdade $\{d\}$ é dado por:

$$\{d\} = \{u_0^c \quad u_0^t \quad u_0^b \quad w_0 \quad \theta_x^c \quad \theta_x^t \quad \theta_x^b \quad u_0^{*c} \quad \theta_x^{*c}\}^T \quad (32)$$

E $[Z]^k$ são matrizes obtidas usando as equações (4) e (5), juntamente com as equações (22.b) e (23.b).

No entanto, tal como foi referido anteriormente, as relações de continuidade dos deslocamentos entre as faces superior, inferior e o núcleo, dadas por (6.a) e (6.b), permitem retirar uma relação entre a rotação da normal ao plano médio, os deslocamentos no plano das faces e os restantes termos do núcleo, como apresentado em (22.b) e (23.b). Deste modo, reduz-se em dois os graus de liberdade do problema, passando dos nove iniciais, em (32), para apenas sete por nó:

$$\{d\} = \{u_0^c \quad u_0^t \quad u_0^b \quad w_0 \quad \theta_x^c \quad u_0^{*c} \quad \theta_x^{*c}\}^T \quad (33)$$

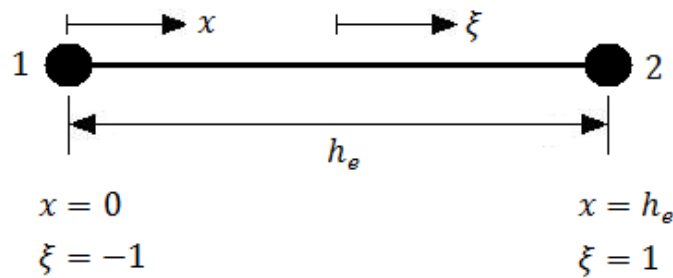


Figura 20: Elemento de viga.

Assim, o campo de deslocamentos generalizado do elemento, $\{d^e\}$, pode ser aproximado usando funções interpoladoras, representadas por uma matriz de funções de forma, $[N_i]$, associadas ao nó i e pelo vector de graus de liberdade do nó i , $\{d_i^e\}$:

$$\{d^e\} = \sum_{i=1}^{NN} [N_i] \{d_i^e\} = [N] \{a^e\} \quad (34)$$

Com:

$$\{d^e\} = \{u_0^{c^e} \quad u_0^{t^e} \quad u_0^{b^e} \quad w_0^e \quad \theta_x^{c^e} \quad u_0^{*c^e} \quad \theta_x^{*c^e}\}^T \quad (35)$$

$$[N_i] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (36.a)$$

$$[N] = \sum_{i=1}^{NN} [N_i] = [N_1, N_2] \quad (36.b)$$

$$\{d_i^e\} = \{u_{0i}^{c^e}, u_{0i}^{t^e}, u_{0i}^{b^e}, w_{0i}^e, \theta_{xi}^{c^e}, u_{0i}^{*c^e}, \theta_{xi}^{*c^e}\}^T \quad (37)$$

$$\{a^e\} = \{d_1^e, d_2^e\}^T \quad (38)$$

Em que NN é o número de nós do elemento (dois neste caso), logo $i = 1, 2$ é o índice do nó, como esquematizado na figura 20 e, assim, N_1 e N_2 são as funções de forma **[25]**, lineares e por isso de continuidade C^0 , dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{h_e} \\ N_2 &= \frac{x}{h_e} \end{aligned} \quad (39)$$

Sendo h_e o comprimento do elemento.

Sabendo agora o vector de deslocamentos generalizado $\{d^e\}$ é possível escrever as extensões dadas pelas equações (16) e (25) para o núcleo e para as faces, respectivamente, em função dos graus de liberdade de cada nó:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon_m^e\}^k &= \sum_{i=1}^{NN} [B_{mi}]^k \{d_i^e\} = [B_m]^k \{a^e\} \\ \{\varepsilon_b^e\}^k &= \sum_{i=1}^{NN} [B_{bi}]^k \{d_i^e\} = [B_b]^k \{a^e\} \\ \{\varepsilon_s^e\}^k &= \sum_{i=1}^{NN} [B_{si}]^k \{d_i^e\} = [B_s]^k \{a^e\}\end{aligned}\quad (40)$$

Em que B_m , B_b e B_s são matrizes de deformação cujas sub-matrizes são dadas por:

Para o núcleo:

$$\begin{aligned}[B_{mi}]^c &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \\ [B_{bi}]^c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\ [B_{si}]^c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3N_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2N_i & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (41)$$

Para a face superior:

$$\begin{aligned}[B_{mi}]^t &= \begin{bmatrix} \frac{2\bar{z}_t}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial x} - \frac{2\bar{z}_t}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_c \bar{z}_t}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{h_c^2 \bar{z}_t}{2h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{h_c^3 \bar{z}_t}{4h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\ [B_{bi}]^t &= \begin{bmatrix} -\frac{2}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{2}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{h_c}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c^2}{2h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c^3}{4h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\ [B_{si}]^t &= \begin{bmatrix} -\frac{2N_i}{h_t} & \frac{2N_i}{h_t} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c N_i}{h_t} & -\frac{h_c^2 N_i}{2h_t} & -\frac{h_c^3 N_i}{4h_t} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (42)$$

E finalmente para a face inferior:

$$\begin{aligned}
[B_{mi}]^b &= \begin{bmatrix} -\frac{2\bar{z}_b}{h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{2\bar{z}_b}{h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{h_c \bar{z}_b}{h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c^2 \bar{z}_b}{2h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{h_c^3 \bar{z}_b}{4h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\
[B_{bi}]^b &= \begin{bmatrix} \frac{2}{h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{2}{h_t} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -\frac{h_c}{h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{h_c^2}{2h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c^3}{4h_b} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \\
[B_{si}]^b &= \begin{bmatrix} \frac{2N_i}{h_b} & 0 & -\frac{2N_i}{h_b} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{h_c N_i}{h_b} & \frac{h_c^2 N_i}{2h_b} & -\frac{h_c^3 N_i}{4h_b} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{43}$$

Estas matrizes para as faces são obtidas após substituição das relações de continuidade entre estas e o núcleo (que originam (22) e (23)) no campo de deslocamentos (24).

Pode-se agora proceder à construção do sistema de equilíbrio em forma matricial:

$$[K_{uu}^e] \{a^e\} = \{F_u^e\} \tag{44}$$

Em que K é a matriz de rigidez do elemento dada por [24, 26]:

$$\begin{aligned}
[K_{uu}^e] &= \sum_{k=c,t,b} \int_{-1}^1 \left([B_m^e]^{kT} [D_m]^k [B_m^e]^k + [B_b^e]^{kT} [D_c]^k [B_m^e]^k \right. \\
&\quad \left. + [B_m^e]^{kT} [D_c]^k [B_b^e]^k + [B_b^e]^{kT} [D_b]^k [B_b^e]^k \right. \\
&\quad \left. + [B_s^e]^{kT} [D_s]^k [B_s^e]^k \right) \det[J] d\xi
\end{aligned} \tag{45}$$

Em que ξ é a coordenada natural do elemento e J é o jacobiano da transformação entre x e ξ , que é dada por [25]:

$$x = \frac{1}{2} h_e (1 + \xi) \tag{46}$$

3.4. Shear Locking

Normalmente, entre os modelos mais simples para representação de vigas e placas encontram-se os elementos de continuidade C^0 , ou seja, com funções interpoladoras lineares, baseados em teorias de primeira ordem e superior, como o que foi utilizado neste trabalho. Infelizmente, estes não representam com precisão o comportamento da viga à medida que a razão $\frac{L}{h_T}$ (esbelteza), em que L é o comprimento da viga e h_T é a espessura total, vai aumentando, isto é, à medida que se vai aproximando do modelo de viga fina. Para vigas finas as extensões de corte ε_{xz} têm de desaparecer e os elementos baseados em teorias de primeira ordem e superior tornam-se excessivamente rijos, acarretando deslocamentos que são demasiado pequenos quando comparados com a solução real. A este tipo de comportamento dá-se o nome de *shear locking*.

Este fenómeno acontece porque a energia devido às extensões de corte transversal tem de ser nula e numericamente isto é equivalente a que o produto da matriz de rigidez de termos de corte com o vector de deslocamentos seja zero, pelo que para se obter uma solução não trivial, a matriz de rigidez com os elementos de corte tem de ser singular. Isto é conseguido usando uma ordem de integração inferior à necessária para obter os valores exactos dos integrais, recorrendo assim à técnica de integração reduzida para os termos de corte na matriz de rigidez do elemento [8].

Existem vários métodos numéricos para conseguir esta integração reduzida, mas optou-se por utilizar a quadratura de Gauss-Legendre com um ponto de Gauss para os termos de corte e também um ponto de Gauss para os restantes termos da matriz de rigidez do elemento (45), isto porque a matriz B dos elementos de membrana e de flexão (B_{mi} e B_{bi}) é constituída por polinómios de grau zero, necessitando assim de apenas um ponto para conseguir a sua integração. Toda a descrição deste método pode ser encontrada em detalhe na referência [25].

Assim e dividindo a matriz $[K_{uu}^e]$ nos seus termos de membrana e flexão (mb) e de corte (s):

$$[K_{uu}^e] = \sum_{k=c,t,b} \int_{-1}^1 ([K_{uu}^e(\xi)]_{mb} + [K_{uu}^e(\xi)]_s) \det[J] d\xi \quad (47)$$

Em que:

$$[K_{uu}^e(\xi)]_{mb} = [B_m^e]^{kT} [D_m]^k [B_m^e]^k + [B_b^e]^{kT} [D_c]^k [B_m^e]^k + [B_m^e]^{kT} [D_c]^k [B_b^e]^k + [B_b^e]^{kT} [D_b]^k [B_b^e]^k \quad (48.a)$$

$$[K_{uu}^e(\xi)]_s = [B_s^e]^{kT} [D_s]^k [B_s^e]^k \quad (48.b)$$

Aplica-se a quadratura de Gauss-Legendre com um ponto, ($r = 1$), para os termos de membrana e flexão:

$$\int_{-1}^1 ([K_{uu}^e(\xi)]_{mb}) d\xi = \sum_{i=1}^r [K_{uu}^e(\xi_i)]_{mb} w_i \quad (49)$$

Em que o ponto de base é $\xi_1 = 0$ e o factor de peso é $w_1 = 2$.

E para os termos de corte aplica-se a quadratura na mesma com apenas um ponto, ($r = 1$):

$$\int_{-1}^1 ([K_{uu}^e(\xi)]_s) d\xi = \sum_{i=1}^r [K_{uu}^e(\xi_i)]_s w_i \quad (50)$$

Em que, novamente, o ponto de base é $\xi_1 = 0$ e o factor de peso é $w_1 = 2$.

4. Validação do modelo

Definida a formulação do elemento, o objectivo seguinte passou por fazer a sua implementação, usando o programa Matlab® para manipulação, construção das matrizes e várias operações necessárias como resolução do sistema de equações, e pós-processamento dos resultados.

Procedeu-se assim à validação da formulação das matrizes de rigidez e de todo o elemento de viga através da análise de vários problemas de estática. Utilizaram-se para esse efeito vários resultados experimentais de diversos ensaios que foram conduzidos com o intuito de estudar o comportamento de vigas *sandwich* para aplicação nos mais diversos projectos.

Primeiro estudou-se um caso hipotético de um ensaio à flexão em três pontos para comparação dos resultados obtidos com o modelo híbrido de viga e um modelo com teoria simplificada FSDT, tendo como referência a teoria clássica de Euler-Benoulli.

Em seguida, estudou-se o caso de vigas *sandwich* para aplicação em tabuleiros de pontes, usando ensaios à flexão em quatro pontos.

4.1. Ensaio à flexão em três pontos para comparação de teorias

Este caso tem como principal objectivo fazer uma análise comparativa do modelo de viga, principal foco desta tese, com outras teorias e modelos já existentes, calculando para isso a deformada máxima de uma viga simplesmente apoiada com uma carga a meio-vão, mais conhecido por ensaio de flexão em 3 pontos de acordo com a norma ASTM-C393 [31] e como esquematizado na figura 21.

4.1.1. Procedimento experimental

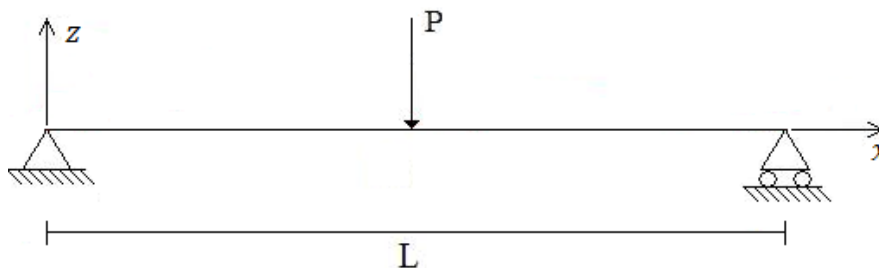


Figura 21: Esquema do problema para validação do elemento.

A carga aplicada foi de $P = 10\text{ N}$ e as condições fronteira, tendo em conta os graus de liberdade do elemento são:

$$CF = \begin{cases} w_0(0) = 0 \\ u_0^b(0) = 0 \\ w_0(L) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Para termos de comparação usaram-se duas teorias distintas também programadas recorrendo ao Matlab®. A clássica, mais conhecida por teoria de vigas de Euler-Bernoulli cuja formulação e expressões para deformada e deformada máxima podem ser encontradas na referência [27] e ainda uma teoria simplificada de viga *sandwich* [28] e implementada em elementos finitos por *Sainsbury* et al. [29], denominada daqui em diante por TSVS.

Para os casos estudados por elementos finitos, isto é, para o elemento de viga alvo do principal interesse neste trabalho e para o elemento TSVS foram inicialmente feitos estudos de convergência dos resultados que mostraram que a utilização de 20 elementos (com a ajuda da integração reduzida) já comportava a solução final. Deste modo, e como o esforço computacional não era muito significativo, optou-se por retirar os resultados apresentados seguidamente através da utilização de uma malha de 40 elementos para ambos os modelos.

Começou-se então por analisar o caso de viga homogénea, isto é, em que as faces e o núcleo do elemento simplificado de primeira ordem (TSVS) e de viga são feitos do mesmo material e com as mesmas propriedades (consideraram-se todas as camadas isotrópicas) e cujos resultados foram comparados com a teoria clássica para materiais isotrópicos. Os dados mais relevantes considerados nesta análise são:

P	10 N
$E = E_c = E_t = E_b$	69 GPa
ν	0.3

Tabela 1: Dados para análise da viga.

4.1.2. Resultados e discussão

Assim, para vários valores de $\frac{L}{h_T}$ (esbelteza), em que L é o comprimento da viga e h_T é a espessura total, os resultados obtidos pelos modelos TSVS e de viga relativamente à teoria de Euler-Bernoulli estão apresentados na figura 22 e nas figuras 24 a 26, tendo sido todos os valores adimensionalizados relativamente ao resultados da deformada obtidos pela teoria clássica:

No caso de viga homogénea (Figura 22):

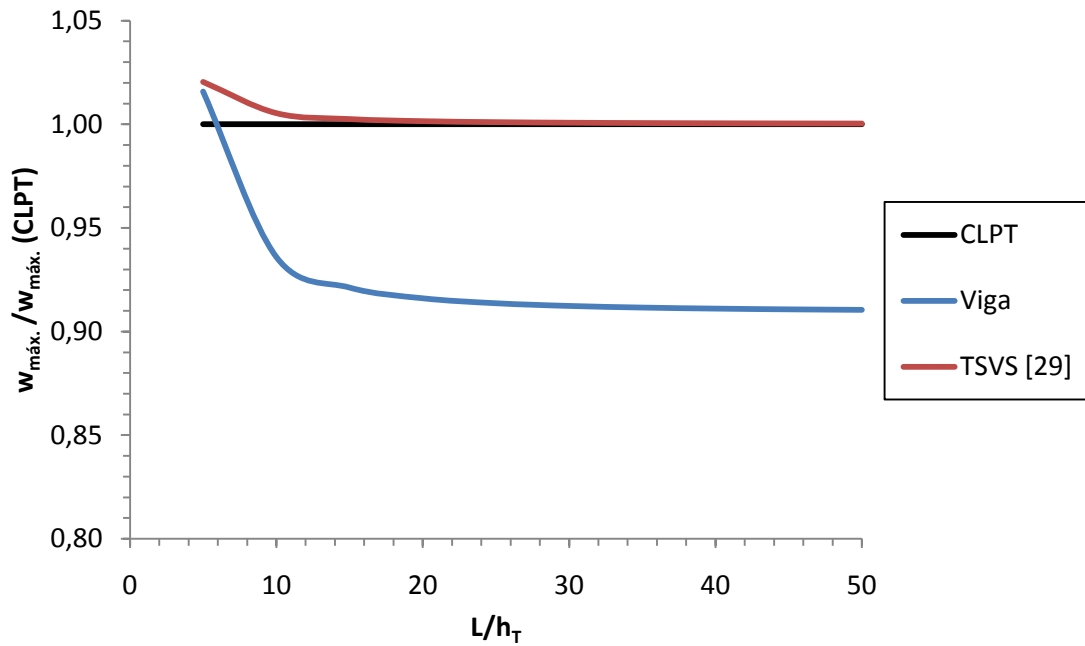


Figura 22: Evolução da deformada máxima relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza.

Em seguida passou-se para o caso de uma viga *sandwich*, para o qual se testaram diminuições progressivas da rigidez do núcleo, onde foram também testadas várias razões entre a espessura do núcleo e da face superior ($\frac{h_c}{h_t}$) (ou inferior, uma vez que neste caso estas têm o mesmo tamanho). Analisaram-se os casos de $\frac{h_c}{h_t} = 5.0, 1.0$ e 0.2 .

Para termos de comparação utilizou-se a teoria de vigas clássica, mas aplicada ao caso em que estas são constituídas por materiais diferentes, como especificado em [27]. Segundo esta referência a deformada máxima é dada por:

$$z_{máx} = -\frac{PL^3}{48EI} \quad (52)$$

Calculando-se primeiro a razão de módulos de rigidez:

$$n = \frac{E_c}{E_t} \quad (53)$$

Multiplica-se n pela largura b da viga na zona do núcleo, que neste caso é igual à das faces e obtém-se a nova largura da zona do núcleo, b'_c .

$$b'_c = n \times b \quad (54)$$

Deste modo tem-se a geometria da secção transversal equivalente, denominada de secção homogeneizada, pois é agora constituída toda pelo mesmo material, o das faces (Figura 23).

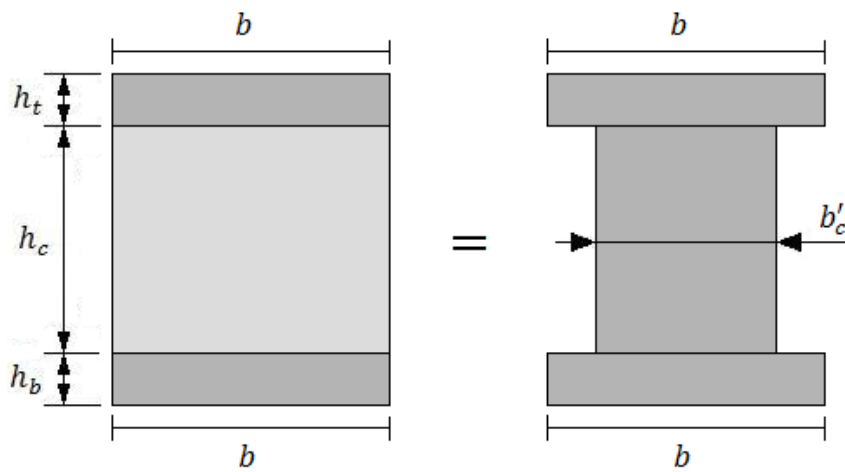


Figura 23: Secção homogeneizada de uma viga sandwich.

Assim, o momento de inércia a aplicar na expressão da deformada (52) é dado por :

$$I = 2 \frac{b \times h_t^3}{12} + 2bh_t \times \left(\frac{h_t}{2} + \frac{h_c}{2} \right)^2 + \frac{b'_c \times h_c^3}{12} \quad (55)$$

Deste modo e para o caso de $E_t = E_b = 69 \text{ GPa}$ e $E_c = 6.9 \text{ GPa}$ (Figura 24) tem-se:

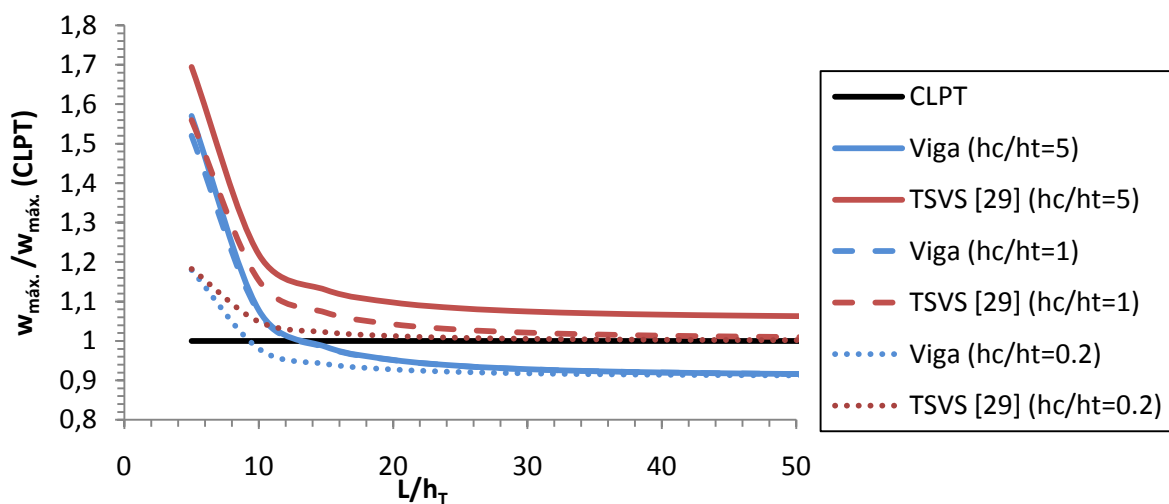


Figura 24: Evolução da deformada máxima com $E_c = 6.9 \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $\frac{h_c}{h_t}$.

Para o caso de $E_t = E_b = 69 \text{ GPa}$ e $E_c = 0.069 \text{ GPa}$ (Figura 25):

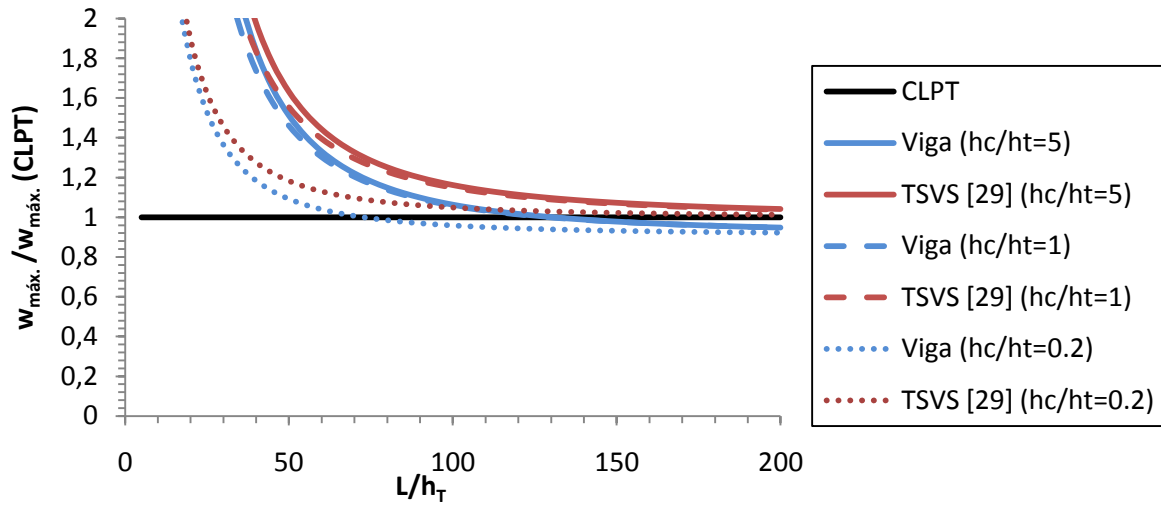


Figura 25: Evolução da deformada máxima com $E_c = 0.069 \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $\frac{h_c}{h_t}$.

E para o caso de $E_t = E_b = 69 \text{ GPa}$ e $E_c = 0.069 \times 10^{-3} \text{ GPa}$ (Figura 26):

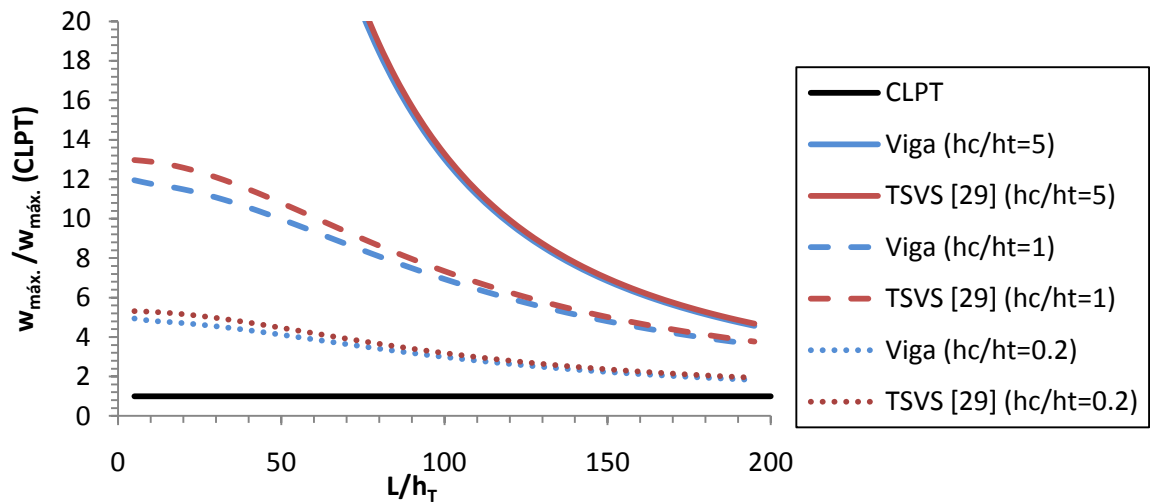


Figura 26: Evolução da deformada máxima com $E_c = 0.069 \times 10^{-3} \text{ GPa}$, relativamente à teoria clássica para diferentes valores de esbelteza e de razão $\frac{h_c}{h_t}$.

Como se pode concluir pela observação dos gráficos e como já era expectável, os modelos híbrido de viga e TSVS apresentam valores muito próximos do modelo de teoria

clássica quando o núcleo tem a mesma rigidez das faces, sendo o erro relativo da viga HSDT de cerca de 9%.

Por outro lado, à medida que se vai diminuindo a rigidez do núcleo, a convergência dos valores da deformada para a solução da teoria clássica vai ocorrendo para valores cada vez maiores da razão $\frac{L}{h_T}$. Isto é justificado, primeiramente, pelo facto dos efeitos de corte, nomeadamente uma maior distorção transversal, que estão mais presentes no núcleo, aumentarem aquando da diminuição da rigidez e serem mais significativos em vigas curtas e, em segundo lugar, porque a teoria clássica não consegue prever estes efeitos, dando assim azo ao aumento de discrepância entre os valores obtidos por esta e pelos modelos de viga e TSVS que conseguem ter estes fenómenos em conta. De notar ainda que o efeito da espessura relativa do núcleo também é muito importante, pois para razões de $\frac{h_c}{h_t}$ maiores os efeitos de corte vão ser significativos, como consequência de um núcleo maior, pelo que a convergência para os valores da teoria clássica é mais lenta. À medida que esta razão diminui a influência do corte no comportamento da viga também diminui e os resultados dados pelos elementos de viga e TSVS convergem muito mais rapidamente para a solução clássica, que, como já foi referido, não prevê estes efeitos.

4.2. Ensaios experimentais de vigas *sandwich* à flexão em quatro pontos para aplicação em tabuleiros de pontes

Nestes ensaios experimentais conduzidos por Teixeira de Freitas et al. [18] o principal objectivo foi estudar a viabilidade de reforçar tabuleiros de pontes metálicas com uma estrutura *sandwich*. A necessidade deste reforço advém do desgaste por fadiga causado pelo crescente tráfego de veículos cada vez mais pesados.

Este estudo focou-se numa solução promissora para este problema, denominada de *Sandwich Plate System* (SPS), que consiste numa estrutura *sandwich* constituída por duas faces de aço, separadas por um núcleo sólido de poliuretano, Vincent et al. [19]. Em 2007, Feldman et al., [20] realizou investigação experimental e numérica para este tipo de estruturas com aplicação na ponte Schönwasserpark na Alemanha.

4.2.1. Materiais e provetes

Como mostrado em [18], o aço utilizado nas faces da estrutura *sandwich* é o Aço S355, cujas características estão dadas na tabela 2. O núcleo tal como já foi referido é de poliuretano fabricado pela Elastogran GmbH. Na tabela 3 apresentam-se as características dadas pelo fabricante.

Aço S355	
σ_{ced}	355 MPa
σ_R	510 MPa
E	210 GPa
ν	0.3

Tabela 2: Características do Aço S355.

Poliuretano			
ρ	1150 kg/m ³		
Temperatura	-20°C	23°C	60°C
E	1164 MPa	874 MPa	436 MPa
σ_{ced}	23 MPa	16.1 MPa	8.1 MPa
ν	0.36		

Tabela 3: Características do poliuretano.

Os provetes utilizados nos ensaios à flexão são vigas de estruturas *sandwich* que pretendem representar o reforço real do tabuleiro metálico da ponte. Assim, para a espessura da face inferior usaram-se valores de 10 e 12 mm, pois são as espessuras típicas dos tabuleiros na Holanda para pontes fixas e móveis, respectivamente. Para a face superior da *sandwich* usaram-se valores de 5 e 6 mm e, finalmente, para o núcleo, a espessura foi escolhida tendo em conta as restrições de peso da estrutura, tendo-se por isso optado por variar os valores entre 15 e 30 mm [18].

Com base nestas condicionantes foram fabricados cinco provetes usando combinações diferentes das espessuras. A tabela 4 mostra as características dos provetes, nomeadamente a razão da espessura do núcleo com a espessura média das faces, $\frac{h_c}{\bar{h}_f}$.

Provete	h_b (mm)	h_c (mm)	h_t (mm)	$\frac{h_c}{\bar{h}_f}$
S12305	12	30	5	3.5
S12155	12	15	5	1.8
S12206	12	20	6	2.2
S12306	12	30	6	3.3
S10306	10	30	6	3.8

Tabela 4: Características dos provetes.

4.2.2. Procedimento experimental

Foram realizados ensaios ao material do núcleo a três temperaturas diferentes (-10°C, Temperatura Ambiente (TA) e +50°C), segundo a norma ISO-527 (1996) [30].

O comportamento elástico das vigas sandwich foi testado também para as três temperaturas já mencionadas através de um ensaio estático à flexão em quatro pontos, de acordo com a norma ASTM-C393 [31]. O objectivo de fazer os testes a três temperaturas diferentes serve para testar diferentes valores de rigidez do núcleo e conseqüente comportamento das vigas quando sujeitas a condições reais. Esta norma permite a determinação das propriedades de vigas *sandwich* planas sujeitas à flexão e pode ainda ser conduzida de forma a determinar parâmetros como a rigidez à flexão, a tensão de corte no núcleo, tensão de flexão nas faces e mesmo os módulos de rigidez ao corte do núcleo.

Para os ensaios *Teixeira de Freitas et al.* [18], usou dois tipos de vigas diferentes: vigas curtas e vigas longas. Para o ensaio de vigas curtas a configuração do carregamento foi de carga a um quarto da envergadura (L) da viga, com 400 mm entre suportes e 200 mm entre pontos de aplicação da carga (P). Para as vigas longas a configuração do carregamento foi de um terço da envergadura, com 750 mm entre suportes e 250 mm entre pontos de carga. Na figura 27 apresentam-se as configurações de carregamento para as vigas curtas em *a)* e longas em *b)*.

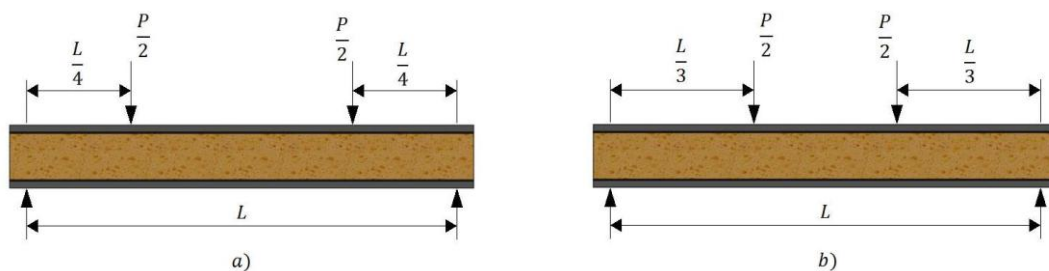


Figura 27: Tipo de carregamento à flexão em quatro pontos da norma ASTM-C393: a) Carregamento para vigas curtas; b) Carregamento para vigas longas.

Os ensaios foram conduzidos dentro de uma câmara de ambiente controlável com uma máquina de teste com carregamento máximo de 100 kN. Na figura 28 mostra-se a montagem de toda a estrutura do ensaio e é de notar que a viga *sandwich* se encontra posicionada ao contrário (face inferior em cima) porque o actuador da carga se encontra na zona inferior. Os valores da deformada a meio-vão foram medidos através de dois potenciômetros (um de cada lado da viga) e as extensões nas faces e no núcleo através de extensómetros, como pode ser visto na figura 29.

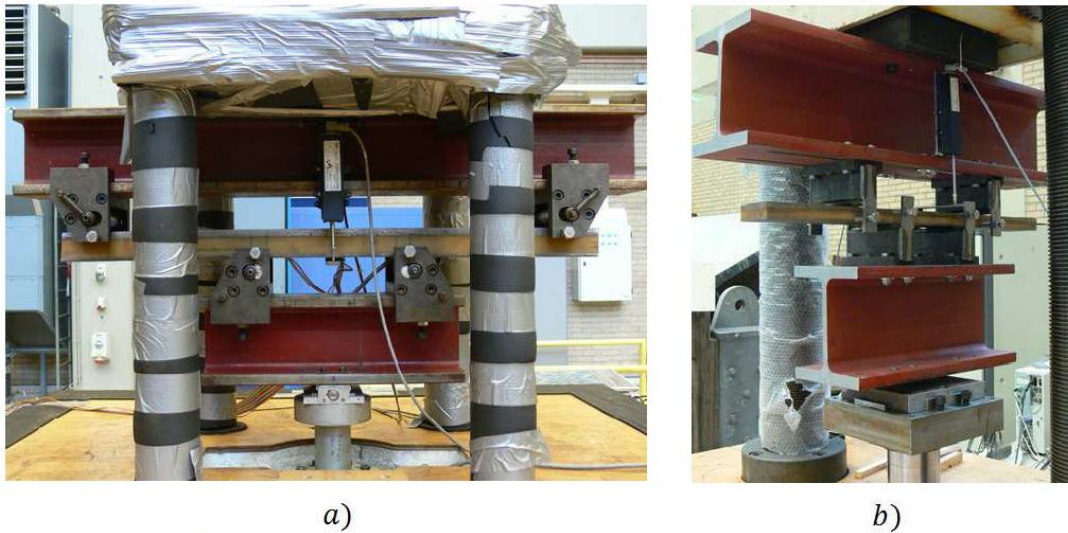


Figura 28: Montagem para ensaios à flexão. Configuração para: a) vigas longas; b) vigas curtas, [18].

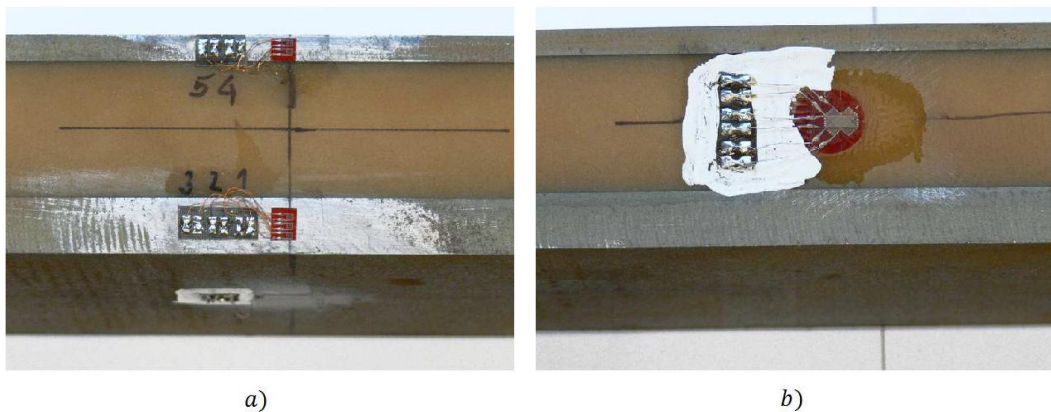


Figura 29: Extensômetros aplicados: a) nas faces b) no núcleo, [18].

4.2.3. Resultados e discussão

Ressalva-se antes de mais que em termos qualitativos as conclusões aqui apresentadas estão já bem documentadas na referência [18]. Não deixa no entanto de fazer sentido expô-las de um modo geral para melhor compreender a física do problema, assim como da aplicação a que estão inerentes estes ensaios. Em todo o caso, a maior ênfase, dado que é o principal motivo de interesse desta dissertação, será atribuída à comparação dos resultados do modelo de viga para estes casos com os obtidos através de outras teorias e, nomeadamente, com os valores retirados experimentalmente.

4.2.3.1. Comportamento do material do núcleo

Teixeira de Freitas et al. [18], começou por testar o núcleo para as três temperaturas consideradas e concluiu que o poliuretano é mais rígido a temperaturas mais baixas, sendo o módulo de Young mais alto cerca de 45% a -10°C e mais baixo cerca de 35% a 50°C , quando comparado com a temperatura ambiente. A tabela 5 mostra os valores médios que se obtiveram e que como se pode constatar estão de acordo com os dados fornecidos pelo fabricante.

Temperatura	E (MPa)	σ_{ced} (MPa)
-10°C	1049	22
TA	721	25
50°C	471	17.7

Tabela 5: Propriedades médias do material do núcleo.

4.2.3.2. Comportamento da viga à flexão - Rigidez

Usando os valores dados pela tabela 5 procedeu-se à simulação computacional destes ensaios, cujos resultados experimentais para a configuração de vigas longas a temperatura ambiente estão apresentados na figura 30 e os obtidos para o presente elemento de viga e para o elemento TSVS nas figuras 31 e 32, respectivamente.

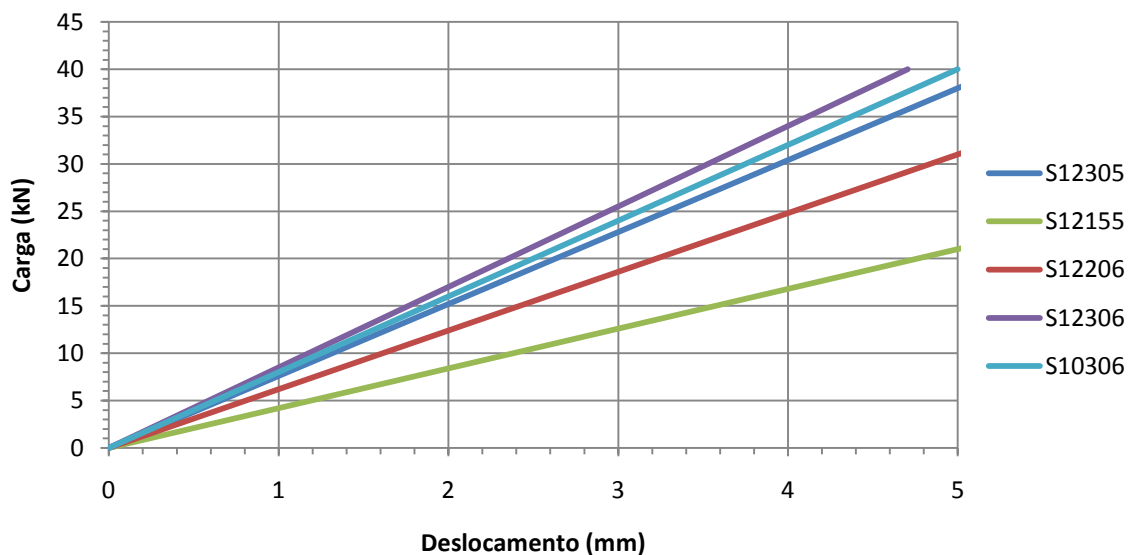


Figura 30: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a temperatura ambiente para vigas longas.

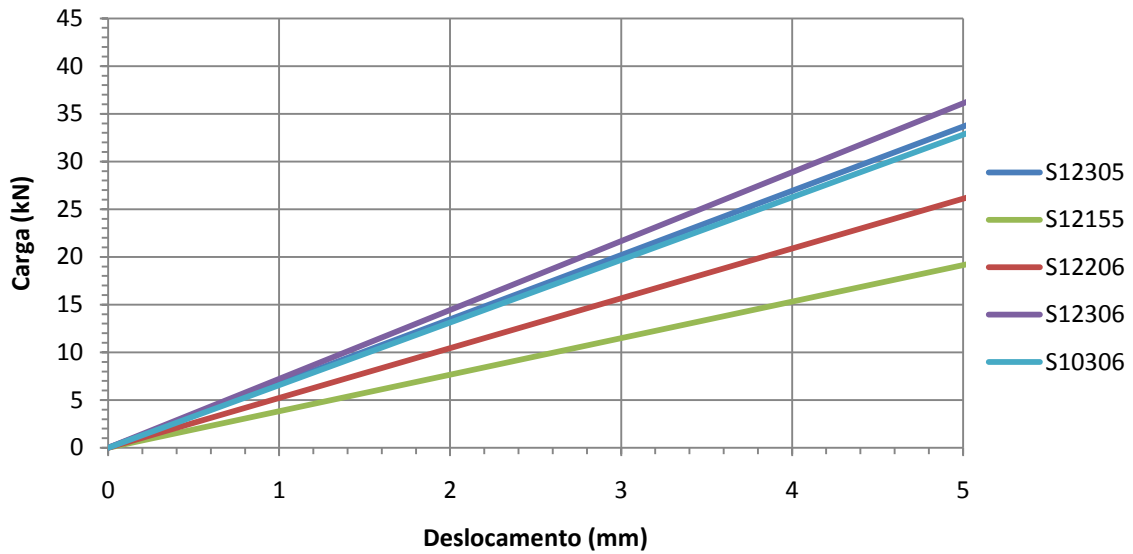


Figura 31: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a temperatura ambiente para vigas longas.

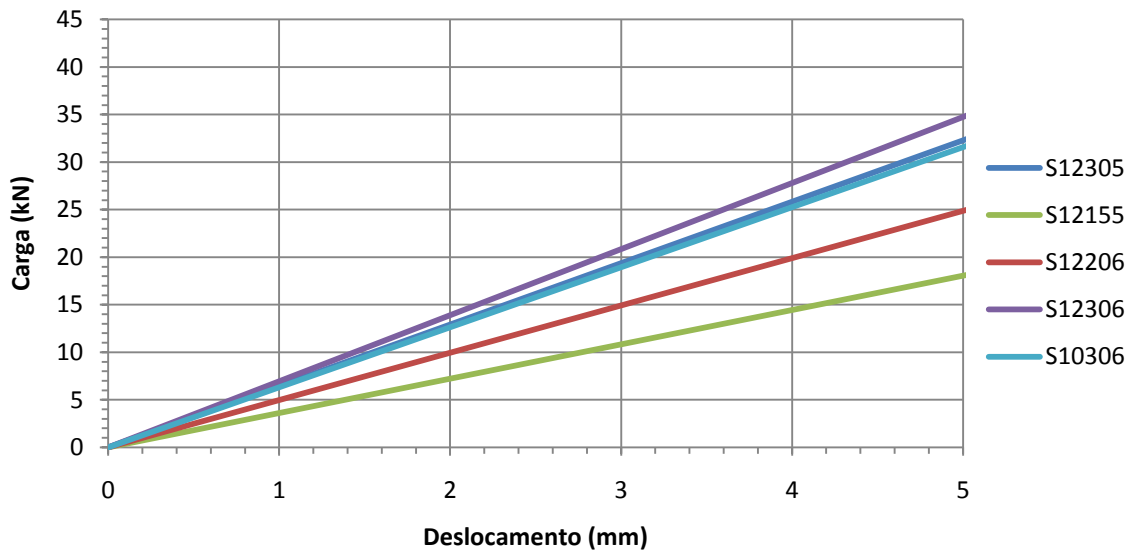


Figura 32: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a temperatura ambiente para vigas longas.

Por análise destes gráficos pode-se concluir que a razão entre as espessuras do núcleo e das faces influencia a rigidez das diferentes geometrias. Os provetes com maiores razões (S12305; S12306; S10306) têm maior rigidez que os que têm uma razão de espessura núcleo-faces menor (S12155 e S12206). Constata-se que reduzir a espessura de uma das faces em 1 ou 2 mm (como no caso da passagem de S12306 para S12305 e S10306) tem menos impacto na rigidez da viga que reduzir a espessura do núcleo em 10 ou 15 mm (como no caso da passagem de S12306 para S12155 e S12206). Por fim, e tendo em conta que 1 mm de aço tem aproximadamente o mesmo peso que 5 mm de poliuretano para a mesma área, a redução de espessura desses 5 mm no núcleo é muito mais severa em termos de rigidez de S12206 para

S12155 que uma redução de 1 mm nas faces de S10306 para S12305. Assim, se o objectivo do projecto passar por uma redução de peso na estrutura, a melhor solução é diminuir a espessura do aço ao invés do núcleo de poliuretano, enquanto se o objectivo for aumentar a rigidez da estrutura, deve-se optar por adicionar espessura ao núcleo em vez de nas faces.

Relativamente aos resultados obtidos pelos elementos de viga e TSVS verifica-se por inspecção da tabela 6 e da figura 33 que os valores da rigidez, K , ($K = \frac{\text{carga}}{\text{deslocamento}}$), para o elemento de viga estão mais de acordo com os obtidos experimentalmente, acarretando um erro médio de 14% e 18% para a TSVS. Coloca-se ainda na tabela, para efeitos de comparação, os valores obtidos pela simulação em elementos finitos tridimensionais, (*EFT*), por *Teixeira de Freitas et al.* [18] e ainda os resultados obtidos utilizando um elemento de placa *sandwich* de ordem superior como apresentado por *Araújo et al.*, em [24], onde o erro médio obtido pela viga relativamente a esta está na ordem dos 1.1% e relativamente aos *EFT* é de 0.7%.

Provete	K (kN/mm)				
	<i>Experimental</i> [18]	<i>Viga</i>	<i>TSVS</i> [29]	<i>EFT</i> [18]	<i>Placa</i> [24]
S12305	7.6	6.7	6.5	6.8	6.8
S12155	4.2	3.8	3.6	3.8	3.8
S12206	6.2	5.2	5.0	5.2	5.2
S12306	8.5	7.2	6.9	7.3	7.4
S10306	8.0	6.6	6.3	6.6	6.6

Tabela 6: Resultados da rigidez de vigas longas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

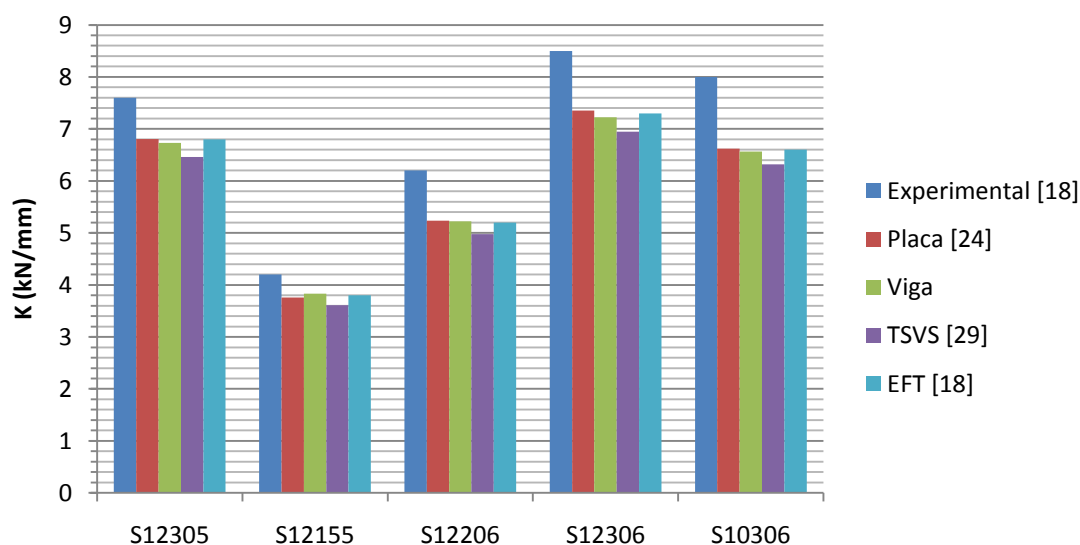


Figura 33: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Da figura 34 à figura 37 e na tabela 7 apresentam-se os gráficos da carga-deslocamento e os valores de rigidez para configuração de vigas longas, para a temperatura de -10°C .

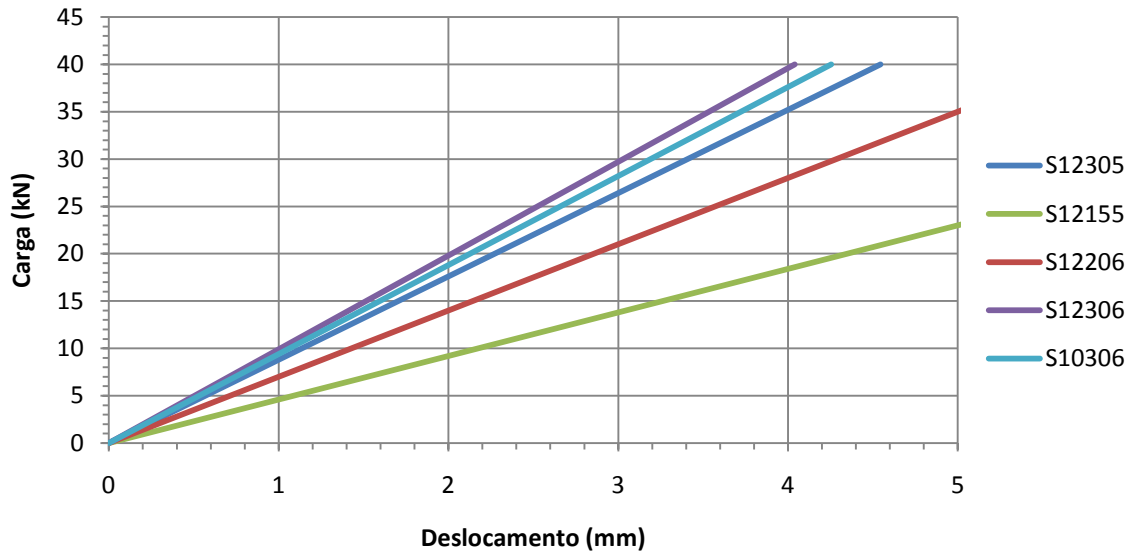


Figura 34: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a -10°C para vigas longas.

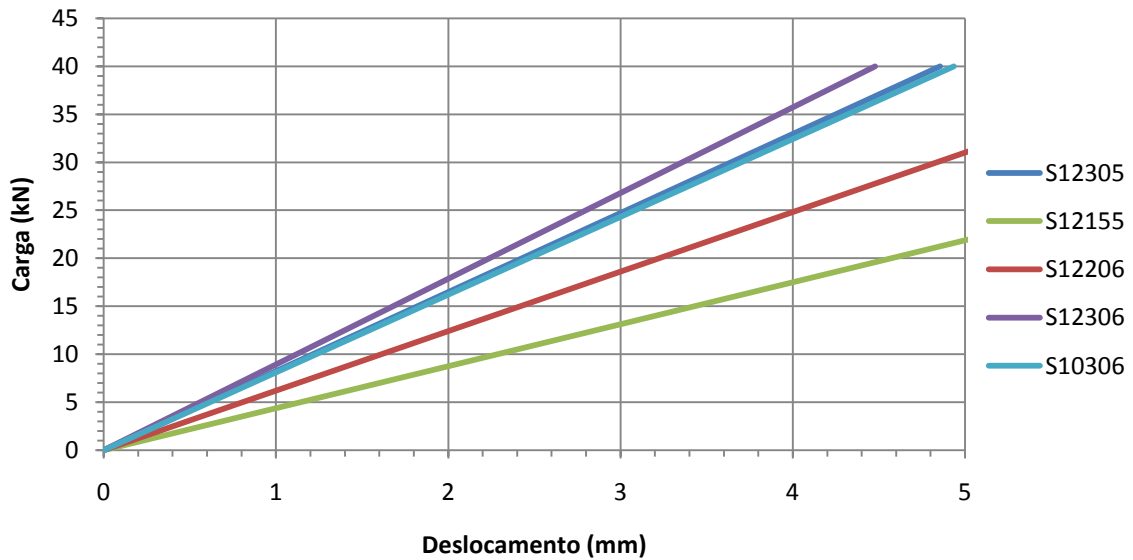


Figura 35: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a -10°C para vigas longas.

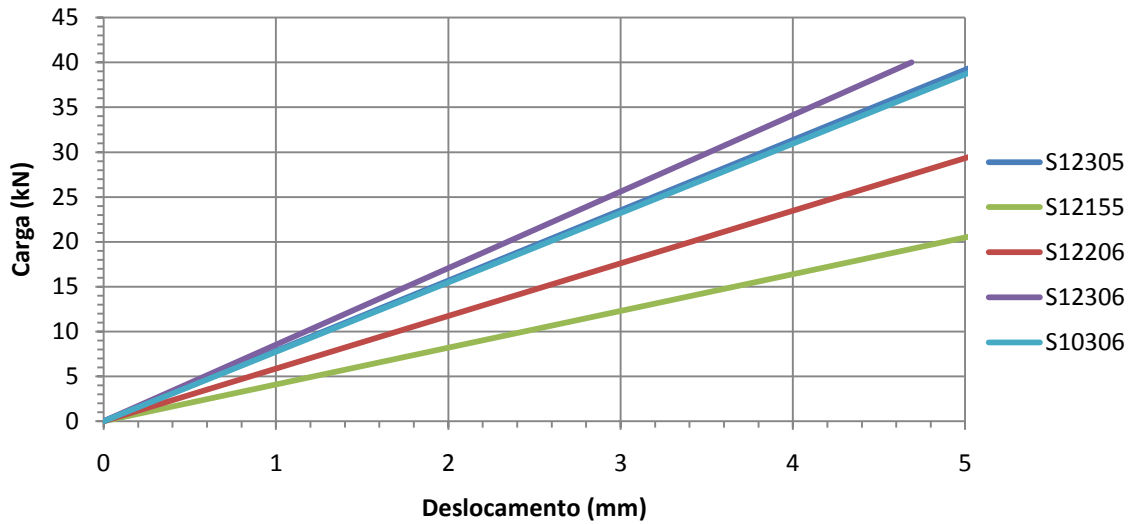


Figura 36: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a -10°C para vigas longas.

Provete	K (kN/mm)				
	Experimental [18]	Viga	TSVS [29]	EFT [18]	Placa [24]
S12305	8.8	8.2	7.8	8.1	8.2
S12155	4.6	4.4	4.1	4.2	4.2
S12206	7.0	6.2	5.9	6.1	6.1
S12306	9.9	8.9	8.5	8.9	8.9
S10306	9.4	8.1	7.7	8.0	8.0

Tabela 7: Resultados da rigidez de vigas longas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

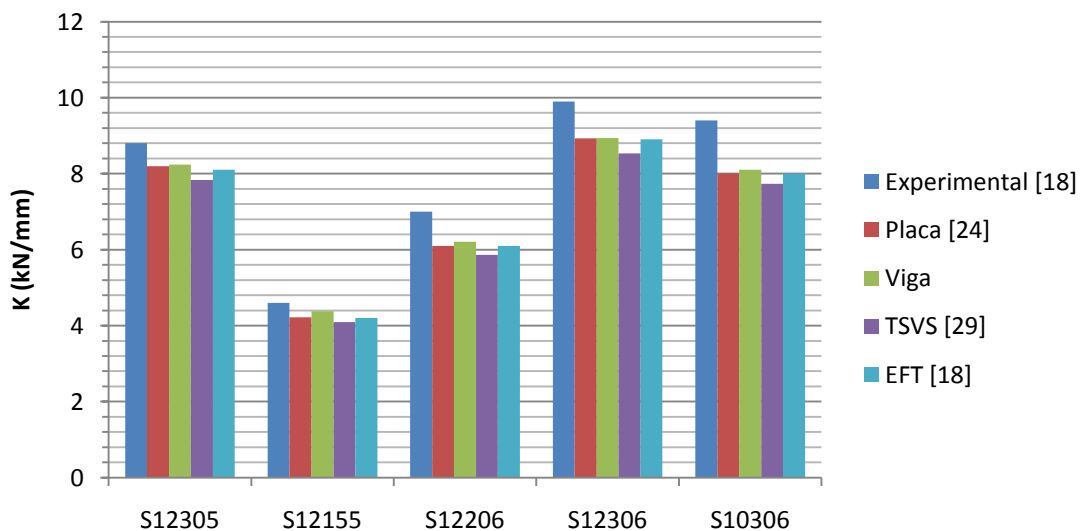


Figura 37: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Da análise das figuras 34 a 37 conclui-se que em termos qualitativos o que já tinha sido verificado nos diferentes provetes para a temperatura ambiente passa-se também agora no caso de -10°C . A única diferença reside numa rigidificação da estrutura em cerca de 14% inerente ao aumento do valor do módulo de elasticidade do núcleo para esta temperatura. Quanto aos resultados obtidos pelo elemento de viga o erro relativamente aos valores experimentais é de 9% enquanto o elemento TSVS acarreta um erro de 14%. O elemento de viga tem ainda um erro médio relativo aos elementos finitos tridimensionais de 1.8% e de 1.5% relativamente ao elemento de placa.

Da figura 38 à figura 41 e na tabela 8 apresentam-se os gráficos da carga-deslocamento e os valores de rigidez ainda para configuração de vigas longas, para a temperatura de 50°C .

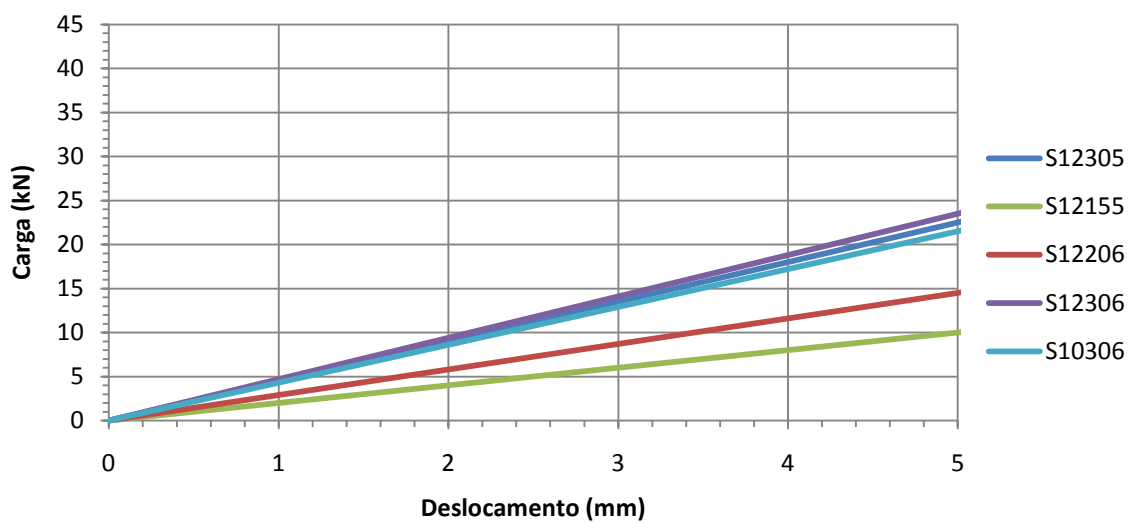


Figura 38: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a 50°C para vigas longas.

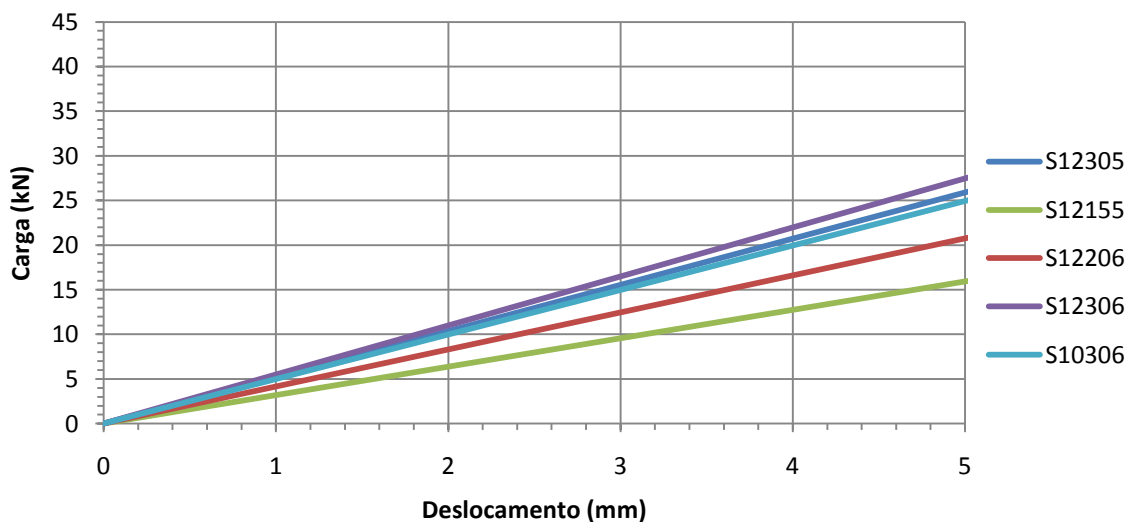


Figura 39: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a 50°C para vigas longas.

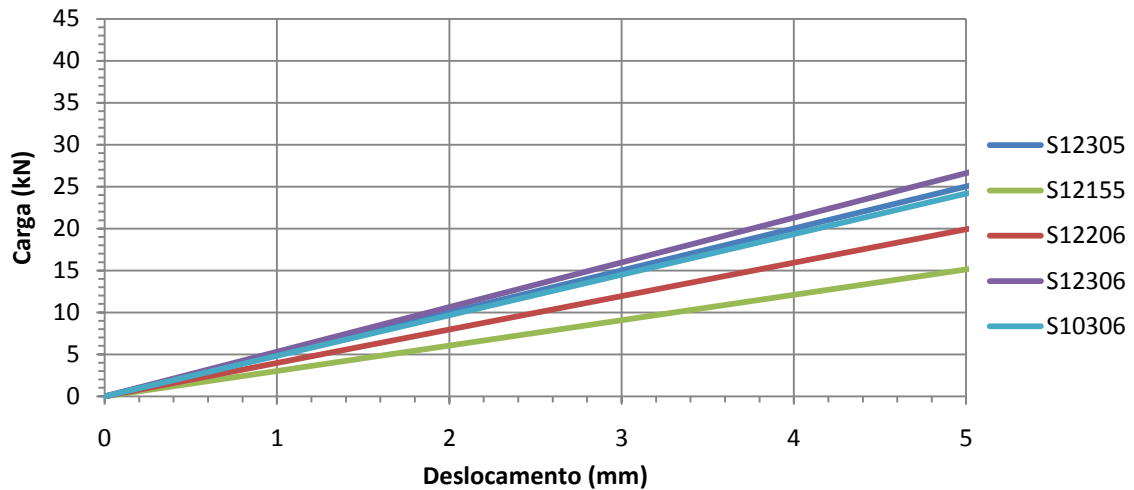


Figura 40: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a 50°C para vigas longas.

Provete	K (kN/mm)				
	<i>Experimental</i> [18]	<i>Viga</i>	<i>TSVS</i> [29]	<i>EFT</i> [18]	<i>Placa</i> [24]
S12305	4.5	5.2	5.0	5.3	5.4
S12155	2	3.2	3.0	3.2	3.2
S12206	2.9	4.1	4.0	4.2	4.3
S12306	4.7	5.5	5.3	5.7	5.7
S10306	4.3	5.0	4.8	5.1	5.2

Tabela 8: Resultados da rigidez de vigas longas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

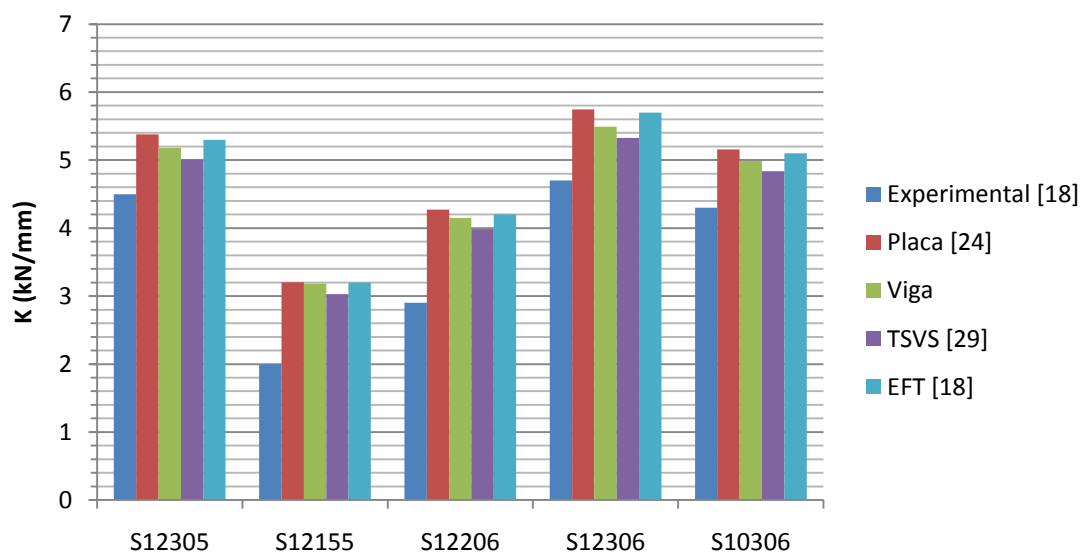


Figura 41: Comparação dos valores de rigidez de vigas longas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Da análise das figuras 38 a 41 verifica-se que, em termos qualitativos, as conclusões a que já se tinham chegado para a temperatura ambiente e -10°C são as mesmas para 50°C . Neste caso a diferença está numa perda de rigidez da estrutura em cerca de 47%, relativamente à temperatura ambiente, inerente à diminuição do valor do módulo de elasticidade do poliuretano. Quanto aos resultados obtidos pelo elemento de viga, o erro relativamente aos valores experimentais é de 30%, enquanto o elemento TSVS acarreta um erro de 25%. O elemento de viga tem um erro relativo aos elementos finitos tridimensionais e aos elementos de placa de cerca de 2% e 3%, respectivamente.

Pode-se então constatar por estes três casos que quanto maior for a rigidez do núcleo, isto é, quanto mais próximo o valor do módulo de elasticidade desta zona estiver do valor das faces, aproximando-se assim do caso de viga homogénea, melhores serão os resultados por parte do elemento de viga, diminuindo o erro para os valores reais obtidos. Comparativamente à teoria simplificada de primeira ordem TSVS, nos dois primeiros casos, o elemento de viga consegue uma melhoria no erro em cerca de 5%. Ainda nos casos de temperatura ambiente e -10°C os valores obtidos para a rigidez por estas duas teorias estão subestimados, implicando que os resultados são mais conservativos, o que acaba por não ser negativo em termos de segurança de projecto.

Quando a rigidez do núcleo diminui (50°C) os valores obtidos por todos os elementos sobrestimam os resultados experimentais e o elemento de viga acarreta um erro 5% maior do que o elemento de primeira ordem TSVS. Note-se ainda que, contrariamente ao que acontece a temperatura ambiente e a -10°C , todos os elementos apresentam um desvio maior aos resultados experimentais a 50°C nos provetes em que o núcleo é menos espesso. Segundo *Gibson et al.* [32] e como pode ser visto na figura 41, a diminuição da rigidez nos resultados experimentais relativamente aos elementos finitos para altas temperaturas, pode ser explicada devido a um aumento da viscoelasticidade no núcleo. Isto acontece porque ao aumentar-se a temperatura num material polimérico o aumento nas extensões está dependente também do tempo, efeito que acaba por ser mais severo que o causado pela diminuição do módulo de elasticidade do material (único efeito considerado nos modelos de viga e placa e no simplificado de primeira ordem). Este efeito pode ser causado pela baixa condutividade térmica do poliuretano, onde os núcleos menos espessos conseguem uma melhor distribuição da temperatura ao longo da viga do que os núcleos mais espessos [18], justificando assim a causa dos núcleos mais finos serem mais afectados pelas temperaturas elevadas e o porquê do aumento na discrepância entre os valores obtidos experimentalmente e segundo os elementos finitos.

Frisa-se que os resultados obtidos nesta configuração pelo elemento de viga estão de acordo com os obtidos pelos elementos finitos tridimensionais, acarretando um erro máximo de 2%. Tal facto mostra uma vantagem clara na utilização deste elemento de viga em detrimento do tridimensional se se tiver em conta o custo e peso computacional de criar e resolver uma malha tridimensional para cada caso.

Apresentam-se agora nas figuras 42 a 45 e na tabela 9 os resultados obtidos para a configuração de vigas curtas a temperatura ambiente.

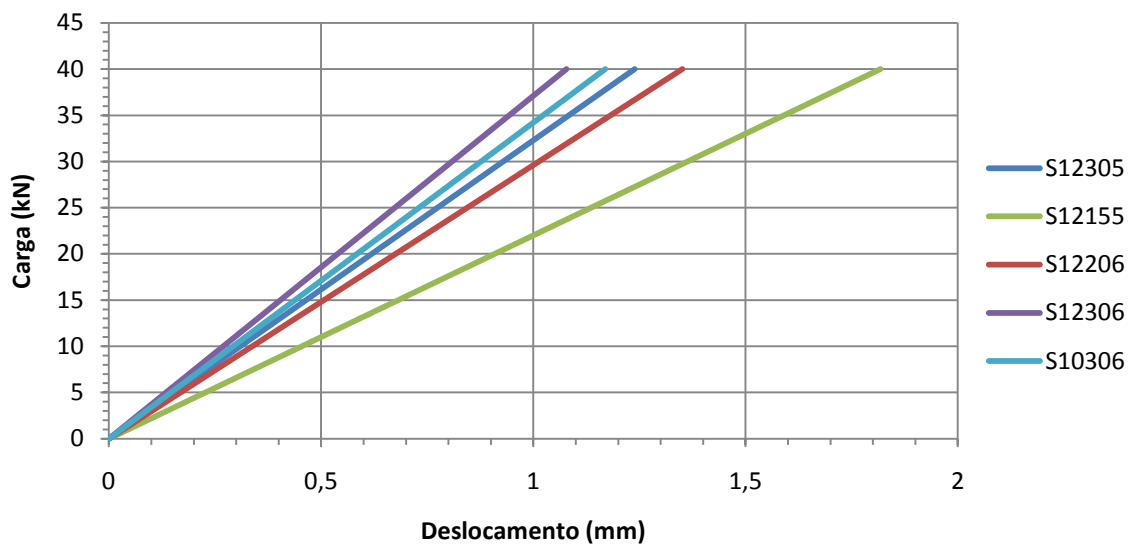


Figura 42: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.

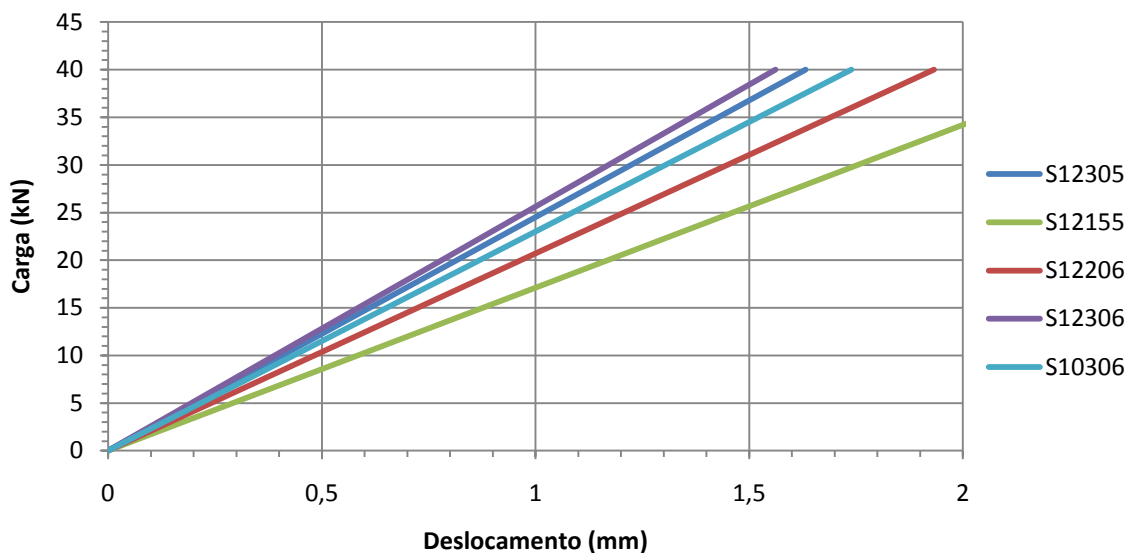


Figura 43: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.

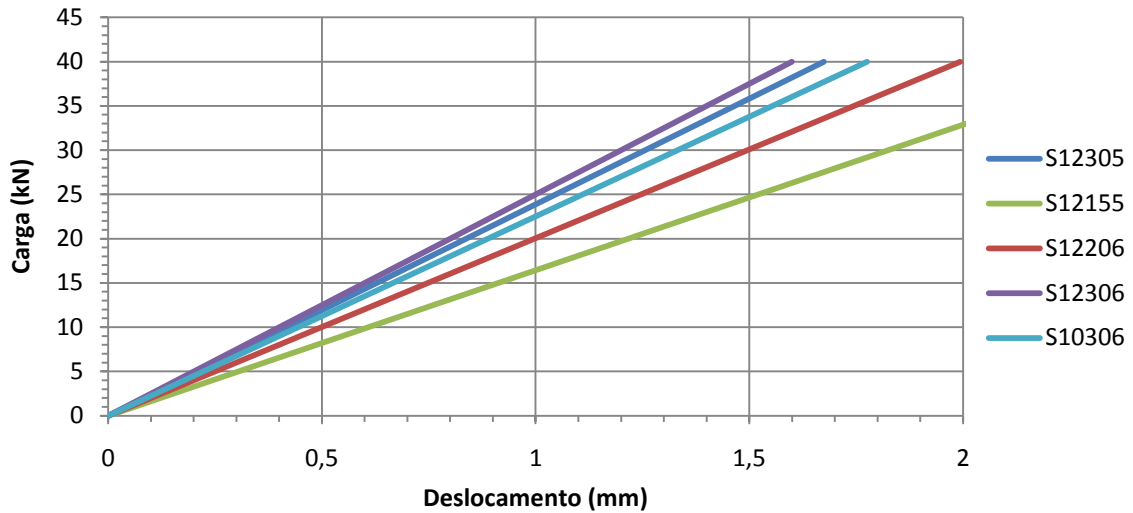


Figura 44: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a temperatura ambiente para vigas curtas.

Provete	K (kN/mm)				
	Experimental [18]	Viga	TSVS [29]	EFT [18]	Placa [24]
S12305	32.3	24.5	23.9	29.1	29.4
S12155	22	17.1	16.4	19.7	19.6
S12206	29.6	20.7	20.1	24.5	24.4
S12306	37.1	25.6	25.0	30.6	31.3
S10306	34.2	23.0	22.5	26.6	27.0

Tabela 9: Resultados da rigidez de vigas curtas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

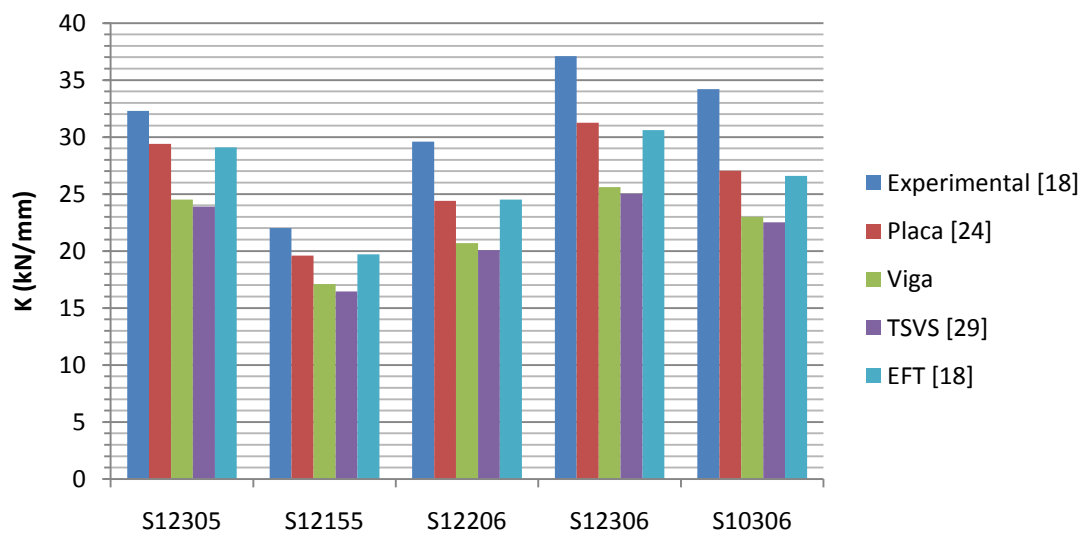


Figura 45: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a temperatura ambiente para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Novamente se constata que em termos qualitativos as conclusões para vigas curtas são as mesmas que para a configuração de vigas longas, isto é, que uma redução da espessura do núcleo é mais punitiva para rigidez global da estrutura que uma redução nas faces. A única diferença está agora no facto de uma redução no núcleo em 10 ou 15 mm ser menos severa para a rigidez quando comparada com o que acontece na configuração de vigas longas, principalmente no caso da viga S12206.

O erro do elemento de viga e TSVS relativamente à experimentação é, em média, de 28% e 30%, respectivamente, por outro lado, o erro do elemento de viga relativamente aos elementos tridimensionais e à placa está agora na ordem dos 15%.

Da figura 46 à figura 49 e na tabela 10 apresentam-se os gráficos da carga-deslocamento e os valores de rigidez para configuração de vigas curtas para temperatura de -10°C.

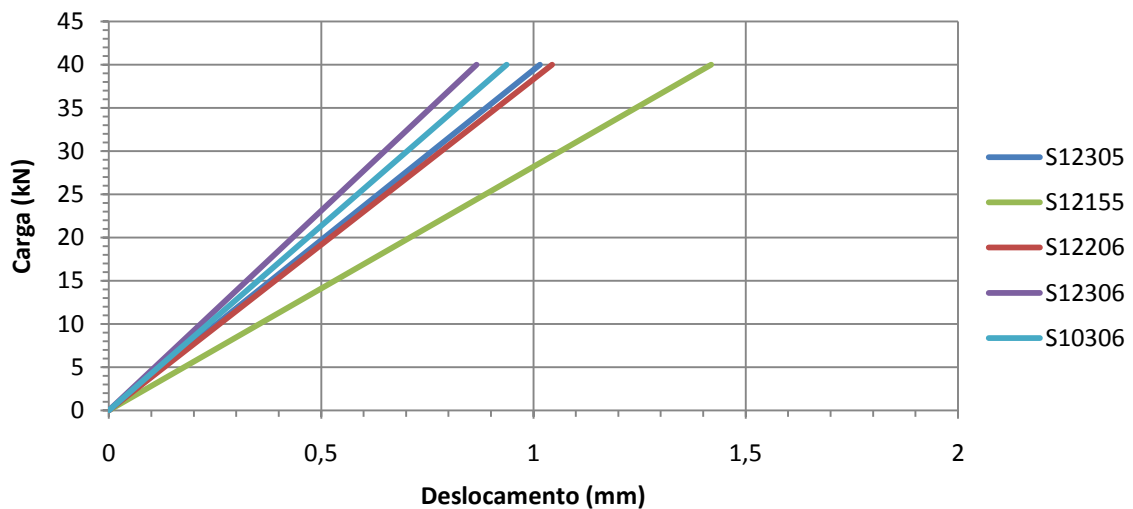


Figura 46: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a -10°C para vigas curtas.

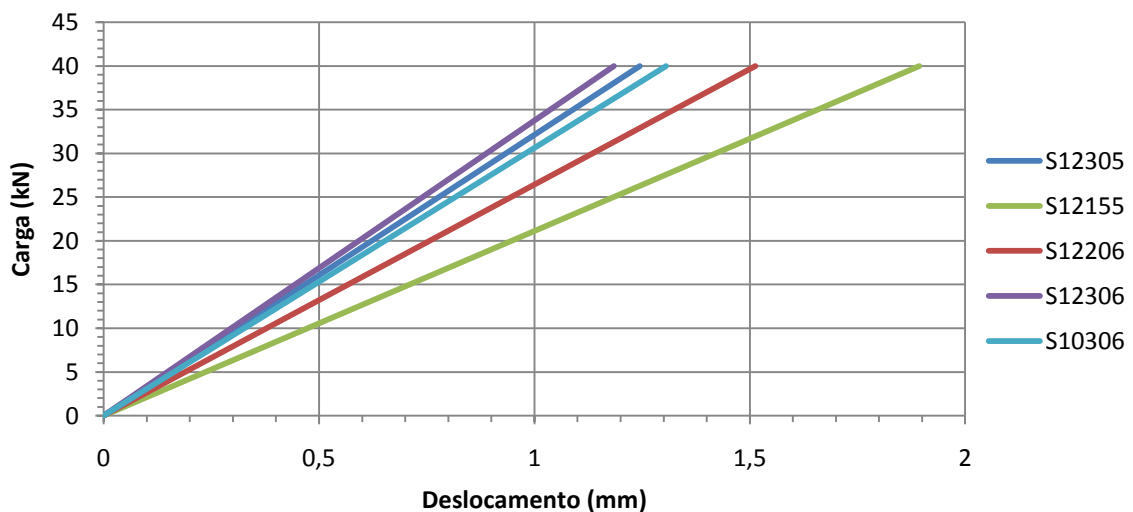


Figura 47: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a -10°C para vigas curtas.

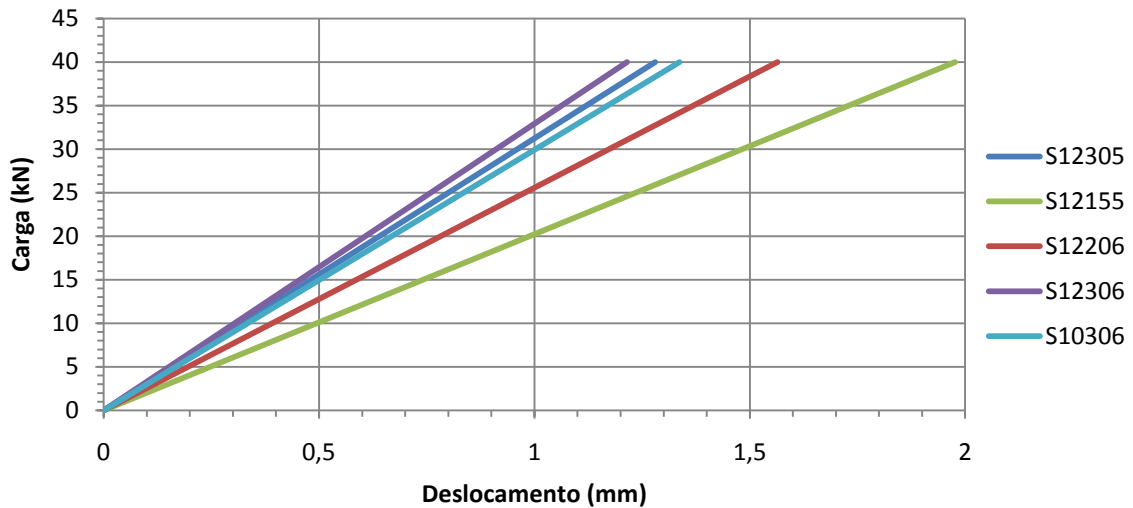


Figura 48: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a -10°C para vigas curtas.

Provete	K (kN/mm)				
	Experimental [18]	Viga	TSVS [29]	EFT [18]	Placa [24]
S12305	39.4	32.1	31.2	36.4	37.0
S12155	28.2	21.1	20.2	23.2	23.3
S12206	38.3	26.4	25.6	29.8	30.3
S12306	46.2	33.8	32.9	38.6	38.5
S10306	42.7	30.6	29.9	34	34.5

Tabela 10: Resultados da rigidez de vigas curtas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

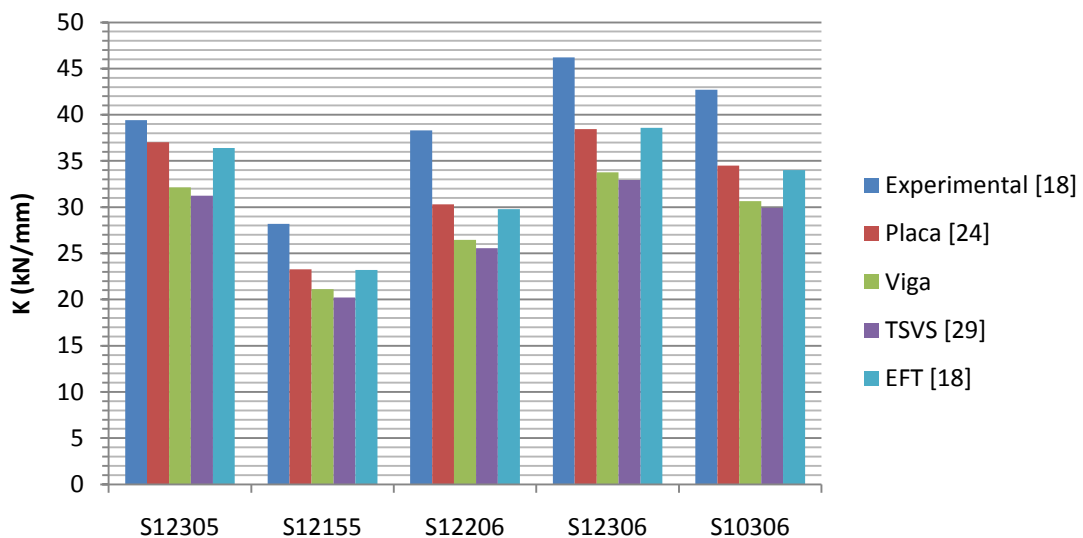


Figura 49: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a -10°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Para esta temperatura verificou-se uma rigidificação da estrutura relativamente à temperatura ambiente de 26%. O erro do elemento de viga e TSVS relativamente aos resultados experimentais é, em média, de 26% e 28%, respectivamente, enquanto o erro do elemento de viga relativamente aos elementos tridimensionais é de 11% e em relação ao elemento de placa é de 12%.

Da figura 50 à figura 53 e na tabela 11 apresentam-se os gráficos da carga-deslocamento e os valores de rigidez ainda para configuração de vigas curtas, mas para temperatura de 50°C.

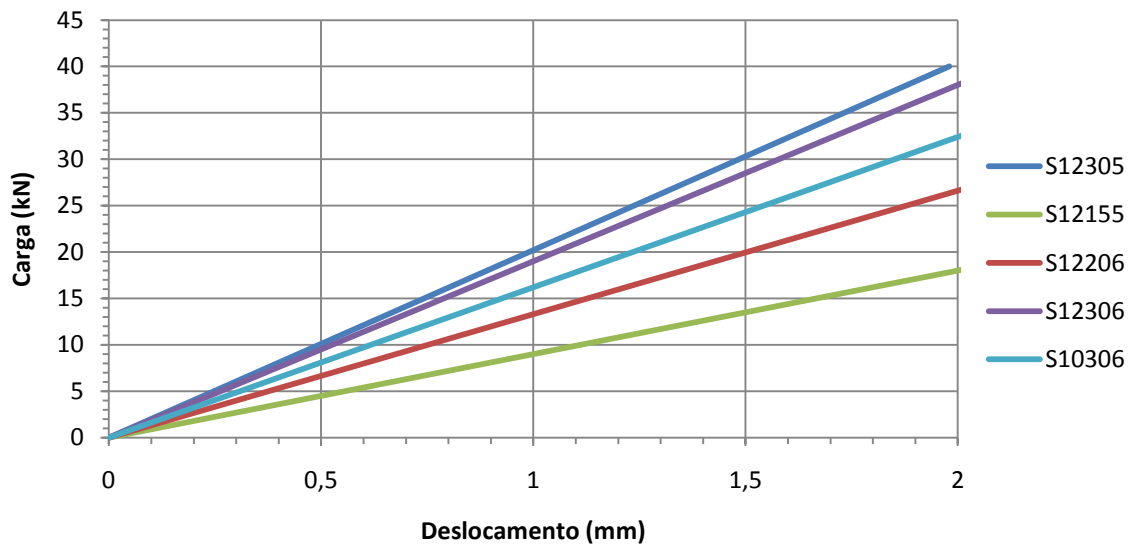


Figura 50: Gráficos Carga-Deslocamento experimentais medidos a 50°C para vigas curtas.

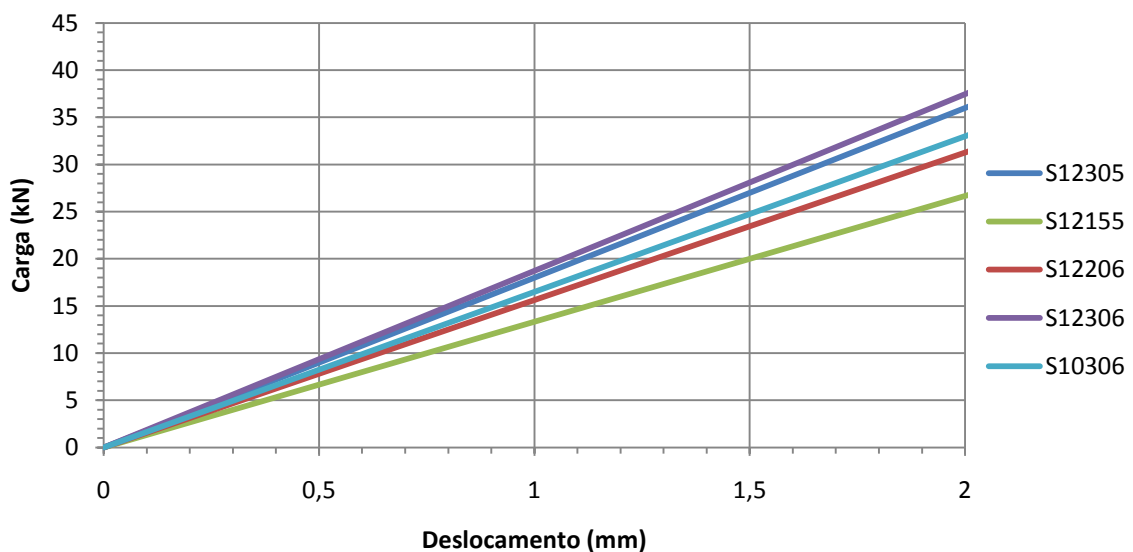


Figura 51: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento de viga medidos a 50°C para vigas curtas.

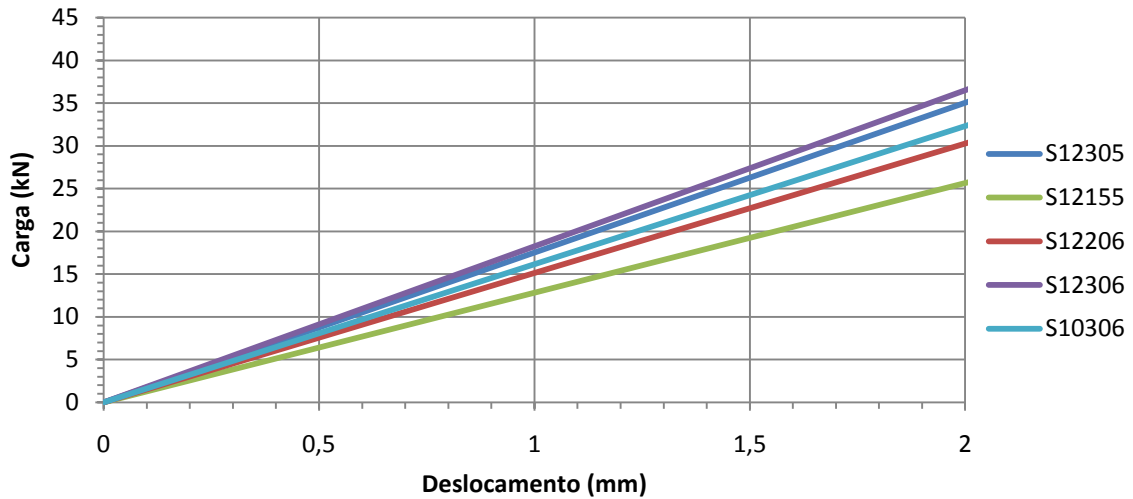


Figura 52: Gráficos Carga-Deslocamento para o elemento TSVS medidos a 50°C para vigas curtas.

Provete	K (kN/mm)				
	Experimental [18]	Viga	TSVS [29]	EFT [18]	Placa [24]
S12305	20.2	18.0	17.5	22.5	22.7
S12155	9	13.3	12.8	16.2	16.1
S12206	13.3	15.6	15.1	19.5	19.6
S12306	19	18.7	18.3	23.6	23.8
S10306	16.2	16.5	16.2	20.1	20.4

Tabela 11: Resultados da rigidez de vigas curtas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

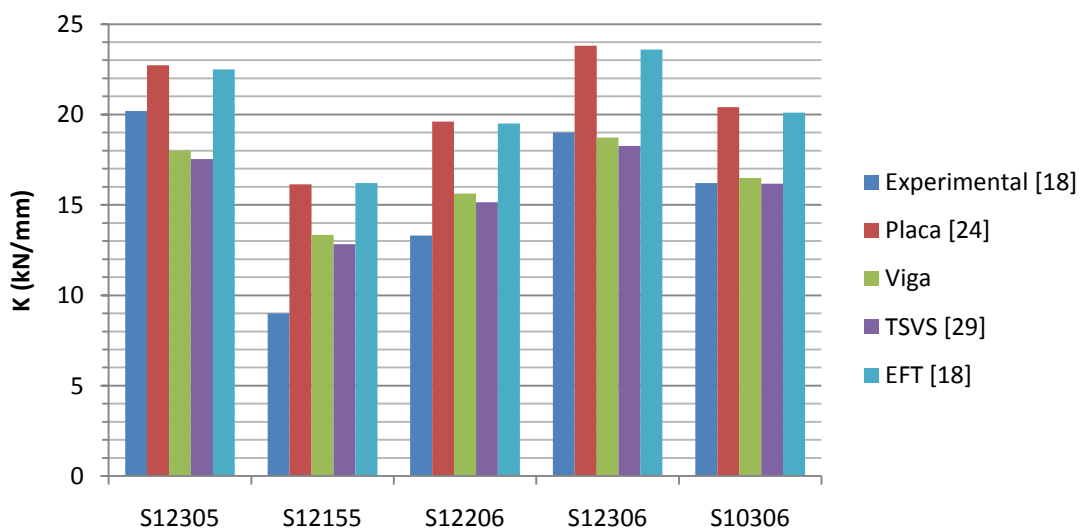


Figura 53: Comparação dos valores de rigidez de vigas curtas a 50°C para os ensaios experimentais e para os elementos Viga e Placa, TSVS e EFT.

Para esta temperatura e configuração verificou-se uma perda de rigidez da estrutura quanto à temperatura ambiente de 50%. O erro do elemento de viga relativamente aos resultados experimentais é, em média, de 16% e relativamente aos elementos tridimensionais e aos elementos de placa de 19% e 20%, respectivamente, enquanto o elemento TSVS tem um erro de 15% em relação aos resultados experimentais.

Mais uma vez e tal como aconteceu para as vigas longas, o erro do elemento de viga é tanto mais pequeno quanto maior for a rigidez do núcleo. Neste caso também os resultados de todos os elementos, para a temperatura de 50°C e para os núcleos menos espessos, sobrestimam os valores obtidos experimentalmente, como consequência do fenómeno causado pelas altas temperaturas e que já foi explicado anteriormente para as vigas longas. Neste tipo de configuração o elemento de viga consegue um ganho em termos de erro de cerca de 2% comparativamente ao elemento de primeira ordem.

Apesar de aparentemente os resultados obtidos para a temperatura de 50°C apresentarem um erro menor que nas outras temperaturas, exige-se algum cuidado na interpretação dos mesmos, uma vez que o comportamento do núcleo altera-se significativamente a essa temperatura, o que em termos de análise pode ser bastante erróneo.

Comparando o erro entre vigas longas e curtas, facilmente se conclui que os melhores resultados são obtidos para as vigas longas onde os efeitos de corte são muito menos predominantes que na configuração curta, o que leva a um aumento significativo do erro para estes casos, como pode ser constatado nos resultados apresentados anteriormente. Verifica-se também que a rigidez à flexão é mais afectada pela variação de temperatura na configuração de vigas curtas.

4.2.3.3. Comportamento da viga à flexão - Extensões

Para melhor compreender os resultados até agora apresentados procedeu-se à medição através dos elementos de viga, placa e tridimensionais da variação das extensões longitudinais ao longo da espessura na secção a meio-vão das vigas. Para a configuração de vigas longas utilizou-se uma carga total aplicada de 7 kN, enquanto para vigas curtas a carga foi de 12 kN.

Nas figura 54 a 68 estão representadas as extensões longitudinais, ϵ_{xx} , e as distorções transversais, γ_{xz} , obtidas através do elemento de viga e placa, dos elementos finitos tridimensionais (EFT) e ainda os valores registados experimentalmente nas faces, ao longo da espessura, z , para todos os provetes, na configuração de vigas curtas e longas.

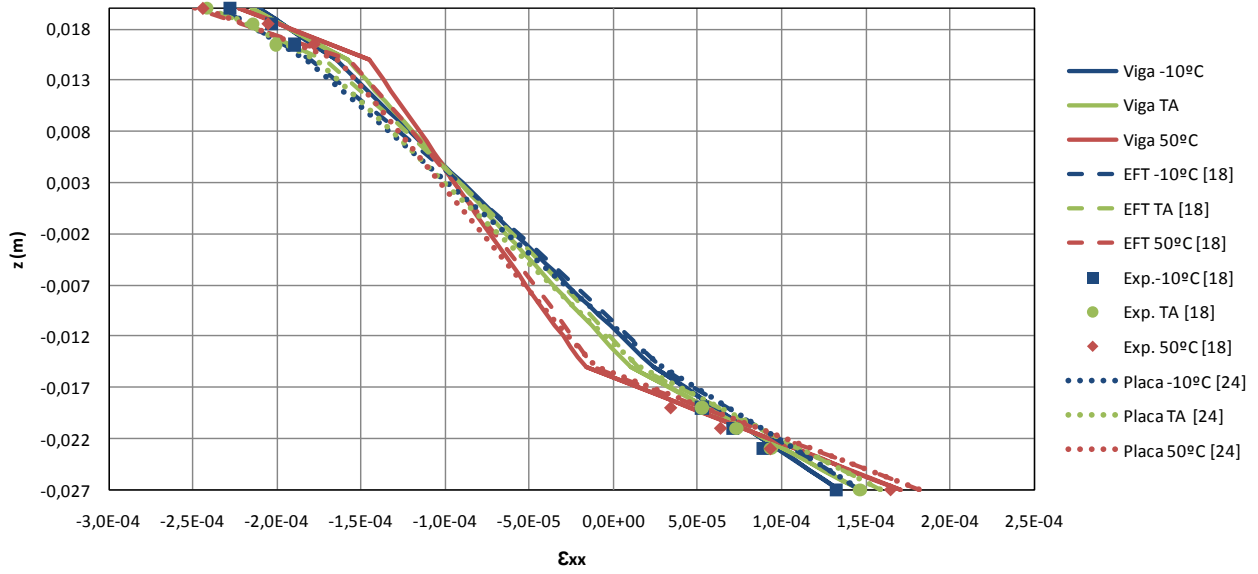


Figura 54: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12305 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.

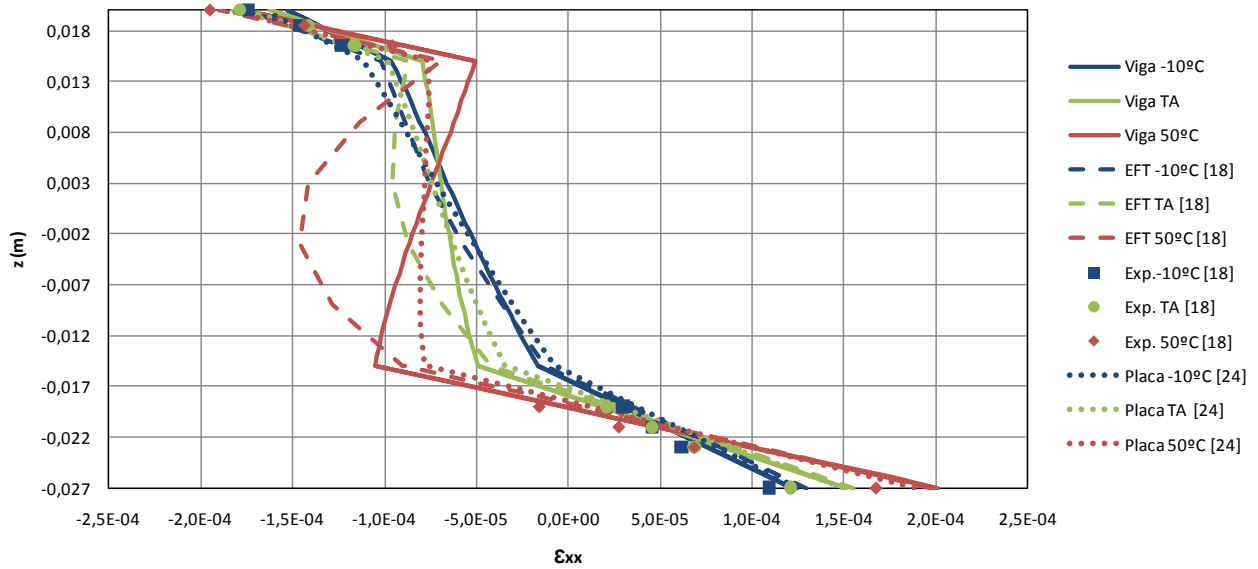


Figura 55: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12305 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.

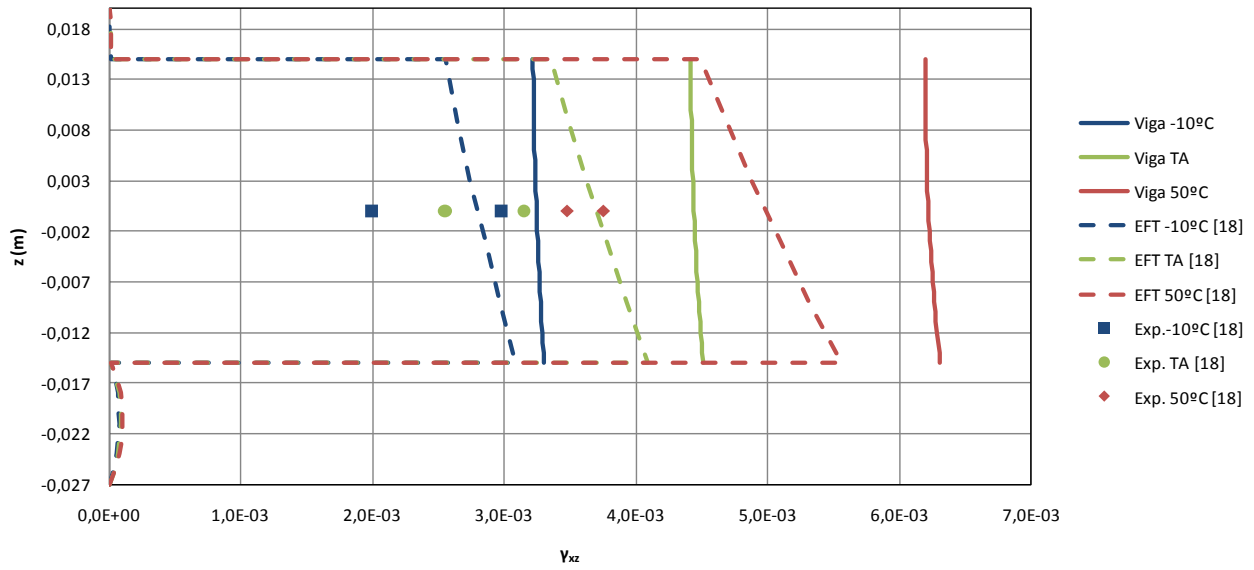


Figura 56: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12305 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

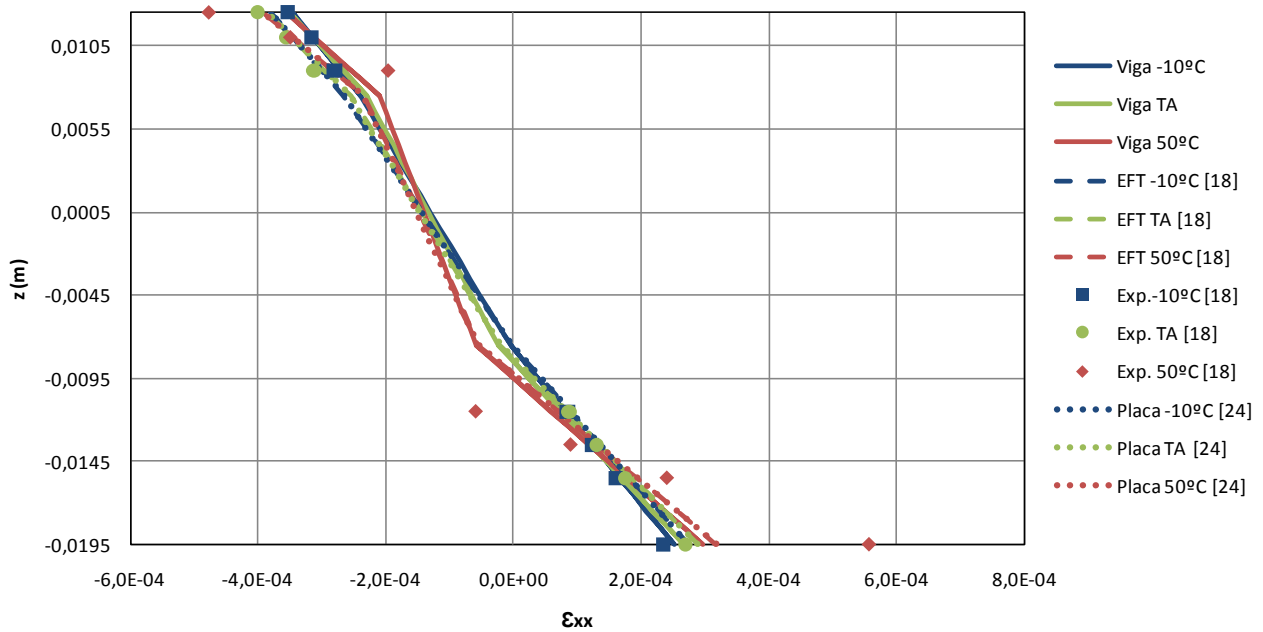


Figura 57: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12155 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.

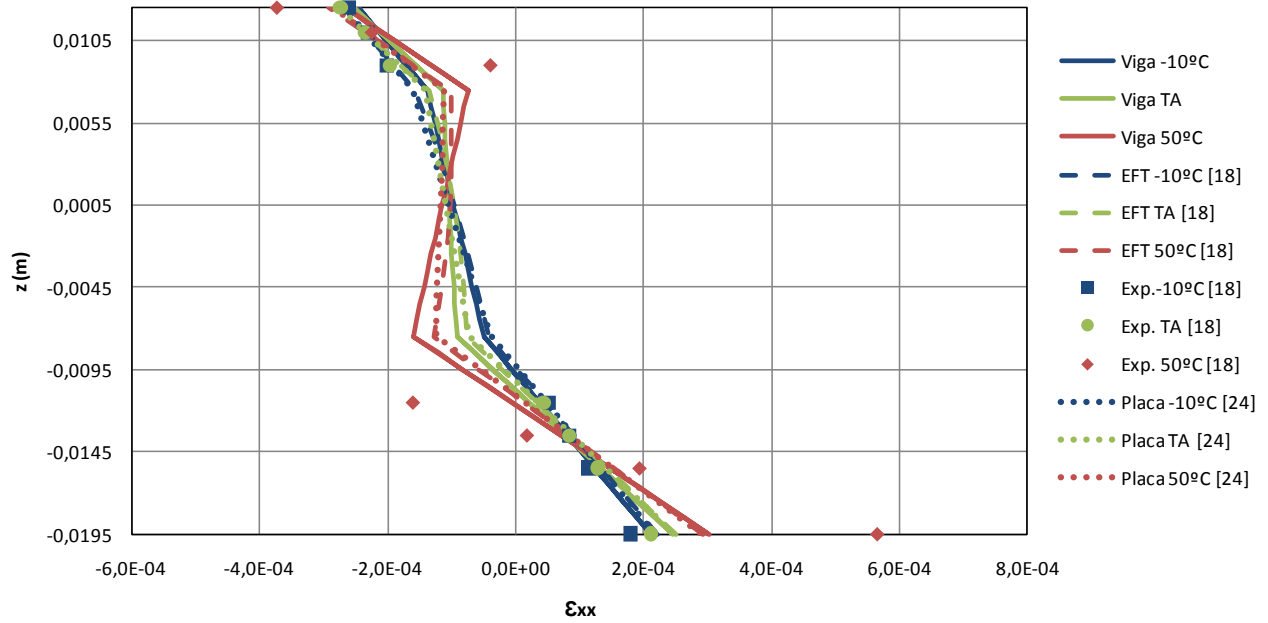


Figura 58: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12155 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.

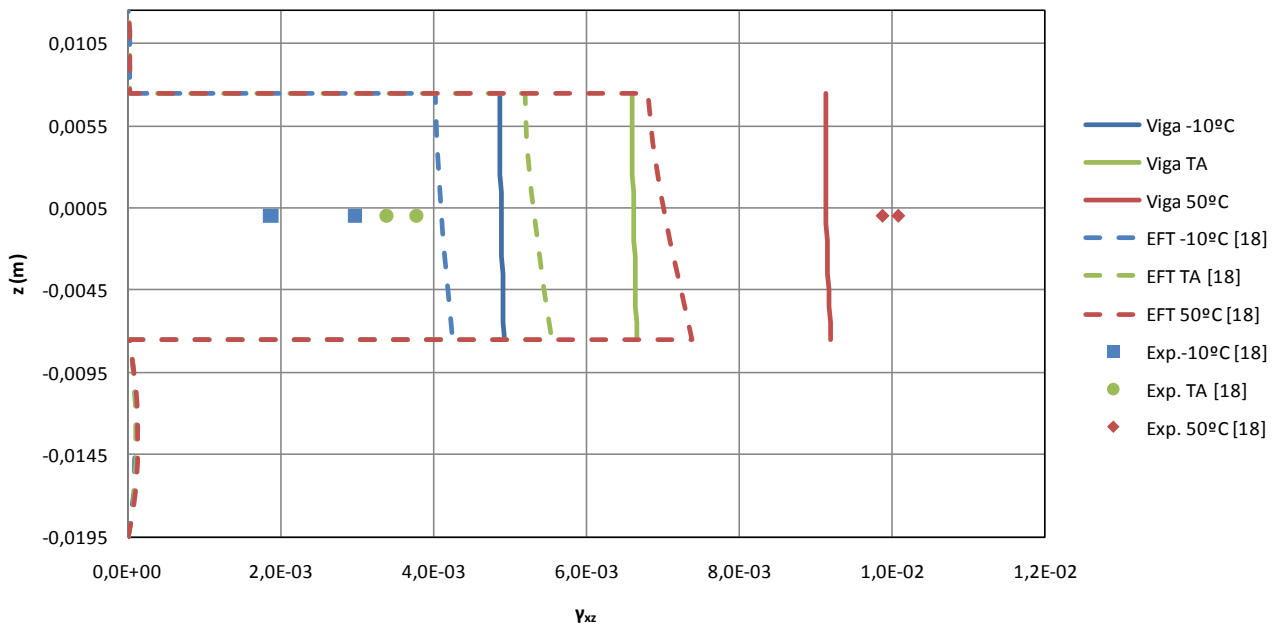


Figura 59: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12155 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

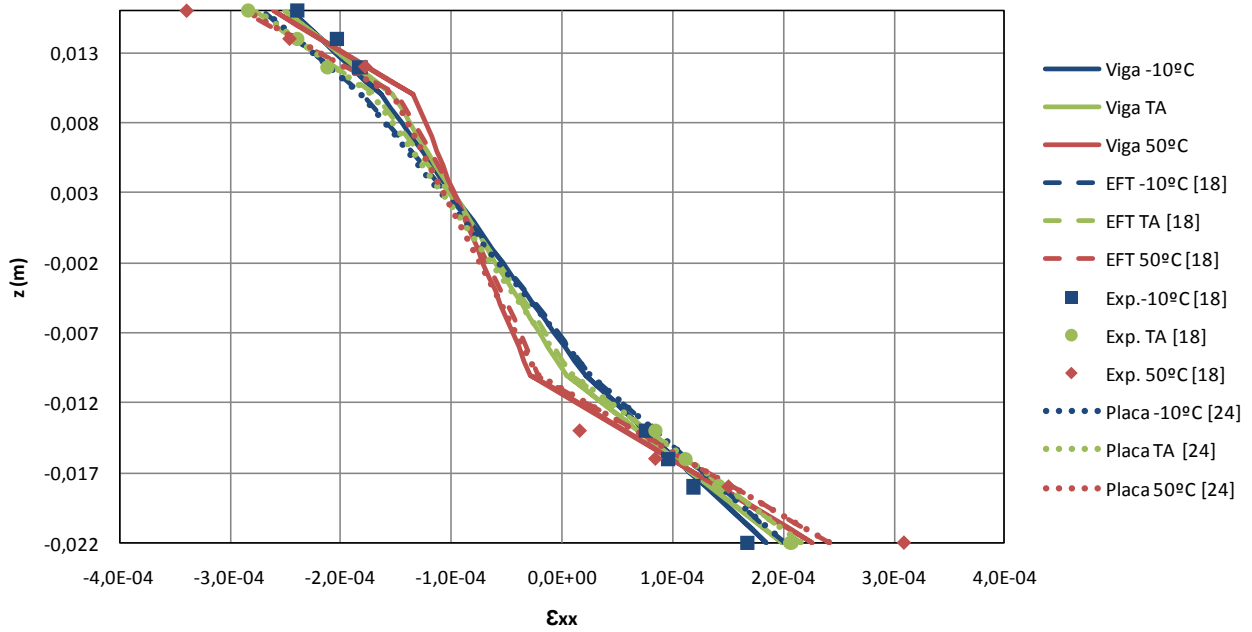


Figura 60: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12205 em configuração de viga longa na seção a meio-vão.

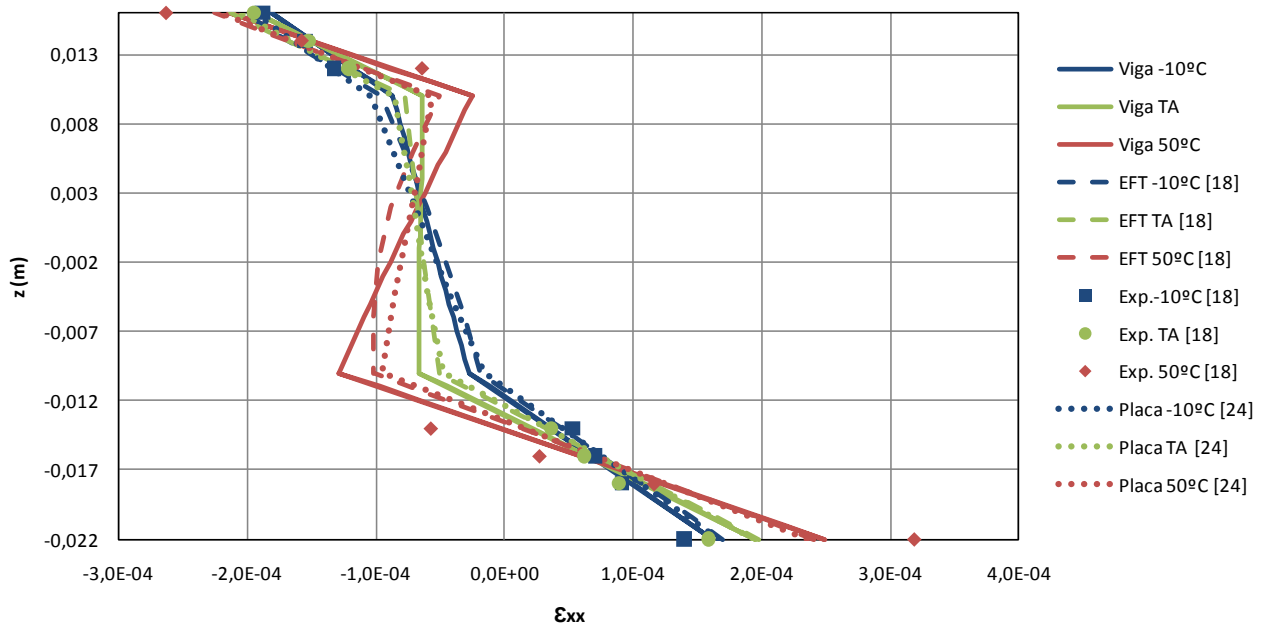


Figura 61: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12205 em configuração de viga curta na seção a meio-vão.

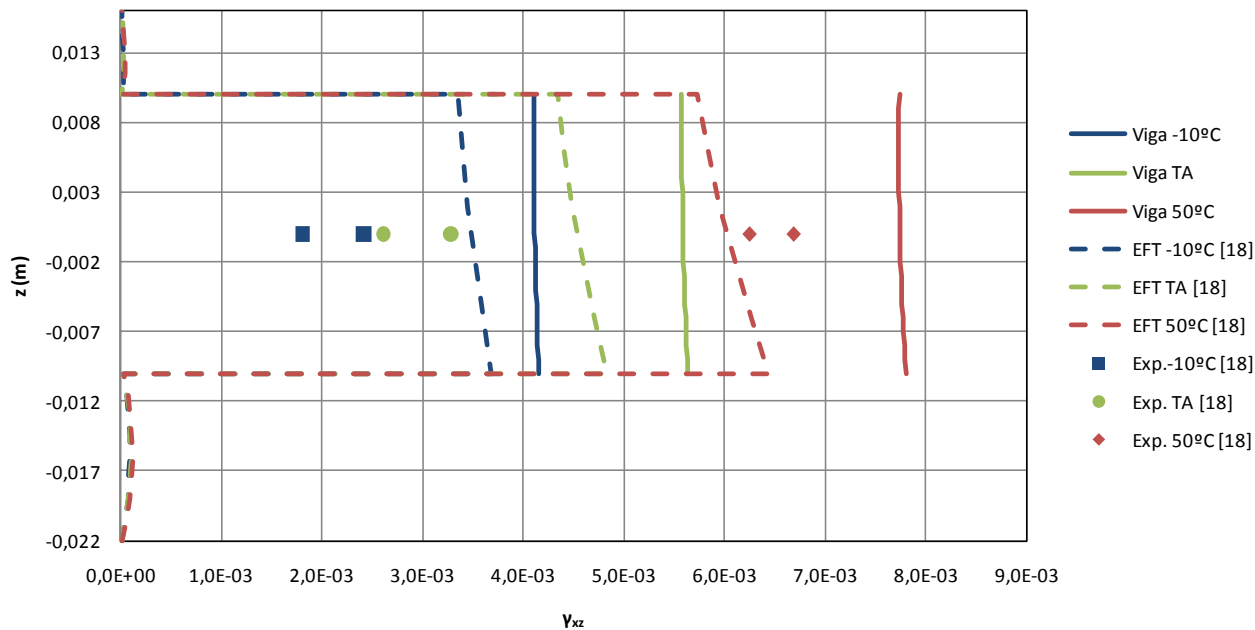


Figura 62: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12205 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

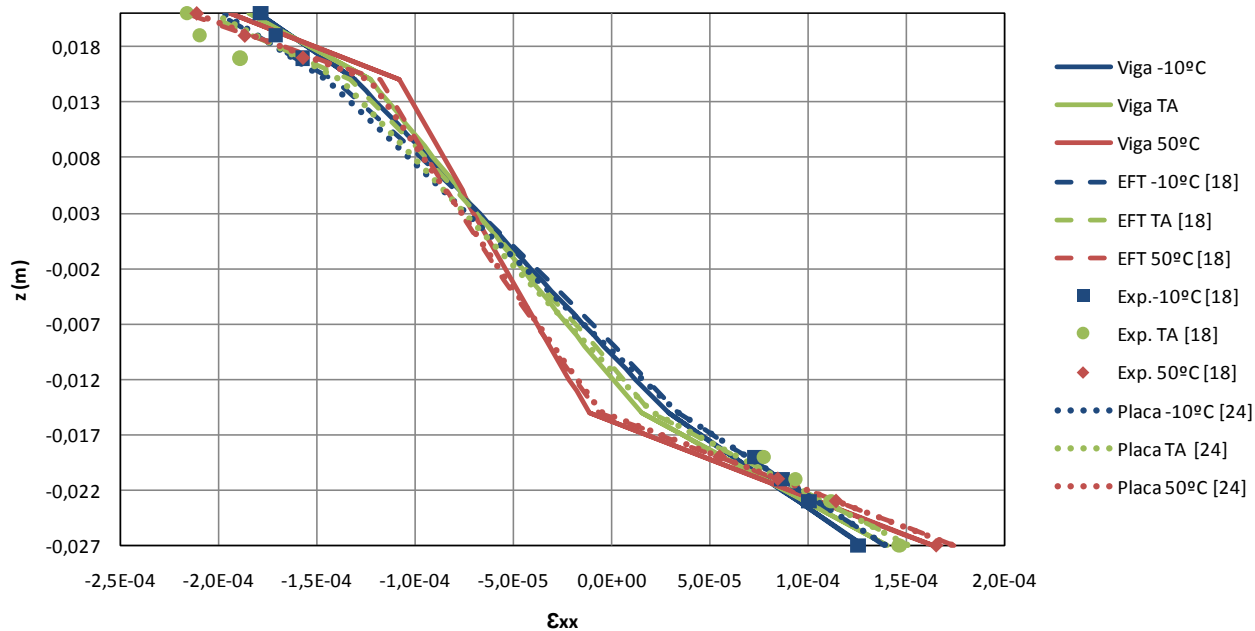


Figura 63: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12306 em configuração de viga longa na secção a meio-vão.

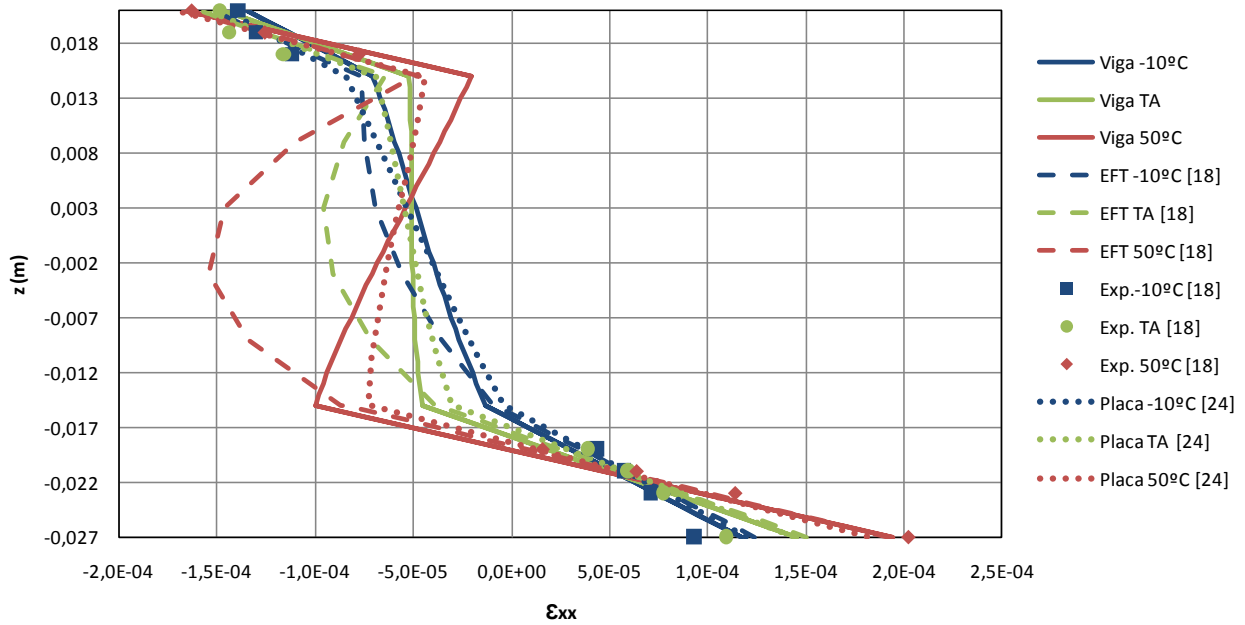


Figura 64: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S12306 em configuração de viga curta na secção a meio-vão.

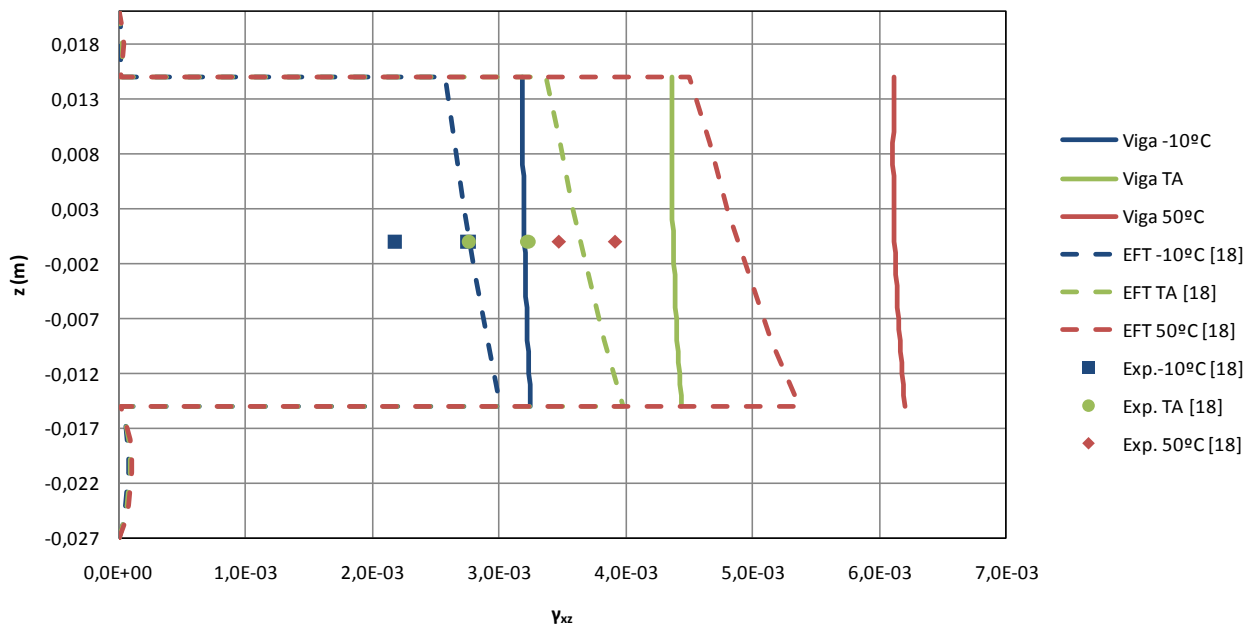


Figura 65: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S12306 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

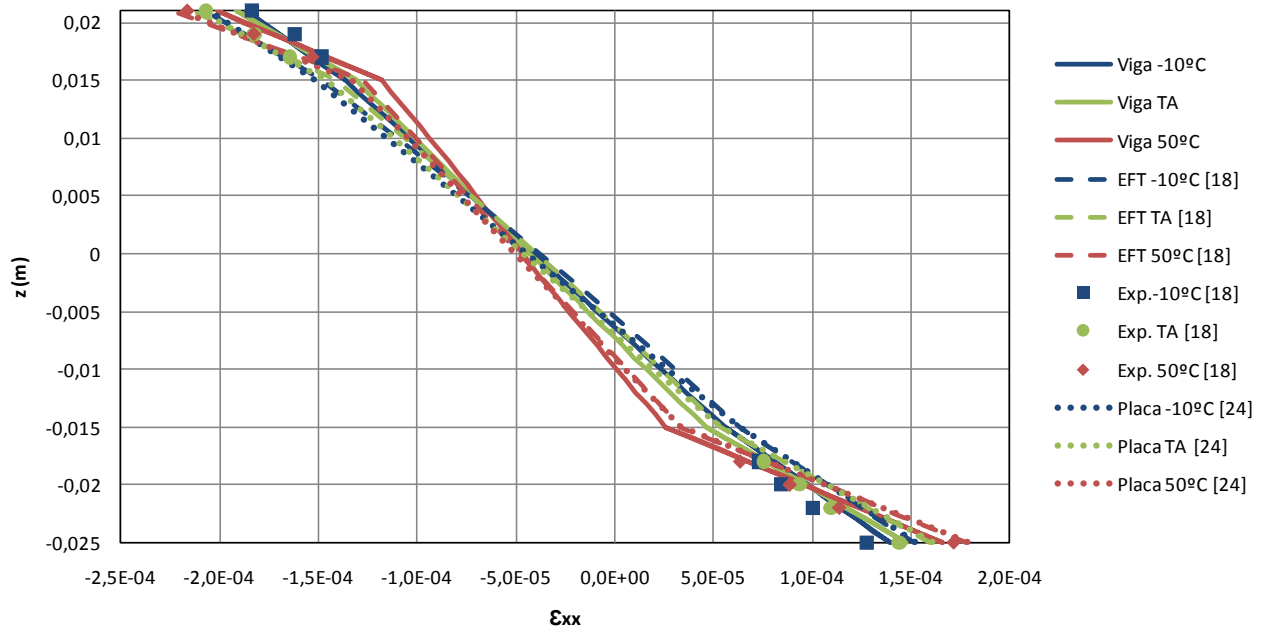


Figura 66: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S10306 em configuração de viga longa na seção a meio-vão.

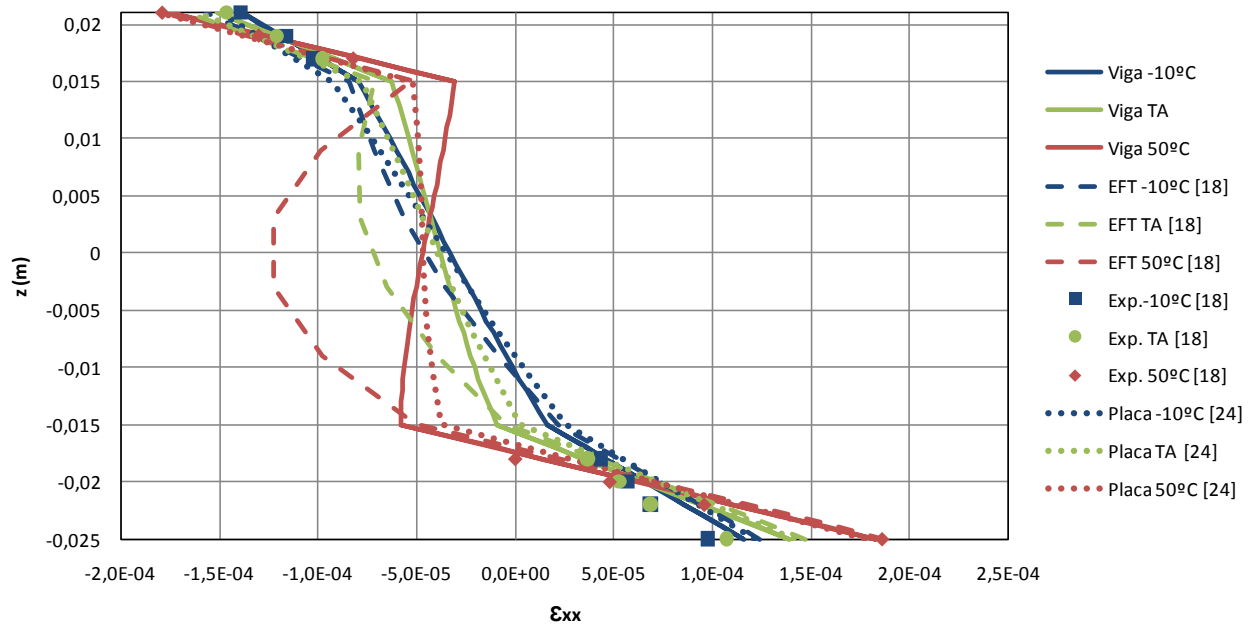


Figura 67: Extensão Longitudinal, ϵ_{xx} , para o provete S10306 em configuração de viga curta na seção a meio-vão.

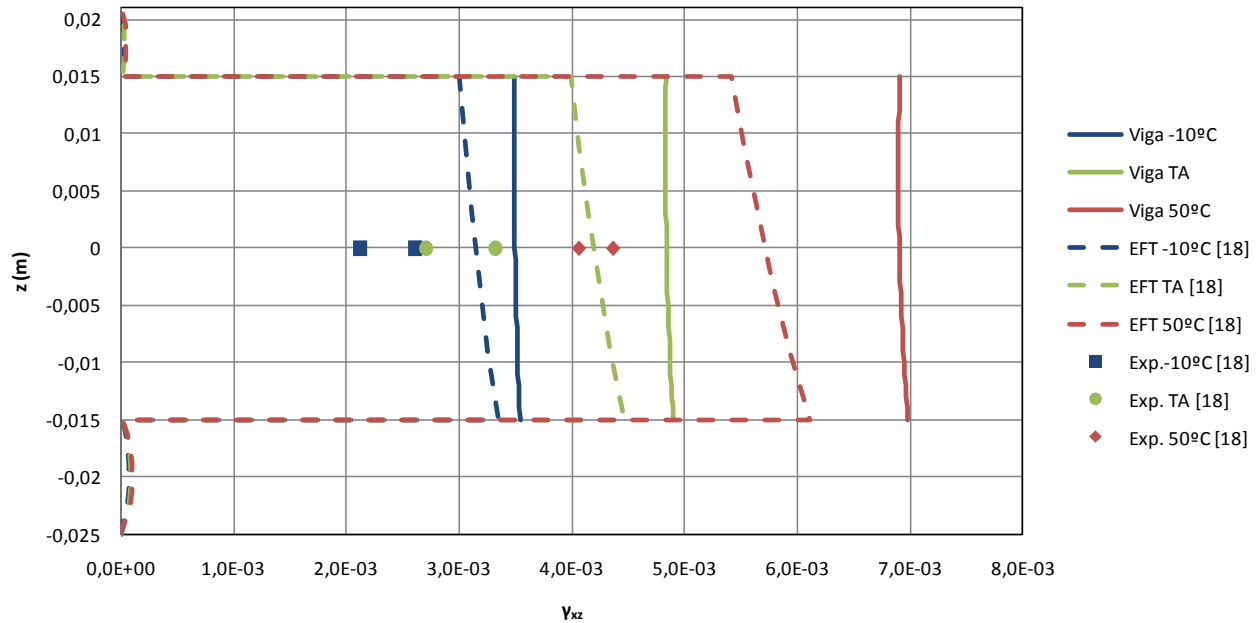


Figura 68: Distorção transversal, γ_{xz} , para o provete S10306 em configuração de viga curta na secção entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

Os resultados apresentados indicam que o critério assumido pela teoria clássica e de primeira ordem, que diz que as secções rectas antes da deformação assim se mantêm após a deformação, não é de todo válido na configuração de vigas curtas, excepto nas faces. Como já tinha sido verificado anteriormente, quando a esbelteza da viga diminui, os efeitos de corte, nomeadamente das extensões de corte transversais, aumentam significativamente. Constatase, em todos os casos, que em determinadas zonas da viga as tensões de corte são da mesma ordem de grandeza que as tensões normais, pelo que a sua influência é da mais extrema importância, sendo impossível desprezar os seus efeitos na análise deste tipo de geometrias.

Em todas as geometrias é visível a descontinuidade de propriedades mecânicas entre as faces e o núcleo, quer nas extensões normais quer nas de corte. A este efeito que aumenta com a temperatura, como consequência do aumento da diferença das propriedades mecânicas entre as faces e o núcleo, dá-se o nome de zigzague e tem sido alvo de diversos estudos em matéria de estruturas de compósitos *sandwich* [33, 34], podendo-se ainda verificar que o aumento significativo das tensões de corte, causados pelo carregamento em configuração de vigas curtas, ajuda também a aumentar a intensidade destes efeitos.

Olhando agora para as extensões longitudinais obtidas pelos três elementos, verifica-se que, nas faces e em todos os casos apresentados, a distribuição ao longo da espessura é muito semelhante e linear, com um erro relativo muito pouco significativo, como consequência da elevada rigidez do aço utilizado. Já no núcleo, e para vigas longas, existe novamente uma maior concordância entre a distribuição por elementos tridimensionais e de placa, se bem que o elemento de viga nesta configuração obtém resultados muito próximos e satisfatórios. A grande diferença de valores está no núcleo para vigas curtas, onde tanto o

elemento de viga como o de placa apresentam extensões longitudinais com uma distribuição do tipo cúbica. Tal efeito era já esperado, pois apesar de um elemento ser de viga e outro de placa, ambos partem dos mesmos pressupostos e utilizam, nomeadamente, um campo de deslocamentos expandido até à terceira ordem. Este facto apresenta também uma grande vantagem relativamente à teoria de primeira ordem que apenas consegue fazer a representação das extensões de modo linear, tal como acontece nas faces. Este tipo de distribuição cúbica mais acentuada para as vigas curtas foi também verificado por Hardy et al. [35], num estudo estático de vigas muito curtas com secção transversal homogénea. Entre os elementos de viga e placa a divergência dos valores na extensão aumenta aquando do aumento de temperatura, tal como também foi verificado no subcapítulo anterior. Por outro lado, os elementos finitos tridimensionais demonstram um comportamento completamente diferente, uma vez que à medida que se aumenta a temperatura os efeitos de compressibilidade (que conseguem ser quantificados nos elementos EFT mas não nos modelos híbridos HSDT aqui utilizados) mostram que as distribuições obtidas pelos elementos de viga e placa são cada vez piores, não conseguindo assemelhar-se à forma parabólica e mais acentuada das extensões retiradas por elementos tridimensionais. A compressão é uma consequência do momento flector e da carga aplicada na viga e é tanto maior quanto maior for a proximidade da secção em estudo ao ponto de aplicação da carga. Assim, nas vigas mais curtas, esse efeito vai ser bastante influente, levando a que na zona de meio-vão as extensões ainda não tenham tido espaço físico para recuperar a linearidade e apresentem a distribuição e magnitude mostradas nas figuras acima. Constata-se que a utilização de faces tão rígidas como as utilizadas nestes ensaios contribui para que essa compressibilidade seja toda suportada pelo núcleo. No caso de terem sido usadas faces de fibra de vidro ou carbono, muito provavelmente a severidade dos efeitos de compressão aqui mostrados seria repartida por toda a sandwich (núcleo e faces), obtendo-se assim resultados com os elementos de viga e placa mais próximos dos tridimensionais e, conseqüentemente, da realidade.

No caso das distorções pode-se chegar às mesmas conclusões quanto ao efeito da compressibilidade verificada na diferença de valores obtidos pelo elemento de viga, relativamente quer à experimentação quer ao modelo tridimensional, sendo a temperatura novamente responsável pelo maior ou menor erro nesses valores. Verifica-se também pela análise das figuras que, tal como foi explicado no capítulo 3, o elemento de viga permite obter uma distribuição do tipo parabólica nas distorções transversais na zona do núcleo.

Nas figuras anteriores não foram apresentados os valores obtidos para as distorções transversais das faces pelo elemento de viga pois o seu valor é bastante inferior ao obtido no núcleo. Apresentam-se, no entanto, na tabela 12 esses mesmos valores que, pela condição imposta no campo de deslocamentos das faces e, como pode ser constatado em (24.b), são constantes ao longo de toda a espessura destas.

Provete	γ_{xz}^t	γ_{xz}^b
S12305	9.72 E-6	2.45 E-5
S12155	1.36 E-5	3.17 E-5
S12206	1.31 E-5	2.77 E-5
S12306	1.08 E-5	2.36 E-5
S10306	1.27 E-5	2.22 E-5

Tabela 12: Resultados da distorção transversal, γ_{xz} , nas faces superior (*t*) e inferior (*b*) de todos os provetes entre o apoio e o ponto de aplicação da carga.

Novamente se constata que os efeitos das tensões de corte são tanto maiores quanto maior for a espessura das faces, ou seja, a diminuição de espessura apenas nas faces leva a uma diminuição do valor de γ_{xz} . No entanto, se a redução da espessura for feita no núcleo os valores da distorção nas faces aumentam como consequência de um acréscimo na sua sollicitação para a estabilização da estrutura.

5. Conclusões e propostas de desenvolvimento futuro

Os objectivos principais desta dissertação passaram pela modelação, validação e comparação de um elemento estrutural de viga com recurso a uma teoria de ordem superior.

Em termos gerais o ganho obtido com este tipo de teorias é relativamente significativo quando comparado com os modelos de primeira ordem, sendo que não existe também uma diferença muito grande no que diz respeito ao esforço computacional adicional que a teoria de ordem superior acarreta relativamente ao esforço usado na teoria de primeira ordem. No entanto, a vantagem na utilização de uma teoria de ordem superior em detrimento de uma teoria de primeira ordem prende-se principalmente pela capacidade que as primeiras têm em representar as tensões e extensões ao longo da espessura de um modo mais preciso, como consequência da expansão dos termos até à terceira ordem no campo de deslocamentos.

A utilização deste tipo de teorias é de grande importância devido à crescente necessidade de modelar computacionalmente estruturas *sandwich* de uma maneira muito mais distinta e de identificar zonas críticas neste tipo de componentes.

5.1. Conclusões

As primeiras conclusões a que se chegam após todo o processo apresentado anteriormente e depois de realizados os diversos testes, são os já esperados e que já tinham sido mencionados no início desta dissertação, ou seja, que as estruturas *sandwich* têm de facto uma resistência à flexão muito superior ao normal, quando comparadas com estruturas com o mesmo peso próprio, pois a elevada distância entre as faces conjugada com a baixa densidade do núcleo permitem aumentar a inércia da secção da viga, resultando numa estrutura muito mais leve e rígida.

Tal como foi visto na secção 4.1. as diferenças entre a teoria clássica de laminados de Euler-Bernoulli e as teorias de corte de primeira ordem e de alta ordem começam a ser significativas aquando da aproximação da configuração de *sandwich*, i.e., quando se verifica a diminuição da rigidez do núcleo. A teoria clássica não prevê os efeitos de corte e a variação na inércia causada pela alteração da largura na zona do núcleo (consequência da homogeneização) é pouco significativa, não simulando correctamente o comportamento da viga e levando à obtenção de valores para a deformada muito mais pequenos do que os obtidos pelas outras duas teorias.

Entre o modelo de viga aqui apresentado e o simplificado (TSVS) as maiores discrepâncias acontecem para uma configuração de vigas mais curtas, onde a razão $\frac{L}{h_T}$ é menor. Quando a viga atinge um determinado valor de esbelteza maior (configuração mais longa), os resultados da rigidez entre as duas teorias ficam mais próximos como consequência

de uma diminuição das tensões de corte. O efeito da razão entre a espessura do núcleo e das faces também é de extrema importância pois as tensões de corte são tanto maiores quanto maior for o núcleo e deste modo a convergência para os valores clássicos é mais rápida se o núcleo for menor.

Conclui-se assim que a teoria clássica não é de todo aconselhável para o projecto deste tipo de estruturas, exceptuando casos muito pouco usuais de uma viga extremamente longa. Já no caso da teoria de primeira ordem e de alta ordem a diferença é ainda bastante significativa para algumas configurações de vigas mais curtas, quer no que diz respeito à deformada, quer principalmente à distribuição de tensões e extensões que é onde se nota uma clara vantagem na teoria de ordem superior, consequência da expansão considerada no campo de deslocamentos. Esta permite obter resultados muito mais precisos e que ajudam a reconhecer zonas críticas sujeitas a tensões mais elevadas ao longo da espessura da viga.

No segundo caso estudado chegou-se à conclusão que para as temperaturas de -10°C e RT, existe uma boa concordância entre os valores de rigidez da viga obtidos experimentalmente, pelas teorias de viga e placa e pelos elementos finitos tridimensionais, principalmente na configuração de vigas longas. Já no caso de vigas curtas o mesmo não acontece, verificando-se uma grande vantagem na previsão da rigidez nos elementos de placa e tridimensionais. Os elementos de viga e TSVS acarretam um erro bastante superior quando comparado com a experimentação, embora haja uma ligeira vantagem na utilização do elemento de alta ordem. O elemento simplificado TSVS apenas consegue resultados um pouco melhores para 50°C , mas como já foi mencionado os valores obtidos experimentalmente a esta temperatura, quer na configuração de vigas longas quer curtas, resultam dos efeitos da viscoelasticidade do material usado, facto que não foi tido em conta em nenhum dos modelos usados, daí a sua maior discrepância.

Concluiu-se também que a discrepância existente no núcleo para as extensões e distorções obtidas pelos elementos tridimensionais e pelos de viga e placa, na configuração de vigas curtas e cujo aumento é acompanhado pelo aumento na temperatura, é consequência da incapacidade dos elementos de viga e placa preverem e simularem os efeitos de compressão que o carregamento aplicado nas vigas ocasionam. A magnitude da distribuição obtida por elementos finitos EFT mostra também uma zona crítica na estrutura quando sujeita a este carregamento, facto que é claramente da maior importância na detecção de zonas de rotura em projectos de engenharia e que infelizmente, pelas limitações já apresentadas, os elementos de viga e placa não prevêm. Por outro lado, os resultados obtidos para as extensões longitudinais por esses mesmos elementos, comparativamente aos elementos EFT, para vigas longas e mesmo alguns casos de vigas curtas em que a rigidez do núcleo é superior, são muito bons, o que permite simplificar a análise deste tipo de casos, não havendo necessidade de recorrer a um método tão pesado e caro como o é a construção e resolução de uma malha tridimensional.

Por fim confirma-se que a 50°C os efeitos da viscoelasticidade são os que causam as discrepâncias existentes entre os modelos e a experimentação, uma vez que tendo os elementos EFT em conta os efeitos de compressão, o único efeito restante para explicar a diferença de valores de rigidez a essa temperatura é de facto a viscoelasticidade do núcleo.

5.2. Desenvolvimentos futuros

Analisadas as conclusões tiradas neste trabalho é fácil perceber a vantagem que o desenvolvimento deste tipo de teorias tem no estudo de estruturas de compósitos *sandwich*. Assim, como forma de prolongamento do trabalho desenvolvido na presente dissertação e tendo em conta algumas condicionantes mencionadas anteriormente, sugerem-se em seguida algumas propostas para análises futuras.

Em primeiro lugar, sabe-se que muitos dos locais em que este tipo de estruturas é utilizado, como por exemplo os aviões, estão constantemente sujeitos a vibrações, quer de origem aerodinâmica quer mecânica como consequência do funcionamento dos motores. Deste modo, e como forma de complemento à parte estática aqui apresentada, seria da maior importância obterem-se as matrizes de massa deste elemento para permitir uma análise dinâmica e ainda realizar ensaios experimentais que possibilitem fazer a comparação com os resultados obtidos computacionalmente.

Outro aspecto muito importante constatado nos resultados experimentais foi o comportamento viscoelástico característico de alguns materiais utilizados nos núcleos das *sandwich*. Tal como já foi referido, a dependência das extensões com o tempo e com a temperatura influencia muito os valores obtidos. A severidade desses fenómenos em termos de projecto exige estudos mais aprofundados como, por exemplo, os ensaios à fadiga e previsão de rotura, crescendo assim a necessidade de se construírem modelos e elementos estruturais capazes de simular esses efeitos, para que seja cada vez menos necessário optar por uma via mais conservativa que se revela, conseqüentemente, mais cara.

Finalmente, e para evitar discrepâncias como as que se verificaram nos resultados obtidos para vigas curtas, propõe-se o desenvolvimento de um modelo de viga e placa que tenha em conta os efeitos de compressão que o núcleo sofre e que muito influenciam os resultados obtidos em casos de vigas mais curtas ou com um núcleo menos rijo.

Referências Bibliográficas

- [1] Allen, H. G., *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*, Pergamon Press, 1969.
- [2] Davies, J. M., *Lightweight Sandwich Construction*, Blackwell Publishing, 2001.
- [3] Zenkert, D., *The Handbook of Sandwich Construction*, EMAS, Cradley Heath, 1997.
- [4] DIAB, *DIAB Sandwich Handbook*, Sweden, 2003,
www.diabgroup.com/europe/literature/e_pdf_files/man_pdf/sandwich_hb.pdf (acedido em Maio de 2010).
- [5] Jackson, R., *Combat Legend de Havilland Mosquito*, Airlife, Shrewsbury, 2003.
- [6] Steeves, C.A., N.A. Fleck, *Material Selection in Sandwich Beam Construction*, Elsevier Scripta Materialia, 2004; 50 (10): 1335-1339.
- [7] Ashby, M.F., *Materials Selection in Mechanical Design*, 3rd Edition, Elsevier, Oxford, 2005.
- [8] Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2nd Edition, CRC Press, 2004, Boca Raton, USA.
- [9] Lopes, N., *Análise e Caracterização da Degradação de Compósitos Reforçados com Fibra de Juta e Fibra de Vidro em Ambiente Controlado (Temperatura & Humidade)*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa, 2009.
- [10] Carvalho, P., *Análise do Comportamento Mecânico e Identificação do Tipo de Falha em Estruturas Sandwich com Núcleos de Cortiça*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa, 2008.
- [11] Lopes, J.P., *Estudo Sobre a Aplicabilidade de Aglomerados de Cortiça em Estruturas Sandwich*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa, 2008.
- [12] Department of Defense, *Composite Materials Handbook – Vol.3*.
- [13] Leite, M., *Estudo Experimental, Analítico e Numérico de Vigas em Construção Sandwich Reforçada com Aplicações ao Transporte Refrigerado de Bens Perecíveis*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa, 2004.
- [14] Soares, B., *Estruturas Sandwich com Utilização de Núcleos de Cortiça*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa., 2007
- [15] Estudo de Viabilidade da Aplicação de *Sandwich* no Catamarã HS 900, <http://www.lass.nu/Reports/Sandwich%20Construction%20-%20Application%20on%20a%20Superstructure.pdf>, (consultado em Maio de 2010).
- [16] Boeing 787 Dreamliner – Program Fact Sheet, <http://www.boeing.com/commercial/787family/programfacts.html>, (consultado em Maio de 2010).

- [17] Airbus A350XWB, http://www.airbus.com/store/mm_repository/flash/a350xwb/airbus/, (consultado em Maio de 2010).
- [18] Teixeira de Freitas, S., H. Kolstein, F. Bijlaard, *Sandwich System for Renovation of Orthotropic Steel Bridge Decks*, 9th International Conference on Sandwich Structures, 2010, Pasadena, California, USA.
- [19] Vincent, R., A. Ferro, *A New Orthotropic Bridge Deck: Design, Fabrication and Construction of the Shenley Bridge Incorporating an SPS Orthotropic Bridge Deck*, In 2004 Orthotropic Bridge Conference, Sacramento, California, USA, 2004.
- [20] Feldmann, M., G. Sedlacek, A. Geler, *A System of Steel-Elastomer Sandwich Plates for Strengthening Orthotropic Bridges Decks*, *Mechanics of Composite Materials*, 2007; 43 (2): 183–190.
- [21] do Ó, H., *Comportamento de Vigas Sandwich de Secção em Caixa Sujeitas a Flexão*, Tese de Mestrado, IST/UTL, Lisboa, 2009.
- [22] Reissner, E., *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, *Journal of Applied Mechanics*, 1945; 12:69–76.
- [23] Mindlin, R.D., *Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates*, *Journal of Applied Mechanics*, 1951; 18:1031–6.
- [24] Araújo, A. L., C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares, *Finite Element Model for Hybrid Active-Passive Damping Analysis of Anisotropic Laminated Sandwich Structures*, *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2010; 12:397-419.
- [25] Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 2005.
- [26] Araújo, A.L., C.M. Mota Soares, J. Herskovits, P. Pedersen, *Development of a Finite Element Model for the Identification of Mechanical and Piezoelectric Properties Through Gradient Optimization and Experimental Vibration Data*, *Composite Structures*, 2002; 58: 307-318.
- [27] Beer, F.P., E. Russell Johnston Jr., J.T. DeWolf, *Mecânica dos Materiais*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 2003.
- [28] Mead, D.S., S. Markus, *The Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwich Beam With Arbitrary Boundary Conditions*, *Journal of Sound and Vibration*, 1969; 10(2): 163-175.
- [29] Sainsbury, M.G., Q.J. Zhang, *The Galerkin Element Method Applied to the Vibration of Damped Sandwich Beams*, *Composite and Structures*, 1999; 71:239-256.
- [30] ISO-527, *EN ISO 527:1996 Plastics – Determination of Tensile Properties*, 1996.
- [31] ASTM-C393, *C393-06: Standard Test Method for Core Shear Properties of Sandwich Constructions by Beam Flexure*, 2006.

[32] Gibson, L., M. Ashby, *Cellular solids: Structure and properties*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 1997.

[33] Carrera, E., *Historical Review of Zig-Zag Theories for Multilayered Plates and Shells*, Applied Mechanics Reviews, 2003; 56 (3): 287–308.

[34] Brischetto, S., E. Carrera, L. Demasi, *Improved Response of Unsymmetrical Laminated Sandwich Plates by Using Zig-Zag Functions*, Journal of Sandwich Structures and Materials, 2009; 11: 257–267.

[35] Hardy, S., M. Pipelzadeh, *Static Analysis of Short Beams*, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 1991; 26 (1): 15–29.