



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa



Módulo para Resolução de Problemas de Localização de Pontos em Ambiente SIG

Isabel Cristina Bilro Batista

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia do Território

Júri

Presidente: Prof. Rui Manuel Moura de Carvalho Oliveira

Orientador: Prof. Doutor Alexandre Bacelar Gonçalves

Vogais: Prof^ª. Doutora Cristina Marta Castilho Pereira Santos Gomes

Prof^ª. Doutora Maria Beatriz Marques Condessa

Novembro de 2010

Agradecimentos

Antes de dar esta dissertação por concluída gostaria de agradecer a todos os que me apoiaram e que me fizeram acreditar em mim própria. A todos os que me deram força para continuar dia após dia e ao mesmo tempo me criaram momentos de descontração.

Um particular agradecimento ao meu orientador, Professor Dr. Alexandre Bacelar Gonçalves, por toda a dedicação, sabedoria e paciência com que me guiou neste momento importante da minha vida.

Aos meus pais por mais uma vez me apoiarem e ajudarem nesta fase, possibilitando a conclusão deste curso e me terem tornado a pessoa que sou hoje. Ao meu irmão por ter feito com que me abstraísse inúmeras vezes, de modo a recuperar a “maninha” perdida no meio da dissertação. A todos os meus familiares que me deram uma palavra de apoio quando necessitava.

Aos meus amigos que me fizeram descontrair quando mais precisava mas também me ajudaram e fizeram um esforço para me compreender, a mim e a esta dissertação.

Ao Tiago, por ser quem é, por ter tido muita paciência e me ter transmitido todo o carinho e amor que um namorado pode oferecer.

A todos os que participaram do melhor modo nesta fase da minha vida que termina agora, desejando que continuem a fazê-lo no futuro.

Resumo

A problemática da localização de equipamentos coloca-se frequentemente na gestão e planeamento do território em diversas escalas, desde a prospecção da localização conjunta ideal de uma rede hospitalar a nível nacional até à localização de lojas ou de ecopontos a nível municipal. Diversos modelos matemáticos podem ser usados para representar estes problemas espaciais no contexto do planeamento, em conjunto com uma série de metodologias para a sua resolução, mas por vezes, devido a desconhecimento, indisponibilidade, ou dificuldades operativas, os planeadores não têm explorado todas as suas potencialidades. Por outro lado, os Sistemas de Informação Geográfica (SIG) são usados extensivamente e permitem múltiplos tipos de análise num vasto leque de problemas espaciais, mas, genericamente, não dispõem da capacidade de indicar soluções para problemas de localização.

Nesta dissertação apresenta-se um módulo de resolução de problemas de localização de pontos a executar em ambiente SIG. É discutida a integração de modelos e métodos de resolução de problemas de localização no ambiente SIG. O módulo tem a particularidade de poder ser usado não apenas por especialistas mas por todos os utilizadores do programa.

Inicialmente, os diversos modelos para problemas de localização de pontos considerados no trabalho são apresentados. Os métodos heurísticos utilizados para a resolução desses problemas são discutidos seguidamente: alguns foram directamente recolhidos da literatura, enquanto outros foram melhorados. Desenvolveu-se um questionário que foi incluído no módulo para permitir aos utilizadores identificar o tipo de problema em que estivessem interessados. Por fim, um exemplo de aplicação ilustra uma sessão completa com o módulo desenvolvido.

Palavras-chave:

- Problemas de localização, Heurísticas, SIG, Análise espacial

Abstract

Problems concerning the location of facilities are frequent in territorial management and planning at various scales, from the inspection on the ideal combined location for a network of hospitals at the national level to the best location of shops or waste collecting bins within a municipality. Mathematical models can be used to represent such spatial problems in the planning context, together with a wide range of methodologies to solve them, but sometimes due to unawareness, unavailability or operative difficulties, this field has not been explored to the full extent of its applicability. On the other hand, Geographic Information Systems (GIS) are widely used programs that enable multiple types of analysis for an extensive range of spatial problems, but, generically, do not have the ability to provide solutions for location problems.

In this work a module to solve point facility location problems operating on a GIS package is presented. The issues on the integration of the models and solution methodologies for location problems in a GIS are focused. This module has the particularity of being usable not just by experts on location problems but by all GIS users.

In a first section, the various models for point location problems considered in the work are presented. The used heuristic methodologies for solving the referred problems are also discussed: some are collected from the literature without changes, while others were improved from known algorithms. A questionnaire was developed and included in the module, allowing users to identify the type of problem they are interested in. In the last part, an application example displays a complete session with the implemented module.

Keywords:

- Facility location problems, Heuristics, GIS, Spatial analysis

Índice

| | |
|---|-----------|
| AGRADECIMENTOS | I |
| RESUMO | II |
| ABSTRACT | III |
| ÍNDICE..... | IV |
| ÍNDICE DE TABELAS | VI |
| ÍNDICE DE FIGURAS..... | VI |
| LISTA DE ACRÓNIMOS..... | VIII |
| 1 INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1 ENQUADRAMENTO DO TEMA..... | 1 |
| 1.2 OBJECTIVOS | 2 |
| 1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO | 3 |
| 2 PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE PONTOS | 4 |
| 2.1 PROBLEMAS DE COBERTURA..... | 4 |
| 2.1.1 <i>Cobertura de conjuntos</i> | 5 |
| 2.1.2 <i>Máxima cobertura</i> | 7 |
| 2.2 PROBLEMAS DE CENTRAGEM..... | 9 |
| 2.2.1 <i>Centragem em vértices</i> | 9 |
| 2.2.2 <i>Centragem absoluta</i> | 11 |
| 2.3 PROBLEMAS DE MEDIANA | 12 |
| 2.4 PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE EQUIPAMENTOS COM CUSTO FIXO..... | 14 |
| 2.4.1 <i>Custo fixo sem capacidade</i> | 14 |
| 2.4.2 <i>Custo fixo com capacidade</i> | 16 |
| 3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE PONTOS | 19 |
| 3.1 COMPLEXIDADE ALGORÍTMICA..... | 19 |
| 3.2 PROBLEMAS DE COBERTURA | 21 |
| 3.2.1 <i>Máxima cobertura</i> | 21 |
| 3.2.2 <i>Cobertura de conjuntos</i> | 25 |
| 3.3 PROBLEMAS DE CENTRAGEM | 27 |
| 3.3.1 <i>Centragem absoluta</i> | 27 |
| 3.3.2 <i>Centragem em vértices</i> | 31 |
| 3.4 PROBLEMAS DE MEDIANA | 34 |
| 3.5 PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE EQUIPAMENTOS COM CUSTO FIXO..... | 37 |
| 3.5.1 <i>Custo fixo sem capacidade</i> | 37 |
| 3.5.2 <i>Custo fixo com capacidade</i> | 41 |
| 3.6 LOCALIZAÇÃO DE PONTOS EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO GEOGRÁFICA..... | 43 |
| 3.6.1 <i>Introdução</i> | 43 |
| 3.6.2 <i>Library of Location Algorithms</i> | 44 |
| 4 MÓDULO PARA LOCALIZAÇÃO DE PONTOS EM AMBIENTE SIG | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 46 |
| 4.2 | INTERFACE..... | 46 |
| 4.3 | EXEMPLO DE APLICAÇÃO | 52 |
| 5 | CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS | 56 |
| 6 | BIBLIOGRAFIA | 59 |

Índice de Tabelas

| | |
|--|-----------|
| <i>Tabela 1: Procura coberta por localização em problema de máxima cobertura.....</i> | <i>8</i> |
| <i>Tabela 2: Distâncias máximas entre nós do grafo exemplo</i> | <i>10</i> |
| <i>Tabela 3: Função objectivo para cada localização possível no exemplo de P-mediana</i> | <i>13</i> |
| <i>Tabela 4: Função objectivo para cada localização possível no exemplo de custo fixo sem capacidade</i> | <i>15</i> |
| <i>Tabela 5: Função objectivo para localizações possíveis no exemplo de custo fixo com capacidade.....</i> | <i>17</i> |
| <i>Tabela 6: Tempo de resolução de problemas combinatórios variando a complexidade e a dimensão do problema</i> | <i>19</i> |
| <i>Tabela 7: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo ganancioso com o de substituição em exemplo da Máxima Cobertura com P Elementos.....</i> | <i>23</i> |
| <i>Tabela 8: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo ganancioso com o de substituição em exemplo da Máxima Cobertura com Percentagem.....</i> | <i>25</i> |
| <i>Tabela 9: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo de cobertura de conjuntos.....</i> | <i>26</i> |
| <i>Tabela 10: Resolução do exemplo do algoritmo 1-Centro Absoluto Com Peso</i> | <i>31</i> |
| <i>Tabela 11: Resolução do exemplo do algoritmo P-Centro Sem Peso</i> | <i>32</i> |
| <i>Tabela 12: Resolução do exemplo do algoritmo P-Centro Com Peso</i> | <i>34</i> |
| <i>Tabela 13: Resultados intermédios do exemplo da resolução P-Mediana</i> | <i>37</i> |
| <i>Tabela 14: Custos fixos admitidos no exemplo de problemas de Custo Fixo sem Capacidade.....</i> | <i>40</i> |
| <i>Tabela 15: Resultados do exemplo da resolução de Custo Fixo sem Capacidade</i> | <i>40</i> |
| <i>Tabela 16: Dados dos pontos utilizados no exemplo de Custo Fixo com Capacidade</i> | <i>42</i> |
| <i>Tabela 17: Características que diferenciam as resoluções de problemas de localização de pontos adoptadas.....</i> | <i>47</i> |
| <i>Tabela 18: Informação apresentada na solução consoante resolução utilizada.....</i> | <i>52</i> |

Índice de Figuras

| | |
|--|-----------|
| <i>Figura 1: Estrutura da dissertação</i> | <i>3</i> |
| <i>Figura 2: Grafo exemplo para modelo de cobertura de conjuntos.....</i> | <i>6</i> |
| <i>Figura 3: Grafo exemplo para modelo de máxima cobertura</i> | <i>8</i> |
| <i>Figura 4: Grafo exemplo para modelo de centragem em vértices</i> | <i>10</i> |
| <i>Figura 5: Grafo exemplo para modelo de centragem absoluta.....</i> | <i>11</i> |
| <i>Figura 6: Resolução do grafo exemplo para modelo de centragem absoluta.....</i> | <i>11</i> |
| <i>Figura 7: Grafo exemplo para modelo de P-mediana.....</i> | <i>13</i> |
| <i>Figura 8: Grafo exemplo para modelo de custo fixo sem capacidade.....</i> | <i>15</i> |
| <i>Figura 9: Grafo exemplo para modelo de custo fixo com capacidade.....</i> | <i>17</i> |
| <i>Figura 10: Soluções possíveis para a localização do(s) equipamento(s) no exemplo do modelo de custo fixo com capacidade</i> | <i>18</i> |

| | |
|--|-----------|
| <i>Figura 11: Variação da função objectivo relativamente à variação da capacidade em B, no exemplo do modelo de custo fixo com capacidade.....</i> | <i>18</i> |
| <i>Figura 12: Fluxograma do algoritmo Greedy com introdução do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura com P elementos.....</i> | <i>21</i> |
| <i>Figura 13: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura.....</i> | <i>22</i> |
| <i>Figura 14: Esquema do território de Timor-Leste.....</i> | <i>23</i> |
| <i>Figura 15: Fluxograma do algoritmo Greedy com introdução do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura com percentagem conhecida.....</i> | <i>24</i> |
| <i>Figura 16: Fluxograma do algoritmo de Cobertura de Conjuntos.....</i> | <i>26</i> |
| <i>Figura 17: Fluxograma para a resolução de problemas 1-centro absoluto sem peso.....</i> | <i>27</i> |
| <i>Figura 18: Esquema de Portugal Continental com estações dos comboios intercidades para exemplos de problemas de centragem.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Figura 19: Fluxograma para a resolução de problemas 2-centro absoluto.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Figura 20: Esquema de Portugal Continental com estações dos comboios intercidades, do exemplo para o algoritmo 2-centro absoluto, já com obtenção de dois sub-grafos.....</i> | <i>29</i> |
| <i>Figura 21: Fluxograma para a resolução de problemas 1-Centro Absoluto Com Peso.....</i> | <i>30</i> |
| <i>Figura 22: Fluxograma para a resolução de problemas P-Centro Sem Peso.....</i> | <i>32</i> |
| <i>Figura 23: Fluxograma para a resolução de problemas P-Centro Com Peso.....</i> | <i>33</i> |
| <i>Figura 24: Fluxograma para a resolução de problemas P-Mediana.....</i> | <i>35</i> |
| <i>Figura 25: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de P-Mediana.....</i> | <i>36</i> |
| <i>Figura 26: Fluxograma para a resolução de problemas de Custo Fixo sem Capacidade.....</i> | <i>38</i> |
| <i>Figura 27: Fluxograma do algoritmo add para problemas de Custo Fixo sem Capacidade.....</i> | <i>38</i> |
| <i>Figura 28: Fluxograma do algoritmo drop para problemas de Custo Fixo sem Capacidade.....</i> | <i>39</i> |
| <i>Figura 29: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de Custo Fixo sem Capacidade.....</i> | <i>39</i> |
| <i>Figura 30: Fluxograma para a resolução de problemas de Custo Fixo com Capacidade.....</i> | <i>41</i> |
| <i>Figura 31: Interface gráfico de LoLA.....</i> | <i>44</i> |
| <i>Figura 32: Esquema em árvore de perguntas ao utilizador.....</i> | <i>48</i> |
| <i>Figura 33: Início do módulo de problemas de localização de pontos.....</i> | <i>50</i> |
| <i>Figura 34: Primeira questão do módulo de perguntas.....</i> | <i>50</i> |
| <i>Figura 35: Introdução de dados para um problema de cobertura de conjuntos.....</i> | <i>51</i> |
| <i>Figura 36: Escolha da resolução pretendida.....</i> | <i>51</i> |
| <i>Figura 37: Exemplo de utilização do módulo de perguntas.....</i> | <i>53</i> |
| <i>Figura 38: Preenchimento de dados do problema exemplo.....</i> | <i>54</i> |
| <i>Figura 39: Solução final para o problema exemplo.....</i> | <i>54</i> |
| <i>Figura 40: Guardar novo ficheiro para o problema exemplo.....</i> | <i>55</i> |
| <i>Figura 41: Representação da selecção de pontos para o problema exemplo.....</i> | <i>55</i> |
| <i>Figura 42: Domínio das novas tecnologias versus domínio dos temas.....</i> | <i>57</i> |

Lista de Acrónimos

| | |
|--------|--|
| DFG | Deutsche Forschungsgemeinschaft |
| DGOTDU | Direcção-Geral do Ordenamento do Território e Desenvolvimento Urbano |
| INE | Instituto Nacional de Estatística |
| LBPOTU | Lei de Bases da Política de Ordenamento do Território e Urbanismo |
| LEDA | Library of Efficient Data types and Algorithms |
| LoLA | <i>Library of Location Algorithms</i> |
| PDM | Plano Director Municipal |
| PMOT | Planos Municipais de Ordenamento do Território |
| RJIGT | Regime Jurídico dos Instrumentos de Gestão Territorial |
| SIG | Sistemas de Informação Geográfica |
| VB | <i>Visual Basic</i> |
| VBA | <i>Visual Basic for Applications</i> |

1 Introdução

1.1 Enquadramento do tema

Nos últimos anos, em Portugal, a legislação aplicável ao planeamento e ordenamento do território tem sofrido alterações importantes, tanto na forma processual de elaboração de planos como na sua divulgação e interacção com os cidadãos. A integração de tecnologias de informação, por exemplo na administração pública local, possibilitou ao cidadão novas formas de comunicação com o nível decisório. Uma maior oportunidade de participação pública (Abrantes e Estanqueiro 2008) ou uma forma mais fácil de consulta de planos são algumas das novidades destas alterações à Lei de Bases da Política de Ordenamento do Território e Urbanismo (LBOTU) e ao Regime Jurídico dos Instrumentos de Gestão Territorial (RJIGT).

No planeamento e gestão territorial, a observação e análise espacial de um determinado território são peças essenciais na execução de um plano. A distribuição espacial da ocupação do solo constitui parte integrante de qualquer instrumento de gestão territorial. Com a introdução dos sistemas de informação geográfica, o planeador dispõe de ferramentas que anteriormente não poderia utilizar de forma automática, como por exemplo, a sobreposição de várias *layers*. Estes sistemas computacionais não vieram apenas facilitar a representação da informação espacial, são também essenciais na sua análise. Com a obrigatoriedade de disponibilizar os Planos Municipais de Ordenamento do Território (PMOT) no sítio electrónico do município a que dizem respeito, muitos municípios desenvolveram portais próprios para esse fim, baseados em sistemas de informação geográfica. A título de exemplo, no sítio electrónico da Câmara Municipal de Vila Franca de Xira existe uma ligação para o designado “SIG – Mapa Interactivo”. Este contém para além do Plano Director Municipal (PDM) outras funcionalidades de apoio ao munícipe ou ao turista/visitante, designadamente o roteiro digital e a identificação do património cultural.

Uma das problemáticas mais habituais no planeamento é a da localização. Encontrar a melhor localização para um equipamento educativo, um equipamento de saúde, ou simplesmente para instalação de ecopontos, é essencial no planeamento. Muitas vezes, a decisão é tomada sem ter por base um modelo explicativo, por desconhecimento da existência destes ou por dificuldades de aplicação. A modelação matemática de problemas cuja solução é a localização óptima de equipamentos (no sentido lato da palavra) com determinadas restrições de custo, de cobertura, entre outras, é conhecida por Ciência da Localização (*Location Science*), sendo este tipo de problemas denominados Problemas de Localização. Existem vários modelos para resolução de problemas de localização de pontos; porém, para determinar a localização ideal, ou seja, a solução de um problema, recorre-se a *software* de optimização dedicado, no qual é necessário modelar o problema em termos de variáveis e restrições. As respectivas soluções podem ser exactas (no sentido em que encontram a melhor solução possível para o problema) ou recorrem a métodos ditos heurísticos (nos quais não é garantido que a solução apresentada seja a melhor possível de entre todo o conjunto de soluções para o problema).

Para o utilizador poder recorrer a este tipo de soluções computacionais deverá ter algum conhecimento quer sobre a estrutura do problema em questão, quer sobre as diversas metodologias de resolução que lhe poderão ser oferecidas, bem como compreender o impacto destas soluções nas suas tomadas de decisão. Para além destes factos, as soluções computacionais não estão interligadas, o que obriga o utilizador a exportar de forma sucessiva dados entre plataformas, numa estratégia designada *loose coupling* (Church 2002).

Deste modo, seria interessante poder no mesmo ambiente computacional dispor tanto da componente espacial/geográfica do problema (Mendes 2005), ou seja, da integração ou importação de informação geográfica, da visualização e apresentação da mesma, da facilidade em executar análise espacial e de outras capacidades normalmente disponibilizadas pelos SIG, como da capacidade de poder obter e avaliar as soluções para diversos problemas de localização, sem ter recorrer às designadas estratégias de *loose coupling*.

1.2 Objectivos

Esta dissertação tem como objectivo principal desenvolver um módulo de resolução de problemas de localização de pontos a executar em ambiente SIG.

Os objectivos complementares para atingir o objectivo principal são:

- *Sintetizar um conjunto variado de modelos de localização discreta de pontos*
De entre os diversos problemas de localização discreta de pontos, pretende-se obter uma base de modelos que seja diversificada e que cubra os problemas mais comuns: cobertura, centragem, mediana e custo fixo.
- *Estruturar um interface de apoio ao utilizador não familiarizado com problemas de localização para o módulo a desenvolver*
Para os utilizadores que desconhecem os problemas de localização e as suas resoluções mas que necessitem deste módulo de apoio à decisão, o desenvolvimento de um interface que consiga definir o tipo de problema do utilizador e encontrar a solução para o mesmo, é uma vantagem. Este interface basear-se-á num esquema de perguntas.
- *Melhorar aspectos algorítmicos nas resoluções apresentadas na literatura consultada*
Algumas resoluções encontradas na bibliografia contêm aspectos algorítmicos que podem ser melhorados no contexto deste módulo, ao nível da própria estrutura do algoritmo ou simplesmente da introdução de dados e apresentação da solução.

1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação encontra-se subdividida em cinco capítulos, conforme descrito na figura seguinte. É no primeiro que se enquadra o tema e se definem os objectivos a seguir. O segundo capítulo baseia-se no estado da arte relativo aos problemas de localização de pontos, no qual se descrevem os problemas mais comuns encontrados na bibliografia, o respectivo modelo matemático e um pequeno exemplo de aplicação desta. O terceiro capítulo está subdividido em duas partes distintas. Na primeira parte são seleccionadas as resoluções algorítmicas a integrar no módulo bem como efectuadas melhorias às mesmas. Na segunda parte são apresentados exemplos da integração da análise espacial e problemas de localização de pontos em sistemas de informação geográfica. No quarto capítulo é apresentado o módulo de localização de pontos desenvolvido num ambiente SIG. Este é iniciado com uma introdução e justificação do seu desenvolvimento, sendo posteriormente apresentado o interface do módulo e, no final do capítulo, o exemplo de aplicação do mesmo. No quinto capítulo são apresentadas as conclusões e sugeridos desenvolvimentos futuros.

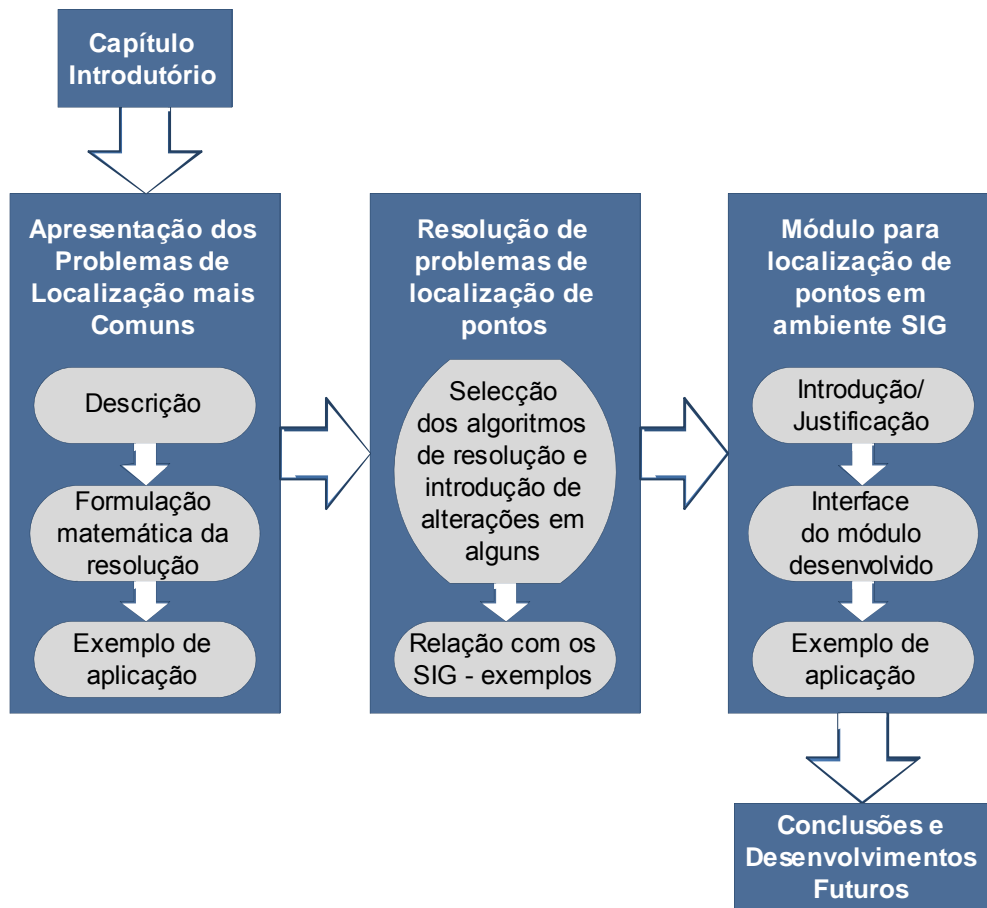


Figura 1: Estrutura da dissertação

2 Problemas de localização de pontos

Muitos dos modelos para problemas de localização consideram a possibilidade de escolher equipamentos de entre um conjunto de localizações predefinidas, e que se relacionarão de algum modo com o território envolvente. As muitas opções quanto aos parâmetros e objectivos que definem cada problema levaram à consideração de diversas famílias em que estes se podem enquadrar. As famílias seguidamente apresentadas contextualizam os problemas numa perspectiva económica, em que existem elementos de “oferta” correspondentes aos equipamentos a instalar, e elementos de “procura” correspondentes aos locais distribuídos pelo território e que solicitam algum serviço aos referidos equipamentos. É ainda necessário considerar, na descrição de qualquer problema deste tipo, parâmetros que descrevam a relação entre oferta e procura, como por exemplo a distância entre estes elementos.

2.1 Problemas de cobertura

Em áreas como a educação, a saúde ou até mesmo a segurança pública, pretende-se que a rede nacional, regional ou local seja totalmente coberta ou que seja o mais coberta possível pelos equipamentos respectivos. Situações como estas podem ser tratadas como problemas de cobertura, nos quais se pretende maximizar a procura coberta com um número mínimo de equipamentos.

A distância de cobertura pode ser definida como a distância para a qual um serviço garantido por um ponto (que contenha um equipamento) esteja disponível a todos os outros pontos dentro da área de procura predefinida. Caso a distância entre o ponto que contém o equipamento e um outro ponto seja superior à distância de cobertura, considera-se que a cobertura do equipamento a esse ponto não está satisfeita. Assim, um ponto encontra-se coberto quando a distância entre este e o ponto que contém o equipamento é inferior ou igual à distância de cobertura. A título de exemplo, para a programação de uma escola básica do 1º ciclo, o valor de irradiação máxima tido em conta é de 1 km a pé, que corresponde a 15 minutos, ou de 40 minutos em transportes colectivos (DGOTDU 2002). Nesta situação, a distância de cobertura pode ser de 15 minutos ou de 40 minutos, consoante o meio de transporte considerado. Diz-se que os alunos do 1º ciclo que residam dentro do raio de cobertura, estabelecido pela irradiação máxima, se encontram cobertos por este equipamento escolar.

Os problemas de cobertura podem ser decompostos em duas classes: cobertura de conjuntos (*set covering location problem*) e máxima cobertura (*maximum covering location problem*) (Daskin 1995).

2.1.1 Cobertura de conjuntos

O objectivo dos modelos de cobertura de conjuntos é encontrar um conjunto de equipamentos com o menor custo associado a um conjunto finito de pontos, no qual todos têm de ser cobertos por, pelo menos, um equipamento.

A formulação matemática para a cobertura de conjuntos é a apresentada de seguida (Daskin 1995), na qual i corresponde a um ponto que será necessário ser coberto e j refere-se a um ponto no qual é possível instalar um equipamento.

| | | |
|-----------------------|---|---------|
| Variáveis de entrada: | $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o ponto } j \text{ cobre o ponto } i \\ 0 & \text{se o ponto } j \text{ não cobre o ponto } i \end{cases}$ $f_j = \text{custo de localizar o equipamento em } j$ | |
| Variáveis de decisão: | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | |
| A minimizar: | $\sum_j f_j X_j$ | (2.1) |
| Sujeito a: | $\sum_j a_{ij} X_j \geq 1 \quad \forall i$ | (2.2) |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j$ | (2.3) |

A primeira variável de entrada tem como objectivo indicar se, localizando o equipamento em j , o ponto i é coberto por este. Esta é uma variável binária com a qual se pode verificar, por exemplo, o número de pontos cobertos por um único equipamento localizado em j através do somatório desta variável para cada equipamento. A segunda variável de entrada, f_j analisa, para cada alocação de um equipamento, o custo associado.

A equação (2.1) é a função objectivo, a qual minimiza o custo total da instalação dos equipamentos. Esta é sujeita a duas restrições. Na primeira, (2.2), é necessário que cada ponto seja coberto, no mínimo, por um equipamento. Com esta restrição é possível verificar o número de equipamentos alocados que cobre apenas o ponto i . A segunda restrição, (2.3), confere à variável de decisão dados acerca da localização ou não de um equipamento em j , ou seja, todos os pontos devem conter informação na variável X_j com valor 1 ou 0, caso tenha ou não equipamento instalado. Esta restrição confere integralidade ao modelo.

Um caso de simplificação da cobertura de conjuntos ocorre quando o custo de alocação em todos os pontos é igual. Neste caso a função objectivo obtida é:

| | | |
|------------|--------------|---------|
| Minimizar: | $\sum_j X_j$ | (2.4) |
|------------|--------------|---------|

A equação (2.4) pode ser também utilizada nas situações em que o objectivo da localização dos equipamentos é apenas fixar o menor número de equipamentos possível.

O problema de cobertura de conjuntos num grafo geral é NP-completo, tanto para a equação (2.1), como para a equação (2.4).

Na figura seguinte é apresentado um exemplo de aplicação deste modelo, no qual se considera a formulação simples, ou seja, o custo de localização é igual para todos os pontos.

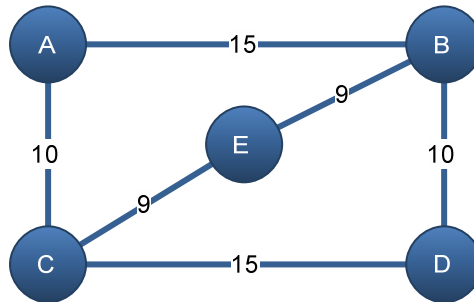


Figura 2: Grafo exemplo para modelo de cobertura de conjuntos

A distância de cobertura assumida neste exemplo é $D_C = 10$ unidades.

Segundo a formulação atrás transcrita, pretende-se minimizar $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E$, estando sujeito às restrições:

| | | | | | | |
|-----------------------------|---------|---------|---------|--------------|--------|----------|
| Nó A coberto | $X_A +$ | $X_C +$ | | ≥ 1 | | |
| Nó B coberto | | $X_B +$ | $X_D +$ | $X_E \geq 1$ | | |
| Nó C coberto | $X_A +$ | $X_C +$ | X_E | ≥ 1 | | |
| Nó D coberto | | $X_B +$ | $X_D +$ | ≥ 1 | | |
| Nó E coberto | | $X_B +$ | $X_C +$ | $X_E \geq 1$ | | |
| Restrições de integralidade | $X_A,$ | $X_B,$ | $X_C,$ | $X_D,$ | $X_E,$ | $= 0, 1$ |

Uma solução possível para este problema seria $X_A = X_B = 1$ e $X_C = X_D = X_E = 0$, tendo a função objectivo o valor de 2 unidades. Assim, são localizados dois equipamentos, um no ponto A e outro no ponto B. O equipamento alocado em A cobre o próprio ponto e C, enquanto que o equipamento localizado em B cobre o próprio B e ainda D e E, completando o total de procura coberta.

2.1.2 Máxima cobertura

Os modelos de máxima cobertura têm como objectivo maximizar a procura coberta fixando o número de equipamentos a localizar. Pretende-se então cobrir o máximo de procura com o número de equipamentos definido *a priori*.

A máxima cobertura tem a seguinte formulação matemática (Daskin 1995):

| | | |
|-----------------------|---|---------|
| Variáveis de entrada: | $h_i = \text{procura no nó } i$ | |
| | $P = \text{número de equipamentos a localizar}$ | |
| Variável de decisão: | $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{se o nó } i \text{ está coberto} \\ 0 & \text{se o nó } i \text{ não está coberto} \end{cases}$ | |
| | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | |
| Maximizar: | $\sum_i h_i Z_i$ | (2.5) |
| | $Z_i \leq \sum_j a_{ij} X_j \quad \forall i$ | (2.6) |
| Sujeito a: | $\sum_j X_j \leq P$ | (2.7) |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j$ | (2.8) |
| | $Z_i = 0, 1 \quad \forall i$ | (2.9) |

A variável de entrada P fixa o número de equipamentos a localizar. Por sua vez, a variável de entrada h_i indica a procura existente em cada nó i. Z_i é a variável binária que declara o estado de cada nó i quanto à cobertura, sendo a variável de decisão desta formulação. A função objectivo, (2.5), maximiza a procura satisfeita pela cobertura de um conjunto de equipamento. Esta é sujeita a quatro restrições. A primeira, (2.6), deve-se ao facto de a procura do nó i contar como coberta apenas se o equipamento for instalado num nó que cubra i. A restrição seguinte, (2.7), garante que não são localizados mais do que os P equipamentos anteriormente definidos. As últimas restrições indicam que cada nó j e i possuem apenas um de dois estados possíveis: no primeiro caso 1 e 0 indicam, respectivamente, a localização ou não de um equipamento; no segundo caso 1 e 0 indicam se um ponto se encontra ou não coberto. São as restrições de integralidade.

Na figura seguinte é apresentado um exemplo de aplicação deste modelo. Para este exemplo é considerada uma distância de cobertura igual a 18, $D_c = 18$ unidades, e um número máximo de equipamentos de 1, $P = 1$.

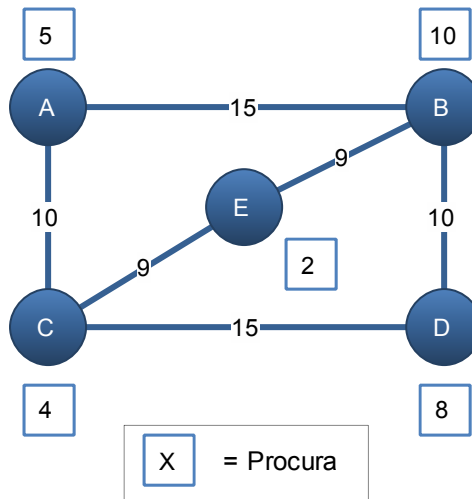


Figura 3: Grafo exemplo para modelo de máxima cobertura

De acordo com a formulação matemática acima descrita, pretende-se maximizar a procura coberta: Maximizar: $5Z_A + 10Z_B + 4Z_C + 8Z_D + 2Z_E$

Estando sujeito às seguintes restrições:

| | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------|
| Nó A coberto | $X_A + X_B + X_C$ | $\geq Z_A$ |
| Nó B coberto | $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E$ | $\geq Z_B$ |
| Nó C coberto | $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E$ | $\geq Z_C$ |
| Nó D coberto | $X_B + X_C + X_D$ | $\geq Z_D$ |
| Nó E coberto | $X_B + X_C + X_E$ | $\geq Z_E$ |
| N.º Equipamentos a localizar | $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E$ | ≤ 1 |
| Restrições de integralidade | X_A, X_B, X_C, X_D, X_E | $= 0, 1$ |
| | Z_A, Z_B, Z_C, Z_D, Z_E | $= 0, 1$ |

Tabela 1: Procura coberta por localização em problema de máxima cobertura

| Localizar em | Procura coberta |
|--------------|-------------------|
| A | $5+10+4 = 19$ |
| B | $5+10+4+8+2 = 29$ |
| C | $5+10+4+8+2 = 29$ |
| D | $10+4+8 = 22$ |
| E | $10+4+2 = 16$ |

Uma solução para este problema exemplo é a localização do equipamento em B, cobrindo um total de 29 unidades de procura, como se pode verificar na Tabela 1. Este resultado da função objectivo é igual à situação em que o equipamento é localizado em C. Qualquer uma destas soluções é uma solução óptima.

2.2 Problemas de centragem

Contrariamente ao que ocorre nos problemas de cobertura, nos quais a distância de cobertura é conhecida e o número de equipamentos a localizar é o factor desconhecido, os modelos para resolução de problemas de centragem têm como principal objectivo minimizar a distância de cobertura, de modo a que cada nó seja coberto por um equipamento. A distância de cobertura é então determinada endogenamente ao contrário do que acontece nos problemas de cobertura. Estes problemas de localização são conhecidos como problemas P-centro (*P-center problems*) e pretende-se que os equipamentos se localizem o mais central em relação à procura.

Existem dois tipos de problemas de centragem. Aqueles em que apenas é possível localizar os equipamentos nos nós existentes designam-se de Problemas de Centragem em Vértices (*vertex center problems*), enquanto os Problemas de Centragem Absoluta (*absolute center problems*) são caracterizados por se poderem localizar os equipamentos em qualquer ponto da rede, seja em nós ou em arcos.

2.2.1 Centragem em vértices

Como referido anteriormente, nos problemas de centragem em vértices pretende-se minimizar a distância de cobertura, podendo localizar os equipamentos apenas nos nós.

Estes têm a seguinte formulação matemática (Daskin 1995):

| | | |
|-----------------------|---|----------|
| Variáveis de entrada: | d_{ij} = distância entre o nó i e o equipamento localizado no sítio candidato j | |
| | P = número de equipamentos a localizar | |
| Variáveis de decisão: | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | |
| | Y_{ij} = fracção de procura do nó i que é servida pelo equipamento localizado em j | |
| | W = distância máxima entre a procura do nó e o equipamento mais próximo | |
| Minimizar: | W | (2.10) |
| | $\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i$ | (2.11) |
| | $\sum_j X_j = P$ | (2.12) |
| Sujeito a: | $Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j$ | (2.13) |
| | $W \geq \sum_j d_{ij} Y_{ij} \quad \forall i$ | (2.14) |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j$ | (2.15) |
| | $Y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ | (2.16) |

A função objectivo minimiza a distância máxima entre a procura do nó e o equipamento mais próximo (2.10). A primeira restrição, (2.11), define que toda a procura do nó i tem de estar associada a um equipamento situado em j para todos os nós i . A restrição seguinte, (2.12), exige que todos os equipamentos P tenham de ser localizados. A restrição (2.13) estipula que a procura de um nó i só pode estar associada a um nó j caso esteja localizado um equipamento no nó j . A distância máxima entre a procura do nó e o equipamento mais próximo tem de ser maior ou igual à distância entre qualquer procura do nó i e o equipamento j a que está associado, (2.14). As restrições (2.15) e (2.16) conferem a integralidade e não negatividade do modelo, respectivamente.

De seguida é apresentado um exemplo de aplicação deste modelo, no qual o objectivo é localizar $P=1$ equipamento.

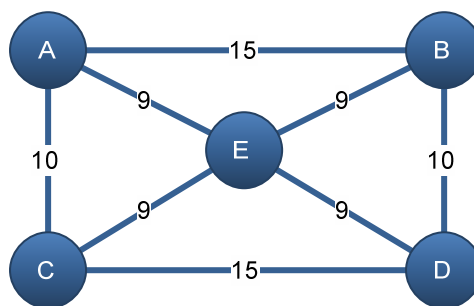


Figura 4: Grafo exemplo para modelo de centragem em vértices

Pretende-se minimizar a distância máxima entre a procura do nó e o equipamento mais próximo. Visto que o equipamento a instalar apenas se pode localizar num nó, obtém-se a seguinte tabela de distâncias máximas:

Tabela 2: Distâncias máximas entre nós do grafo exemplo

| Localizar em | Distância máxima |
|--------------|------------------|
| A | 18 |
| B | 18 |
| C | 18 |
| D | 18 |
| E | 9 |

Como se pode verificar, o equipamento deve ser localizado no nó E, uma vez que apresenta a menor distância máxima, ou seja, é o ponto mais central.

2.2.2 Centragem absoluta

Os problemas de centragem absoluta são idênticos aos problemas de centragem em vértices, tendo uma formulação matemática igual à destes. O objectivo dos modelos de centragem absoluta é também o mesmo dos anteriores, ou seja, minimizar a distância de cobertura para que todos os nós de procura sejam cobertos por um equipamento. O que diferencia estes dois tipos de problemas é a possibilidade de nestes últimos se localizarem os equipamentos em qualquer ponto da rede, não estando restringidos aos nós existentes. Por este motivo, os problemas de centragem absoluta oferecem, à partida, uma solução de menor custo para um problema idêntico. Em baixo é apresentado um exemplo de resolução deste tipo de problemas.

Pretende-se, para este exemplo, localizar um equipamento no grafo.

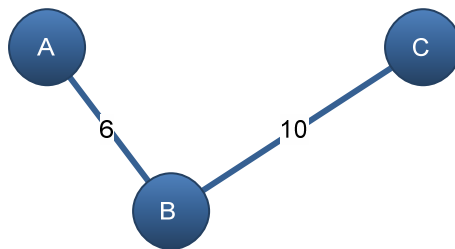


Figura 5: Grafo exemplo para modelo de centragem absoluta

Como o objectivo destes modelos é minimizar a distância de cobertura, o equipamento deve ser localizado no ponto assinalado na figura seguinte, uma vez que a distância máxima para os nós da rede é igual a 8. Esta é a distância mínima que se consegue obter nesta rede.

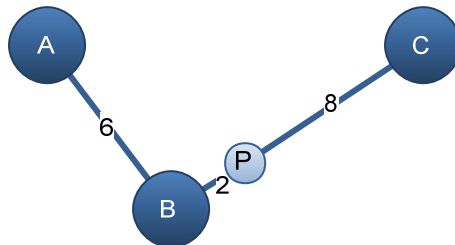


Figura 6: Resolução do grafo exemplo para modelo de centragem absoluta

2.3 Problemas de Mediana

Nos problemas de mediana o serviço associado à localização dos equipamentos degrada-se com a distância, ou seja, o aumento da distância implica menor qualidade do serviço. Esta é uma característica que os diferencia dos problemas vistos anteriormente. A noção de distância de cobertura descrita nos problemas anteriores não é aplicada nestes. Considera-se que todos os pontos se podem cobrir entre si, contudo com custos associados diferentes. Assim, são problemas de mediana situações em que se pretende localizar equipamentos para os quais não existe restrição de cobertura, mas os custos do serviço são diferenciados. Nos problemas de P-mediana o objectivo é localizar P equipamentos, definidos *a priori*, numa rede, de modo a minimizar o custo desta localização.

Este tipo de problemas é formulado do seguinte modo (Daskin 1995):

| | | | |
|-----------------------|---|---|---|
| Variáveis de entrada: | $d_{ij} = \text{distância entre o nó } i \text{ e o equipamento localizado no sítio candidato } j$ | $h_i = \text{procura no nó } i$ | $P = \text{número de equipamentos a localizar}$ |
| Variável de decisão: | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | $Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a procura do nó } i \text{ for servida pelo equipamento localizado em } j \\ 0 & \text{se a procura do nó } i \text{ não for servida pelo equipamento localizado em } j \end{cases}$ | |
| Minimizar: | $\sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij}$ | | (2.17) |
| Sujeito a: | $\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i$ | | (2.18) |
| | $\sum_j X_j = P$ | | (2.19) |
| | $Y_{ij} - X_j \leq 0 \quad \forall i, j$ | | (2.20) |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j$ | | (2.21) |
| | $Y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j$ | | (2.22) |

Pretende-se com a função objectivo (2.17) minimizar a distância multiplicada pelo peso e pela procura entre cada nó de procura e o equipamento mais próximo. A restrição (2.18) exige que cada nó de procura i seja associado a um exacto equipamento j . A restrição (2.19) requer que sejam localizados os P equipamentos definidos inicialmente. A restrição (2.20) faz a ligação entre os equipamentos localizados e os pontos de procura ao garantir que em qualquer ponto a procura só é satisfeita se existir um equipamento que a sirva. As restrições (2.21) e (2.22) conferem a integralidade do modelo.

De seguida é apresentado um exemplo de aplicação desta formulação.

Pretende-se localizar P=1 equipamento no grafo da imagem apresentada em baixo.

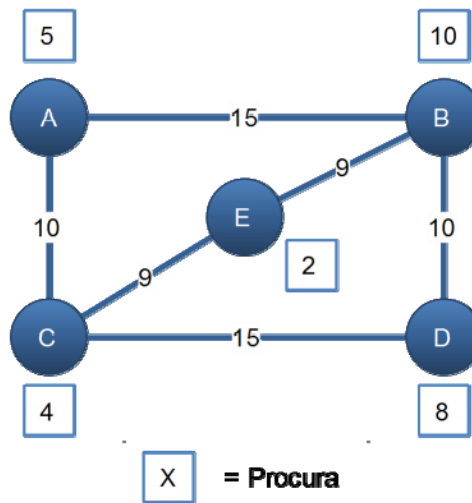


Figura 7: Grafo exemplo para modelo de P-mediana

Calculando a função objectivo para cada possível localização do equipamento obtém-se a seguinte tabela.

Tabela 3: Função objectivo para cada localização possível no exemplo de P-mediana

| Localizar em | Função objectivo: $\sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij}$ |
|--------------|--|
| A | $= 10 \times 15 + 4 \times 10 + 8 \times 25 + 2 \times 19 = 428$ |
| B | $= 5 \times 15 + 4 \times 18 + 8 \times 10 + 2 \times 9 = 245$ |
| C | $= 5 \times 10 + 10 \times 18 + 8 \times 15 + 2 \times 9 = 368$ |
| D | $= 5 \times 25 + 10 \times 10 + 4 \times 15 + 2 \times 19 = 323$ |
| E | $= 5 \times 19 + 10 \times 9 + 4 \times 9 + 8 \times 19 = 373$ |

Como se pode verificar, a melhor localização é em B, uma vez que é o ponto que tem menor valor para a função objectivo. Esta é a solução óptima.

2.4 Problemas de Localização de Equipamentos com Custo Fixo

Na maioria das situações, a implementação de equipamentos tem um determinado custo fixo associado, por exemplo, o valor da aquisição do espaço para a sua localização. Quando a variação deste custo não é desprezável tem-se um problema de localização de equipamentos de custo fixo. Ao contrário dos problemas anteriores, estes admitem que nem todas as localizações representam um custo fixo semelhante. Outra diferença significativa entre este problema e outros apresentados é o facto de o número de equipamentos a localizar e a distância de cobertura serem parte do resultado do problema e não variáveis de entrada. Assim, o objectivo de métodos de resolução para estes problemas é encontrar o número de equipamentos e a sua localização que minimize o custo total.

Estes problemas podem dividir-se em custo fixo sem capacidade e custo fixo com capacidade, sendo que nos primeiros se considera que os equipamentos têm capacidade ilimitada e que nos segundos têm capacidade limitada, ou seja, a procura não pode ser superior à capacidade máxima do equipamento.

2.4.1 Custo fixo sem capacidade

Os problemas de custo fixo sem capacidade têm a seguinte formulação matemática (Daskin 1995):

| | | | |
|-----------------------|---|---------------------------------|--|
| | $f_j = \text{custo fixo da localização no sítio candidato } j$ | | |
| Variáveis de entrada: | $d_{ij} = \text{distância entre o nó } i \text{ e o equipamento localizado no sítio candidato } j$ | | |
| | | $h_i = \text{procura no nó } i$ | |
| | $\alpha = \text{custo por unidade de distância por unidade de procura}$ | | |
| Variável de decisão: | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | | |
| | $Y_{ij} = \text{fracção da procura no nó } i \text{ que é servida pelo equipamento localizado em } j$ | | |
| Minimizar: | $\sum_j f_j X_j + \alpha \sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij} \quad (2.23)$ | | |
| Sujeito a: | $\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.24)$ | | |
| | $Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j \quad (2.25)$ | | |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j \quad (2.26)$ | | |
| | $Y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (2.27)$ | | |

A função objectivo (2.23) minimiza o custo total, sendo este a soma dos custos fixos dos equipamentos localizados com o produto do custo por unidade de distância por unidade de procura pela distância multiplicada pelo peso e pela procura entre cada nó de procura e o equipamento mais próximo. A restrição (2.24) garante que cada nó de procura i seja

associado a um exacto equipamento j . A restrição (2.25) faz a ligação entre os equipamentos localizados e os pontos de procura. As restrições (2.26) e (2.27) conferem a integralidade do modelo.

De seguida é apresentado um exemplo de aplicação. Assume-se que o custo por unidade de transporte por unidade de procura é igual a 0,30€. Os valores de custo fixo de instalação de um equipamento encontram-se junto ao nó correspondente, em euros.

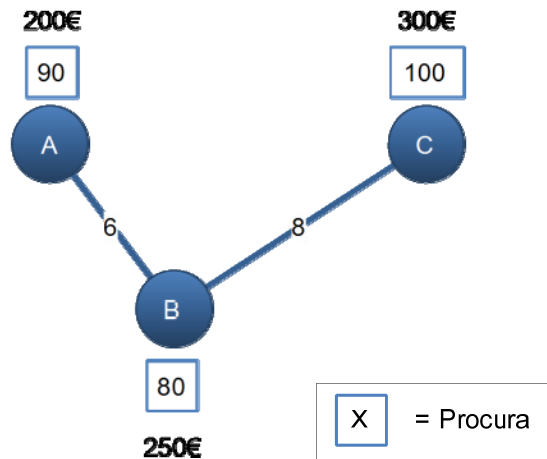


Figura 8: Grafo exemplo para modelo de custo fixo sem capacidade

Tabela 4: Função objectivo para cada localização possível no exemplo de custo fixo sem capacidade

| Localizar em | Função objectivo: $\sum_j f_j X_j + \alpha \sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij}$ |
|--------------|---|
| A | $= 200 + 0,30 \times (80 \times 6 + 100 \times 14) = 764$ |
| B | $= 250 + 0,30 \times (90 \times 6 + 100 \times 8) = 652$ |
| C | $= 300 + 0,30 \times (90 \times 14 + 80 \times 8) = 870$ |
| A e B | $= (200 + 250) + 0,30 \times (100 \times 8) = 690$ |
| B e C | $= (250 + 300) + 0,30 \times (90 \times 6) = 712$ |
| A e C | $= (200 + 300) + 0,30 \times (80 \times 6) = 644$ |
| A, B e C | $= 200 + 250 + 300 + 0,30 \times (0) = 750$ |

Como se pode verificar, o número óptimo de equipamentos neste exemplo é igual a 2, estando localizado nos pontos A e C.

2.4.2 Custo fixo com capacidade

O problema de localização de custo fixo com capacidade tem uma formulação matemática (Daskin 1995) idêntica à do problema anterior, acrescentando apenas uma variável de entrada e uma restrição. Esta formulação encontra-se em baixo descrita.

| | | |
|-----------------------|---|--|
| | $f_j =$ custo fixo da localização no sítio candidato j | |
| Variáveis de entrada: | $d_{ij} =$ distância entre o nó i e o equipamento localizado no sítio candidato j | |
| | $h_i =$ procura no nó i | |
| | $\alpha =$ custo por unidade de distância por unidade de procura | |
| | $k_j =$ capacidade do sítio candidato j , se o equipamento está localizado em j | |

| | | |
|-----------------------|---|--|
| Variáveis de decisão: | $X_j = \begin{cases} 1 & \text{se o equipamento for localizado no ponto } j \\ 0 & \text{se este não for localizado no ponto } j \end{cases}$ | |
| | $Y_{ij} =$ fracção da procura no nó i que é servida pelo equipamento localizado em j | |

| | | |
|------------|--|--|
| Minimizar: | $\sum_j f_j X_j + \alpha \sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij} \quad (2.28)$ | |
|------------|--|--|

| | | |
|------------|---|--|
| | $\sum_j Y_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (2.29)$ | |
| Sujeito a: | $Y_{ij} \leq X_j \quad \forall i, j \quad (2.30)$ | |
| | $\sum_i h_i Y_{ij} \leq k_j X_j \quad \forall j \quad (2.31)$ | |
| | $X_j = 0, 1 \quad \forall j \quad (2.32)$ | |
| | $Y_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (2.33)$ | |

A função objectivo deste problema (2.28) é a mesma do problema anterior, assim como as restrições (2.30), (2.32) e (2.33). A restrição (2.31) integra a capacidade de cada ponto. É nesta que se limita a atribuição da procura aos equipamentos, conforme a sua capacidade, ou seja, um equipamento não pode ter mais procura a ele associada do que a sua capacidade.

É apresentado um exemplo de aplicação desta formulação de seguida.

Assume-se que o custo por unidade de transporte por unidade de procura é igual a 1€.

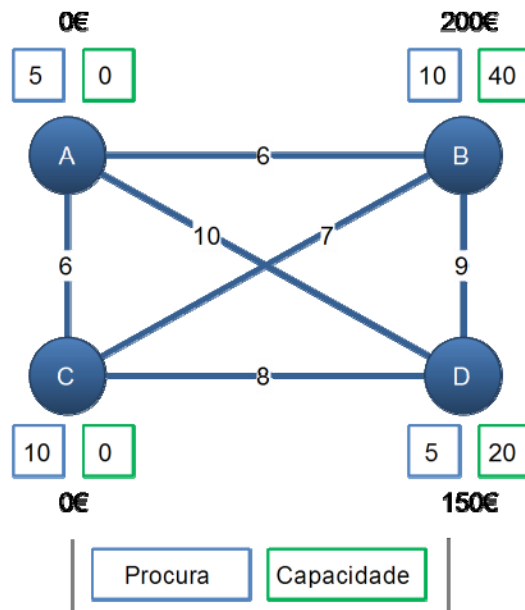


Figura 9: Grafo exemplo para modelo de custo fixo com capacidade

Neste exemplo a procura total é igual a 30 unidades e a capacidade total é igual a 60 unidades, estando dividida por duas possíveis localizações (B e D). Os restantes pontos apenas têm procura e não oferta.

Toda a procura tem de ser atribuída ao(s) equipamento(s) a localizar. Existem várias soluções possíveis, sendo exemplo dessas: a localização de apenas um equipamento em B atribuindo toda a procura a este equipamento, localizar dois equipamentos com capacidades semelhantes (15 + 15), entre outras. Contudo, apenas existe uma solução ótima.

Na tabela seguinte são apresentadas várias soluções com o respectivo cálculo da função de valor.

Tabela 5: Função objectivo para localizações possíveis no exemplo de custo fixo com capacidade

| Localizar em | Função objectivo: $\sum_j f_j X_j + \alpha \sum_i \sum_j h_i d_{ij} Y_{ij}$ |
|-----------------|---|
| B (30) | = $200 + 1 \times (5 \times 6 + 10 \times 7 + 5 \times 9)$ = 345 |
| B (25) e D (5) | = $200 + 150 + 1 \times (10 \times 7 + 5 \times 6)$ = 450 |
| B (20) e D (10) | = $200 + 150 + 1 \times (5 \times 6 + 5 \times 7 + 5 \times 8)$ = 455 |
| B (15) e D (15) | = $200 + 150 + 1 \times (5 \times 6 + 10 \times 8)$ = 460 |
| B (10) e D (20) | = $200 + 150 + 1 \times (5 \times 10 + 10 \times 8)$ = 480 |

Como se pode observar, a melhor opção das apresentadas, ou seja, a que representa menor custo total é a implementação de apenas um equipamento no ponto B com capacidade de 30 e custo igual a 345.

Na figura em baixo, é representada a capacidade em D em função da capacidade em B e são apresentados os valores da função-objectivo para os pontos calculados anteriormente.

A capacidade em B pode variar entre 10 e 30, enquanto que a capacidade em D pode variar entre 0 a 20.

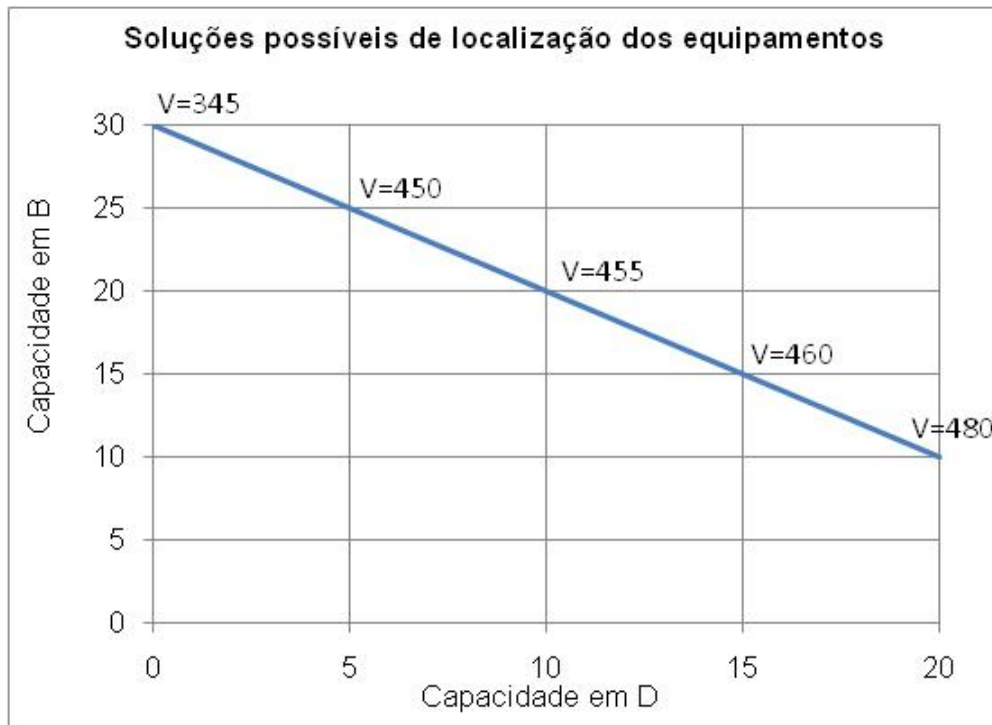


Figura 10: Soluções possíveis para a localização do(s) equipamento(s) no exemplo do modelo de custo fixo com capacidade

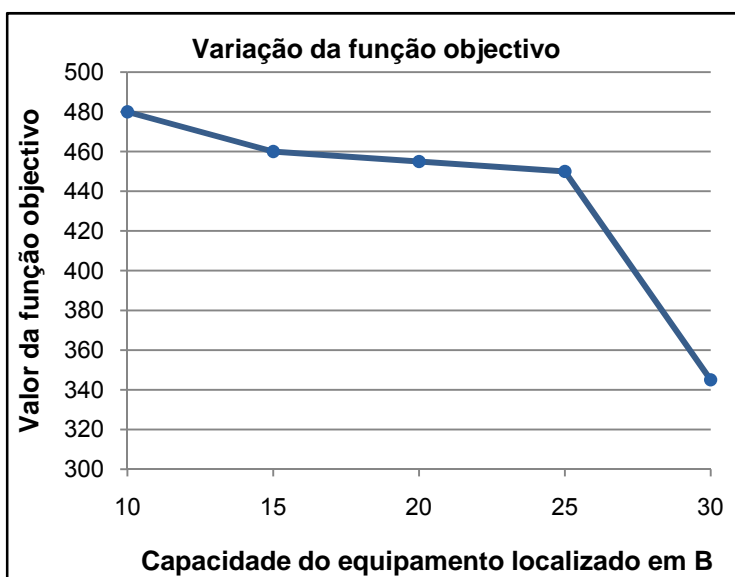


Figura 11: Variação da função objectivo relativamente à variação da capacidade em B, no exemplo do modelo de custo fixo com capacidade

A figura seguinte mostra a variação da função objectivo relativamente ao aumento da capacidade do equipamento localizado em B. Pode observar-se que quanto maior a capacidade em B, menor o custo total.

Pode dizer-se que a melhor solução para este problema é a localização em B de um equipamento com capacidade 30, de entre as soluções apresentadas.

3 Resolução de Problemas de Localização de Pontos

Neste capítulo são descritos os algoritmos heurísticos de resolução de problemas de localização de pontos que serão integrados no módulo a desenvolver e, por isso, programados na linguagem VBA (*Visual Basic for Applications*) no software ArgGIS™.

Alguns dos algoritmos são apresentados por Daskin (1995) ou por Sridharan (1995) e constituem soluções correntes de aplicação comum. Nos outros casos procurou-se desenvolver soluções que permitissem melhorias nas soluções encontradas iterativamente.

3.1 Complexidade algorítmica

As formulações matemáticas referidas para a resolução dos problemas de localização de pontos, enquanto problemas combinatórios, têm uma determinada complexidade associada à sua aplicação. Esta complexidade tem que ver com o tempo e memória que são requeridos para resolver os problemas.

Para problemas de pequenas dimensões, a complexidade pode não interferir muito na resolução, pois mesmo métodos de produção de soluções que façam a enumeração e avaliação de todas as soluções possíveis conseguirão, em tempo útil, indicar a solução ou soluções óptimas. Contudo, para problemas de maiores dimensões, pode tornar-se impossível resolvê-los em tempo útil, por esta via. Na tabela seguinte é apresentado o tempo de resolução de problemas combinatórios variando a dimensão e a complexidade dos mesmos, por métodos exaustivos. Assim, para um problema de dimensão igual a 10 (por exemplo, encontrar o caminho mais curto que percorra 10 cidades) para o qual existisse um hipotético algoritmo que demorasse 10^{-3} segundos a executar, para encontrar a solução para um problema com quatro vezes mais elementos a considerar demorar-se-ia mais de 12 dias, até encontrar a solução ou soluções óptimas.

Tabela 6: Tempo de resolução de problemas combinatórios variando a complexidade e a dimensão do problema

| Complexidade | n=10 | n=20 | n=40 |
|--------------|---------------|------------------------|------------------------|
| $O(n)$ | 10^{-5} seg | 2×10^{-5} seg | 4×10^{-5} seg |
| $O(n^2)$ | 10^{-4} seg | 4×10^{-4} seg | 0,0016 seg |
| $O(n^3)$ | 10^{-3} seg | 8×10^{-3} seg | 0,064 seg |
| $O(2^n)$ | 10^{-3} seg | 1,05 seg | 12,7 dias |
| $O(e^n)$ | 0,022 seg | 8,08 min | 74,6 séculos |

Fonte: (Daskin 1995)

Nos problemas de complexidade polinomial (n , n^2 e n^3) o aumento da dimensão do problema faz também aumentar o tempo de resolução do mesmo, contudo é nos problemas de complexidade exponencial (2^n e e^n) que esta variação é mais significativa, podendo o tempo de resolução atingir valores muito superiores ao da vida humana, para uma amostra de apenas 40

pontos. Por este motivo, os algoritmos polinomiais são vistos como eficientes e os algoritmos exponenciais como ineficientes (Daskin 1995).

Os algoritmos para os quais o tempo de resolução é polinomial fazem com que os respectivos problemas pertençam à classe P, e os problemas cujos melhores algoritmos conhecidos apresentam tempo de resolução exponencial pertencem em geral à classe NP (que formalmente é composta pelos problemas para os quais uma solução pode ser verificada como válida em tempo polinomial).

Os melhores algoritmos conhecidos para resolver os problemas de localização de pontos apresentados anteriormente têm complexidade algorítmica exponencial. Sendo desejável resolver os problemas de localização em tempos de execução menores, foram utilizados algoritmos heurísticos, que podem não apresentar a solução ótima, mas apresentam uma boa solução em tempo polinomial.

3.2 Problemas de Cobertura

Dentro dos problemas de cobertura são apresentados dois algoritmos heurísticos de máxima cobertura e um algoritmo de cobertura de conjuntos.

3.2.1 Máxima cobertura

Na abordagem aos problemas de máxima cobertura, um dos algoritmos heurísticos utilizados para a sua resolução é o designado algoritmo ganancioso (*greedy*). Esta denominação deve-se ao facto de em cada iteração o algoritmo adicionar à solução o ponto candidato que cobre maior procura, sem verificar os impactes que esta escolha terá no passo seguinte. A este algoritmo é adicionado um de substituição, de modo a melhorar a solução dada pelo anterior. Este tem como função principal testar a cada iteração uma troca possível de um ponto seleccionado por um ponto não seleccionado. Nas figuras seguintes são apresentados os fluxogramas correspondentes. Este conjunto de algoritmos de resolução de problemas de máxima cobertura foi designado de **Máxima Cobertura com P Elementos**, uma vez que tem

de ser dada como variável de entrada o número de equipamentos que se pretende instalar, juntamente com a distância de cobertura e a procura de cada ponto.

O primeiro passo desta resolução é verificar qual o ponto candidato que cobre maior procura ainda não coberta, ou seja, para a qual não existe nenhum ponto seleccionado que a satisfaça. Segue-se a localização do equipamento nesse ponto. Se existir mais do que um equipamento já instalado, é executado o algoritmo de substituição, no qual se verifica se substituindo um ponto seleccionado por outro não seleccionado a procura coberta aumenta. Se aumentar, os pontos seleccionados são modificados pela opção que cobre maior procura. Esta é então actualizada. Caso exista apenas um equipamento instalado passa-se para o passo seis. Neste, é verificado se já foram localizados todos os P equipamentos dados como variável de entrada ou se já toda a procura foi coberta. Se sim, o algoritmo pára.

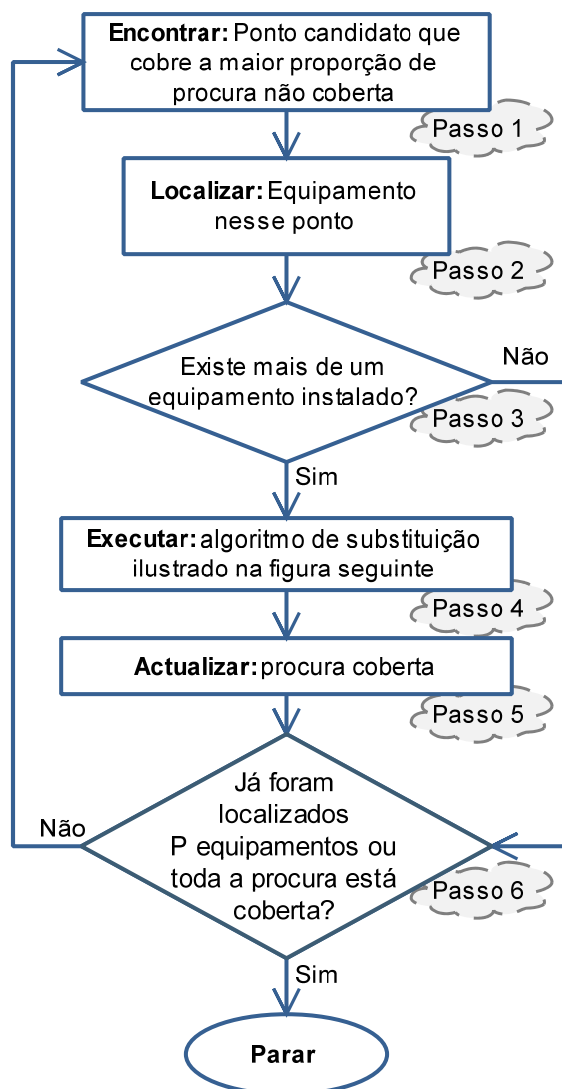


Figura 12: Fluxograma do algoritmo *Greedy* com introdução do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura com P elementos

Fonte: (Daskin 1995)

Caso contrário, o algoritmo volta ao primeiro passo. Como resultado, são seleccionados os pontos onde devem ser localizados os equipamentos.

De seguida é apresentado um exemplo de aplicação desta resolução.

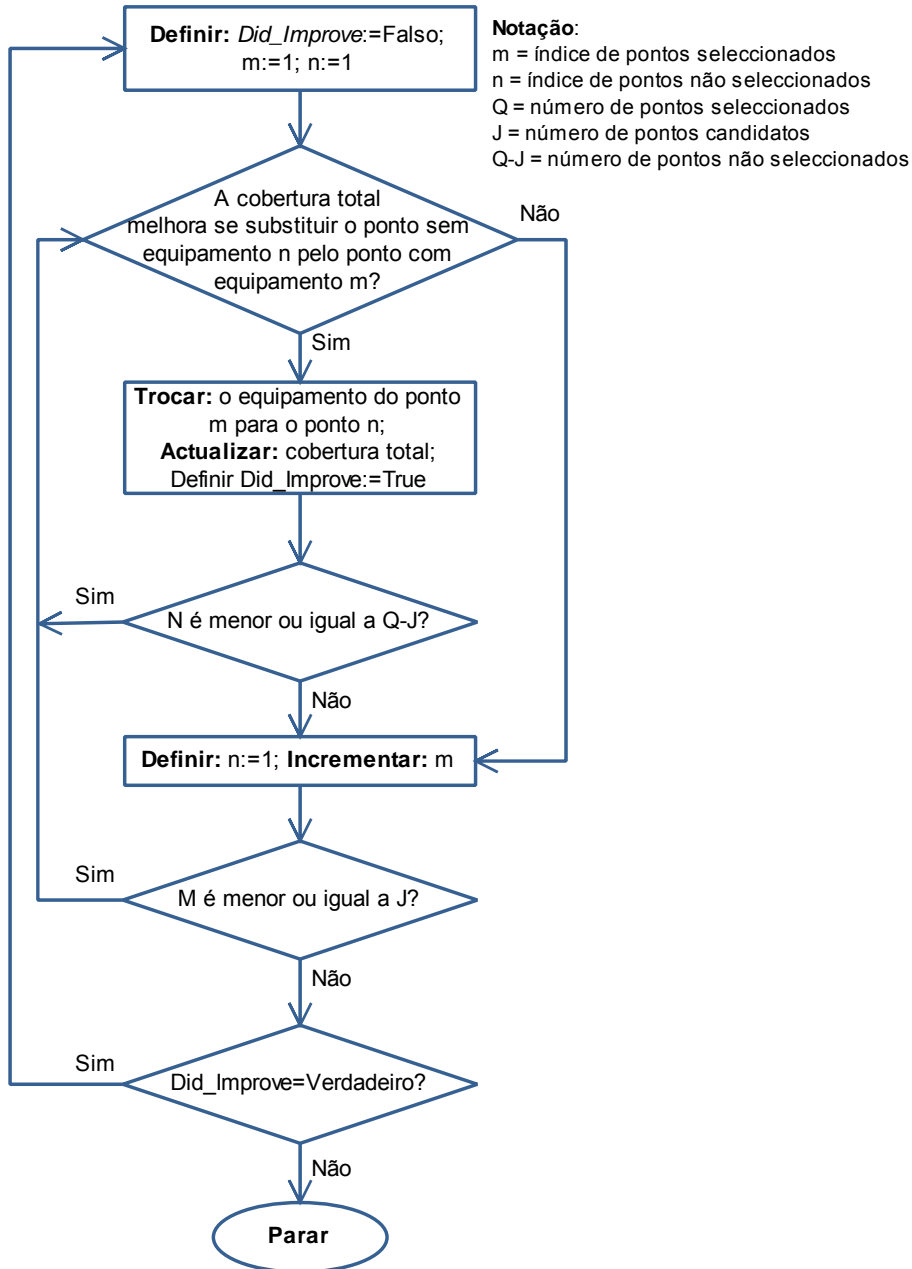


Figura 13: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura

Fonte: (Daskin 1995)

Para este exemplo considere-se as sedes de distrito dispersas pelo território de Timor-Leste apresentadas na figura seguinte.

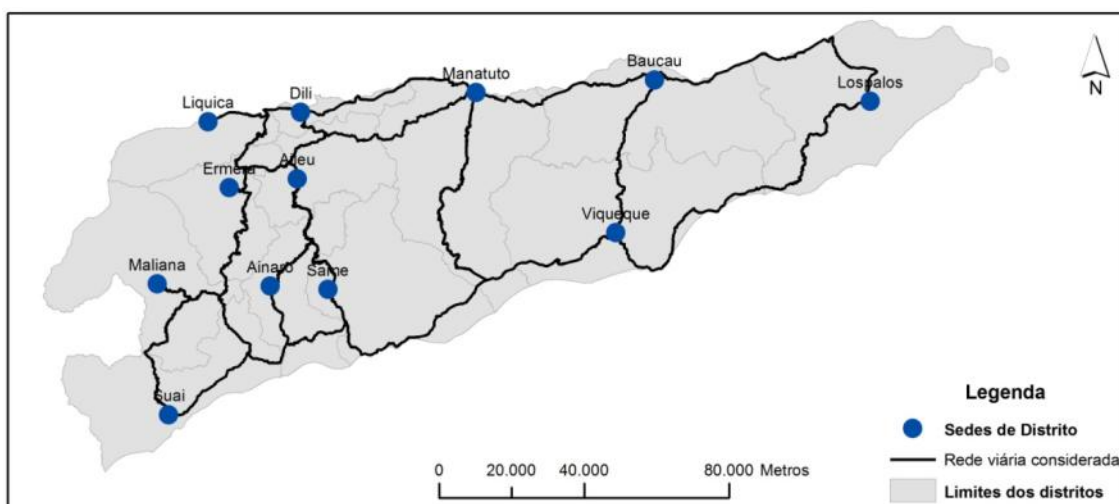


Figura 14: Esquema do território de Timor-Leste

Como base geográfica para este exemplo foram consideradas as sedes de distrito como pontos candidatos e a rede viária fundamental e complementar como arcos que ligam esses pontos. Pretende-se instalar três equipamentos, tendo como procura a população dos distritos no ano 2004 (Direcção Nacional de Estatística de Timor-Leste 2004), e uma distância de cobertura dos equipamentos de 70km. Seguindo a resolução descrita obtém-se:

Tabela 7: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo ganancioso com o de substituição em exemplo da Máxima Cobertura com P Elementos

| | Iteração 1 | Iteração 2 | Iteração 3 |
|---------|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| Passo 1 | Aileu (416 580 habitantes cobertos) | Baucau (203 094 habitantes cobertos) | Suai (136 642 habitantes cobertos) |
| Passo 2 | Localiza em Aileu | Localiza em Baucau | Localiza em Suai |
| Passo 3 | Não | Sim | Sim |
| Passo 4 | - | Não há substituição a fazer | Troca Aileu por Ermera (mais 9892 habitantes cobertos) |
| Passo 5 | - | 619 674 total coberto | 766 208 total coberto |
| Passo 6 | Não | Não | Sim – Parar! |

Os equipamentos devem ser localizados em Baucau, Ermera e Suai, sendo que estes cobrem 88,25% do total da procura.

Em algumas situações pode não interessar instalar um número pré definido de equipamentos mas sim cobrir uma determinada percentagem de procura. Neste sentido continua a ser um problema de máxima cobertura, pois o objectivo é atingir a máxima cobertura com um número mínimo de equipamentos. Para resolver um problema deste género foram utilizados os mesmos algoritmos do Máxima Cobertura com P Elementos, contudo com algumas adaptações, como se pode verificar na figura seguinte.

Esta resolução de problemas de máxima cobertura foi designada de **Máxima Cobertura com**

Percentagem. Como variáveis de entrada tem-se a proporção mínima de procura que se pretende cobrir, a distância de cobertura e a procura de cada ponto candidato.

O algoritmo de resolução deste tipo de problemas é idêntico ao anterior, apenas tendo sido efectuada uma alteração. No primeiro passo pretende-se encontrar o ponto candidato que cobre maior proporção de procura não coberta, sendo esse ponto, aquele que maior procura absoluta cobre também. A alteração efectuada é no sexto passo, no qual o objectivo é verificar se a proporção mínima de procura se encontra coberta ou se já foi coberta toda a procura existente, em vez de verificar se já foram introduzidos todos os pontos inicialmente solicitados.

O algoritmo de substituição é utilizado também neste algoritmo ganancioso, não tendo sido necessário efectuar nenhuma alteração de adequação, dada a semelhança entre algoritmos.

De seguida é apresentada a resolução para um exemplo idêntico ao anterior, com recurso a este algoritmo.

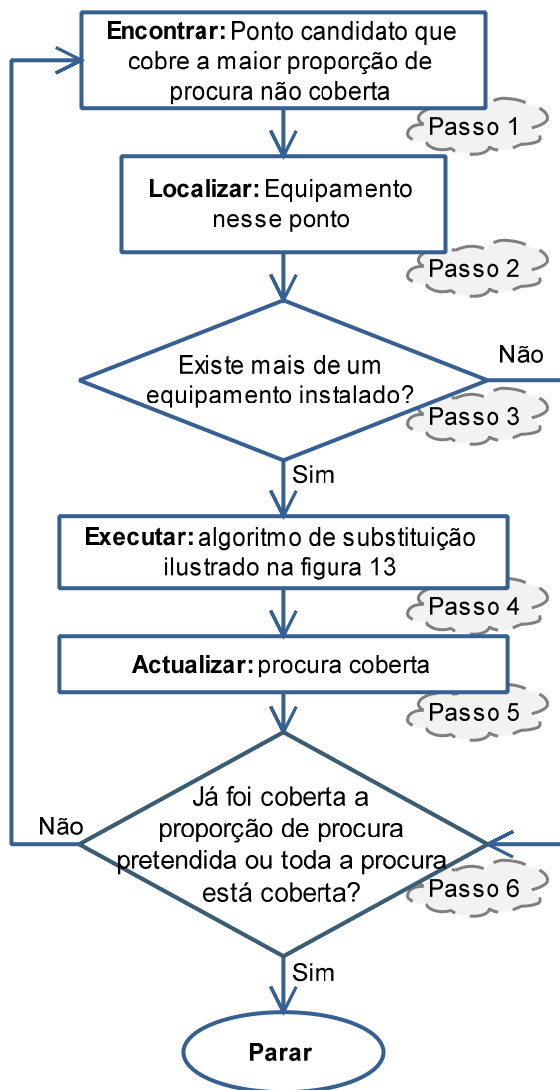


Figura 15: Fluxograma do algoritmo Greedy com introdução do algoritmo de substituição para problemas de máxima cobertura com percentagem conhecida

Fonte: Adaptado de (Daskin 1995)

Foi utilizado o território de Timor-Leste como base geográfica para este exemplo, considerando as sedes de distrito como pontos candidatos e a rede viária fundamental e complementar como arcos que ligam esses pontos. O objectivo é cobrir 75% da procura com um tipo de equipamentos, tendo como procura a população dos distritos no ano 2004 (Direcção Nacional de Estatística de Timor-Leste 2004), e uma distância de cobertura dos equipamentos de 60km. Seguindo a resolução descrita obtém-se:

Tabela 8: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo ganancioso com o de substituição em exemplo da Máxima Cobertura com Percentagem

| | Iteração 1 | Iteração 2 | Iteração 3 |
|---------|--|--|---|
| Passo 1 | Díli (373 992 habitantes cobertos – 43,07% de cobertura) | Baucau (203 094 habitantes cobertos – 23,39% de cobertura) | Suai (97 561 habitantes cobertos – 11,24% de cobertura) |
| Passo 2 | Localiza em Díli | Localiza em Baucau | Localiza em Suai |
| Passo 3 | Não | Sim | Sim |
| Passo 4 | - | Não há substituição a fazer | Não há substituição a fazer |
| Passo 5 | - | 577 086 total coberto | 674 647 total coberto |
| Passo 6 | Não – 43,07% de cobertura | Não – 66,46% de cobertura | Sim – 77,70% de cobertura – Parar! |

Para perfazer um mínimo de 75% de cobertura é necessário instalar três equipamentos, sendo a sua localização em Díli, Baucau e Suai. Estes cobrem 77,70% da população dos distritos, para uma distância de cobertura de 60km.

3.2.2 Cobertura de conjuntos

Para resolver problemas de cobertura de conjuntos foi apenas necessário adaptar o algoritmo da máxima cobertura com percentagem, de modo a determinar sempre um número mínimo de equipamentos a instalar que cubra todos os pontos do grafo, para uma determinada distância de cobertura.

Na próxima figura é apresentado o algoritmo da cobertura de conjuntos utilizado. Uma das diferenças deste em relação ao de máxima cobertura com percentagem baseia-se na alteração de cobertura de procura para cobertura de pontos, uma vez que é necessário cobrir todos os pontos. A outra diferença é mais significativa é no passo seis, no qual é garantido que o algoritmo só pára quando todos os pontos se encontram cobertos.

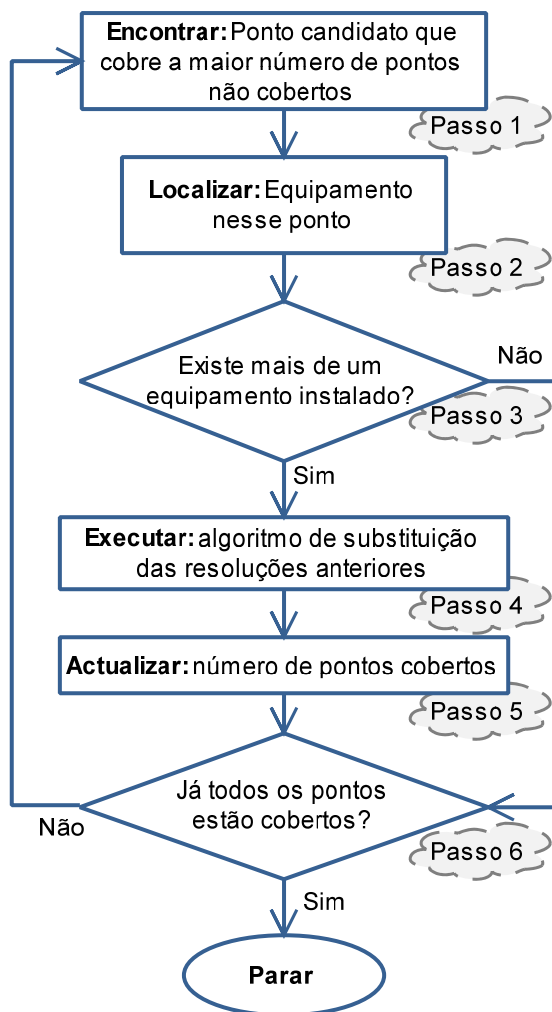


Figura 16: Fluxograma do algoritmo de Cobertura de Conjuntos

Como exemplo de aplicação desta resolução utilizou-se novamente o território de Timor-Leste com a mesma base geográfica para os arcos e os nós do grafo. Pretende-se instalar um número mínimo de equipamentos, tendo em conta uma distância de cobertura igual a 75km.

Na próxima tabela são apresentados os resultados de cada passo em cada iteração do algoritmo.

Tabela 9: Resultados intermédios e final da aplicação do algoritmo de cobertura de conjuntos

| Iteração | Primeira | Segunda | Terceira | Quarta |
|----------|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| Passo 1 | Aileu (6 de 12 pontos cobertos) | Baucau (3 de 12 pontos cobertos) | Suai (2 de 12 pontos cobertos) | Lospalos (1 de 12 pontos cobertos) |
| Passo 2 | Localiza em Aileu | Localiza em Baucau | Localiza em Suai | Localiza em Lospalos |
| Passo 3 | Não | Sim | Sim | Sim |
| Passo 4 | - | Não há substituição a fazer | Não há substituição a fazer | Não há substituição a fazer |
| Passo 5 | - | 9 de 12 pontos cobertos | 11 de 12 pontos cobertos | 12 de 12 pontos cobertos |
| Passo 6 | Não | Não | Não | Sim! |

Devem ser localizados quatro equipamentos distribuídos por Aileu, Baucau, Suai e Lospalos, perfazendo uma cobertura total para uma distância de cobertura de 75km.

3.3 Problemas de Centragem

Para este conjunto de problemas de localização de pontos foram adaptadas três resoluções de problemas de centragem absoluta e duas resoluções de problemas de centragem em vértices.

3.3.1 Centragem absoluta

Para este tipo de problemas, foram apenas utilizados algoritmos de resolução para estruturas de grafos em árvore, uma vez que estes algoritmos resolvem os problemas de forma óptima, sendo por isso muito eficientes (Daskin 1995). Caso os grafos não sejam representados em árvore, é apresentada uma solução mas não é garantido que seja a solução óptima.

A primeira resolução baseia-se na localização de um equipamento numa estrutura de grafo em árvore sem pesos, tendo sido esta designada de **1-Centro Absoluto Sem Peso**. Na figura seguinte é apresentado o fluxograma para a sua resolução.

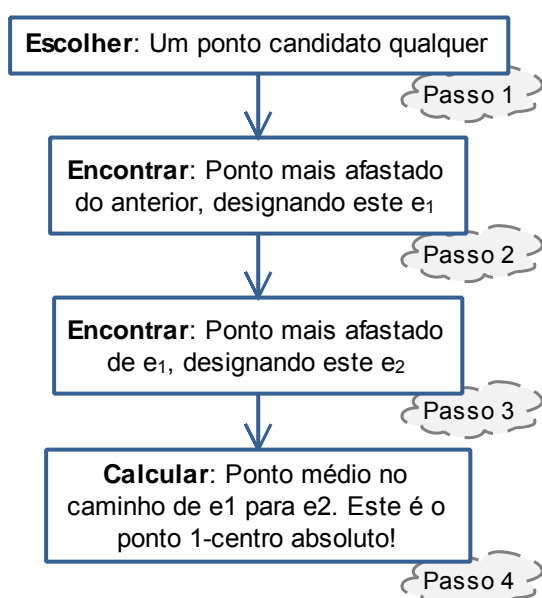


Figura 17: Fluxograma para a resolução de problemas 1-centro absoluto sem peso

Fonte: (Daskin 1995)

O algoritmo começa por escolher um dos pontos candidatos de forma aleatória. Posteriormente encontra o ponto que se encontra mais afastado do anterior, designando o mesmo de e_1 . Após este passo, encontra o ponto que mais se afasta de e_1 , denominando este e_2 . Deste modo é encontrado o caminho entre os dois pontos mais afastados entre si, sendo que o ponto médio do caminho é a localização certa para a localização do ponto a instalar. Este ponto médio é designado 1-centro absoluto. O ponto existente que mais se aproxima do 1-centro absoluto é denominado vértice 1-centro, sendo que pode existir mais do que um vértice 1-centro no caso de o 1-centro absoluto estar localizado à mesma distância de vários pontos.

Como exemplo para utilização desta resolução, é considerado o território de Portugal Continental. O objectivo deste problema é a localização de um equipamento, o mais central possível, na estrutura ferroviária nacional apenas onde circulam os comboios intercidades. Para tal, como pontos do grafo têm-se as paragens ferroviárias dos comboios intercidades e como linhas do grafo as linhas ferroviárias por onde circulam os mesmos comboios. Na figura seguinte é apresentado o esquema da estrutura utilizada.

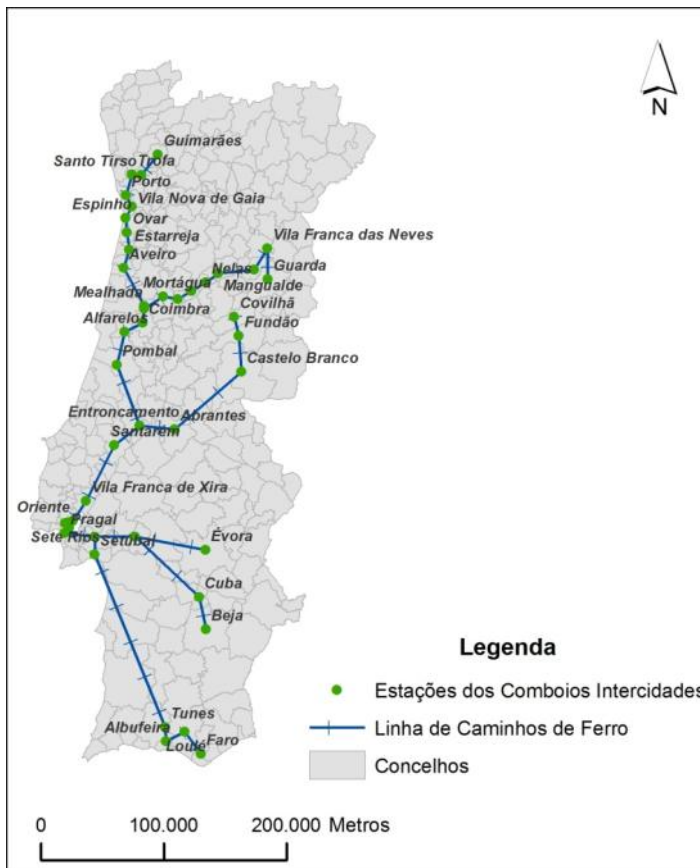


Figura 18: Esquema de Portugal Continental com estações dos comboios intercidades para exemplos de problemas de centragem

Seguindo a resolução anterior, apresenta-se agora a solução para o exemplo.

No passo número um é seleccionado o primeiro ponto, que corresponde à estação de Faro. No passo seguinte (número dois) encontra-se o ponto mais distante de Faro, que é a estação de Guimarães, designando esta e_1 . No passo número três encontra-se o ponto mais distante de e_1 , que é a estação de Faro. A esta dá-se o nome de e_2 . Com e_1 e e_2 conhecidos, o passo seguinte é calcular o ponto médio do caminho entre Guimarães e Faro. Este ponto fica localizado entre as estações de Santarém e de Vila Franca de Xira, no concelho de Azambuja. O vértice 1-centro é o ponto da estação de Vila Franca de Xira.

A segunda resolução apresentada, para problemas de centragem absoluta, é denominada **2-Centro Absoluto**, uma vez que aponta uma solução para a localização de dois equipamentos para estruturas de grafos em árvore. Esta resolução é apresentada na figura seguinte.

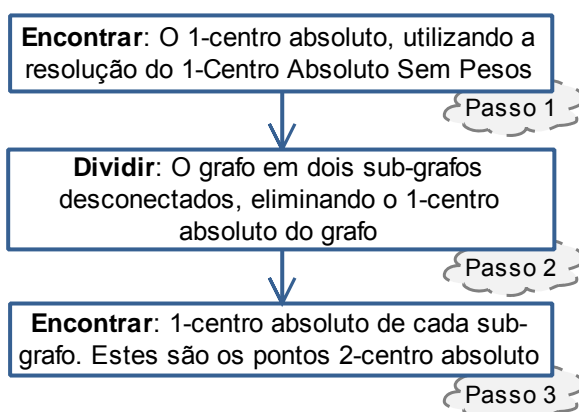


Figura 19: Fluxograma para a resolução de problemas 2-centro absoluto

Fonte: Adaptado de (Daskin 1995)

O primeiro passo do algoritmo passa pela utilização do algoritmo anterior, de modo a ser encontrado o ponto 1-centro absoluto. Através deste ponto, divide-se o grafo inicial em dois sub-grafos, eliminando o arco que contém o ponto. O último passo volta a utilizar o algoritmo anterior para encontrar os 1-centro absoluto dos dois sub-grafos. A estes dois pontos dá-se a designação de 2-centro absoluto, sendo nestes que os equipamentos devem ser instalados.

Para exemplo de utilização desta resolução, considere-se a mesma base geográfica do exemplo anterior. O objectivo é a localização de dois equipamentos, o mais central possível, na estrutura ferroviária nacional onde circulam os comboios intercitys.

No primeiro passo é encontrado o ponto 1-centro absoluto, localizado entre Vila Franca de Xira e Santarém. Esta ligação é eliminada, obtendo duas estruturas isoladas, como demonstra a figura seguinte.



Figura 20: Esquema de Portugal Continental com estações dos comboios intercitys, do exemplo para o algoritmo 2-centro absoluto, já com obtenção de dois sub-grafos

Para cada um dos dois sub-grafos é encontrado o ponto 1-centro absoluto. No sub-grafo situado a Norte, o ponto e_1 obtido é a estação de Guimarães e o ponto e_2 é a estação da Covilhã. O ponto médio do caminho entre e_1 e e_2 está localizado entre as estações de Pombal e Alfarelos, no concelho de Pombal. Quanto ao sub-grafo do Sul do país, o ponto e_1 é a estação de Beja e o ponto e_2 é a estação de Faro. O ponto 1-centro absoluto deste sub-grafo situa-se entre Setúbal e Tunes, no concelho de Grândola.

Estes são os pontos 2-centro absoluto, ou seja, os pontos onde devem ser localizados os equipamentos.

O último algoritmo de resolução de problemas de centragem absoluta foi denominado **1-Centro Absoluto Com Peso**, uma vez que, à semelhança do primeiro, soluciona problemas que tenham como objectivo a localização de um equipamento. Contudo, este tem em conta que nem todos os pontos têm o mesmo peso. Deste modo, é dada a possibilidade ao utilizador de atribuir pesos diferentes aos pontos.

Na figura seguinte é apresentado este algoritmo.

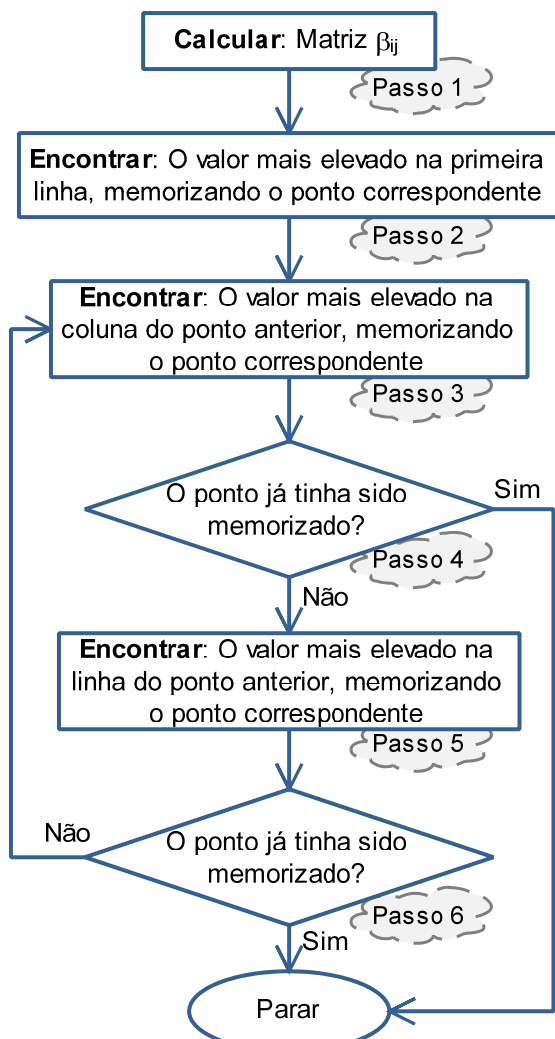


Figura 21: Fluxograma para a resolução de problemas 1-Centro Absoluto Com Peso

Fonte: (Daskin 1995)

O primeiro passo é o cálculo da matriz β_{ij} para todos os pares de nós i e j :

$$\beta_{ij} = \frac{h_i h_j d(i, j)}{(h_i + h_j)}$$

Tal que:

h_i – o peso do ponto i

h_j – o peso do ponto j

$d(i, j)$ – a distância entre i e j

De seguida, é encontrado o valor mais elevado da primeira linha da matriz β_{ij} , memorizando o ponto correspondente a esse valor. Na coluna do ponto anterior é encontrado o valor mais elevado, memorizando também o ponto que lhe corresponde. O passo quatro verifica se o ponto já tinha sido memorizado. Se a resposta for negativa, o passo seguinte é encontrar o valor mais elevado na linha do ponto anteriormente memorizado, guardando também o ponto que corresponde a esse valor. No sexto passo é verificado de novo se o ponto guardado já tinha sido memorizado anteriormente. Em caso negativo, volta-se ao passo 3. Tanto neste passo como no passo quatro, se a resposta for afirmativa é

calculada a localização exacta para o equipamento:

$$\frac{h_{\text{ponto da última linha/coluna analisada}}}{(h_{\text{ponto da penúltima linha/coluna analisada}} + h_{\text{ponto da última linha/coluna analisada}})} d(j, i) =$$

= número de unidades de distância do ponto da penúltima linha/coluna analisada, no caminho entre os dois últimos pontos.

Para o exemplo da linha ferroviária do comboio intercidades de Portugal, à base utilizada também nas outras resoluções foi adicionada a informação da população residente, em 2001 (XIV Recenseamento Geral da População 2002), no concelho onde se insere a estação ferroviária em causa. Para os casos em que existe mais do que uma estação no mesmo concelho, por exemplo Lisboa (Oriente, Santa Apolónia, Entrecampos e Sete Rios), a população do concelho foi distribuída uniformemente pelas estações que nele se inserem. O objectivo deste exemplo é localizar um equipamento ao longo da linha férrea, tendo em conta a população dos concelhos onde as estações estão fixadas.

Na próxima tabela são apresentados os resultados da resolução, após o cálculo da matriz β_{ij} .

Tabela 10: Resolução do exemplo do algoritmo 1-Centro Absoluto Com Peso

| Iteração | Primeira | Segunda |
|----------|--|-------------------------------------|
| Passo 2 | Valor mais elevado – Porto | - |
| Passo 3 | Valor mais elevado – Pragal | Valor mais elevado – Pragal |
| Passo 4 | Não | Sim – Cálculo da localização exacta |
| Passo 5 | Valor mais elevado – Vila Nova de Gaia | |
| Passo 6 | Não | |

$$\begin{aligned}
 \text{Localização exacta} &= \frac{h_{Pragal}}{h_{Vila Nova de Gaia} + h_{Pragal}} d(\text{Pragal}, \text{Vila Nova de Gaia}) \\
 &= \frac{160825}{288749 + 160825} \times 316838,46 = \\
 &= 113341,84 \text{ metros de distância de Vila Nova de Gaia}
 \end{aligned}$$

Deste modo, o ponto localiza-se no concelho de Montemor-o-Velho.

3.3.2 Centragem em vértices

Para problemas de centragem em vértices, são apresentadas duas resoluções. A primeira tem como objectivo a localização de um número predefinido de equipamentos num grafo geral, o mais central possível, no qual todos os pontos têm o mesmo peso. A esta denominou-se **P-Centro Sem Peso**. Na próxima figura é apresentado o algoritmo para esta resolução. De notar que as distâncias utilizadas nos seus cálculos são todas convertidas para valores inteiros.

No primeiro passo, são definidas as duas variáveis que limitarão o intervalo a considerar até encontrar a distância de cobertura. D_C^H representa um número suficientemente grande, de modo a representar uma distância de cobertura capaz de cobrir todos os pontos do grafo. D_C^L inicia com valor zero. No segundo passo é definida uma terceira variável, D_C , que é calculada fazendo a média aritmética das duas variáveis anteriores. No passo seguinte resolve-se um problema de cobertura de conjuntos, utilizando D_C como distância de cobertura. O resultado obtido é o número de equipamentos necessário para cobrir todos os pontos com essa distância de cobertura, sendo este designado $P^*(D_C)$. Como descrito nos passos quatro e cinco, caso $P^*(D_C)$ seja menor ou igual ao número de equipamentos a instalar, D_C^H assume o valor de D_C . Caso contrário, é D_C^L que muda de valor, ficando igual a $D_C + 1$. O passo número seis, verifica se o valor de D_C^H é igual ao valor de D_C^L . Em caso negativo, volta-se ao passo número dois. Em caso afirmativo, o algoritmo pára. D_C^H e D_C^L representam a distância de cobertura necessária para cobrir todos os pontos, para um número P predefinido de equipamentos.

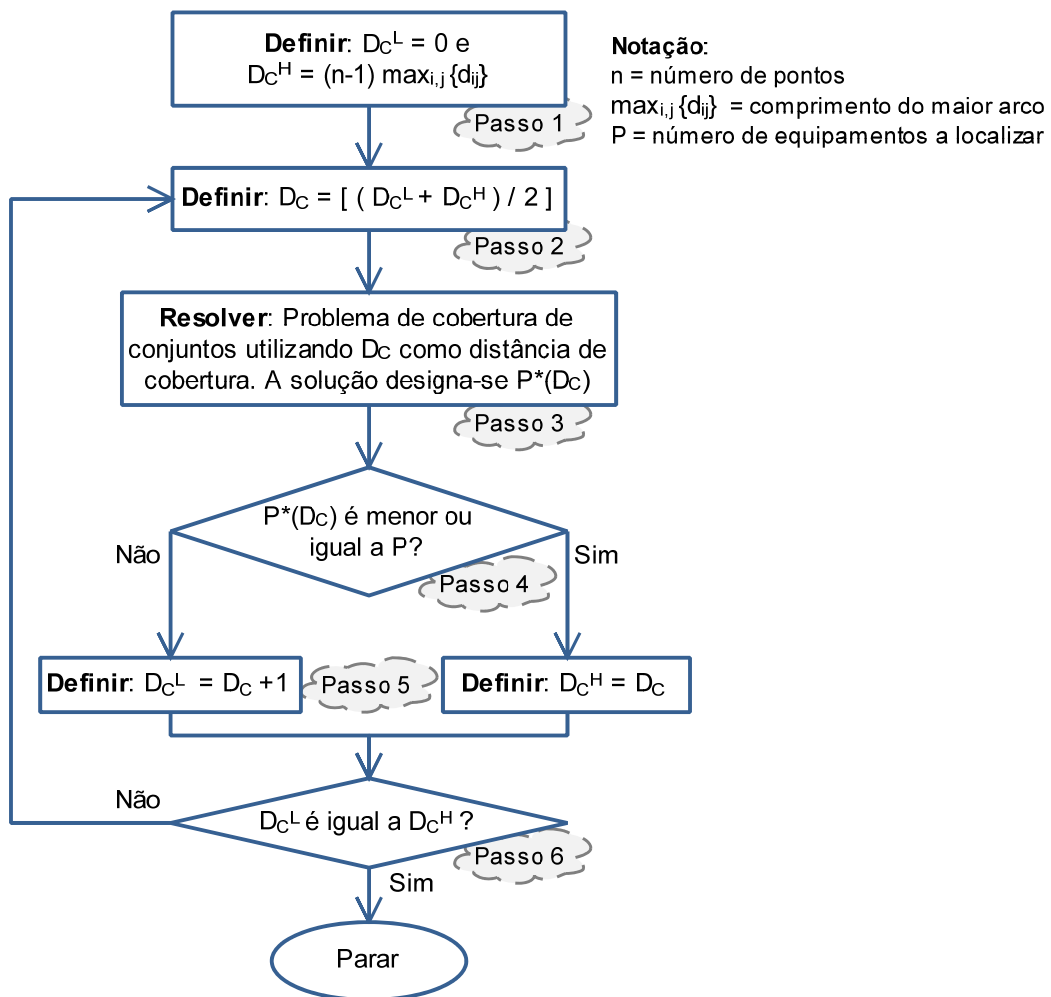


Figura 22: Fluxograma para a resolução de problemas P-Centro Sem Peso

Fonte: (Daskin 1995)

De seguida é apresentado um exemplo de aplicação deste algoritmo.

Volta-se a utilizar como base geográfica para o grafo os distritos de Timor-Leste e a rede viária considerada, como pontos/nós e linhas/arcos respectivamente. O objectivo é localizar 3 equipamentos centrais no território de Timor Leste. Na tabela seguinte são apresentados os resultados.

Tabela 11: Resolução do exemplo do algoritmo P-Centro Sem Peso

| Iteração | Primeira | Segunda | ... | Penúltima | Última |
|----------|----------------------------------|------------------|-----|-------------------|-----------------|
| Passo 1 | $D_C^H = 2474505$ $D_C^L = 0$ | - | ... | $(D_C^H = 89902)$ | - |
| Passo 2 | $D_C = 1237252$ | $D_C = 618626$ | ... | $D_C = 89900$ | $D_C = 89901$ |
| Passo 3 | $P^*(D_C) = 1$ | $P^*(D_C) = 1$ | ... | $P^*(D_C) = 4$ | $P^*(D_C) = 3$ |
| Passo 4 | Sim | Sim | ... | Não | Sim |
| Passo 5 | $D_C^H = 1237252$ | $D_C^H = 618626$ | ... | $D_C^L = 89901$ | $D_C^H = 89901$ |
| Passo 6 | Não | Não | ... | Não | Sim |

A distância de cobertura a considerar é então: $D_C = 89901$ metros. Com auxílio do algoritmo de cobertura de conjuntos novamente, são calculadas as localizações para os equipamentos, devendo os equipamentos ser localizados em Ainaro, Baucau e Aileu, para a distância de cobertura calculada.

A segunda resolução para problemas de centragem em vértices é muito semelhante à anterior. O objectivo é localizar um número de equipamentos predefinido, o mais central possível na rede, tendo em consideração que os pontos não têm todos o mesmo peso. A este algoritmo deu-se o nome de **P-Centro Com Peso**.

Na próxima figura é apresentada a resolução.

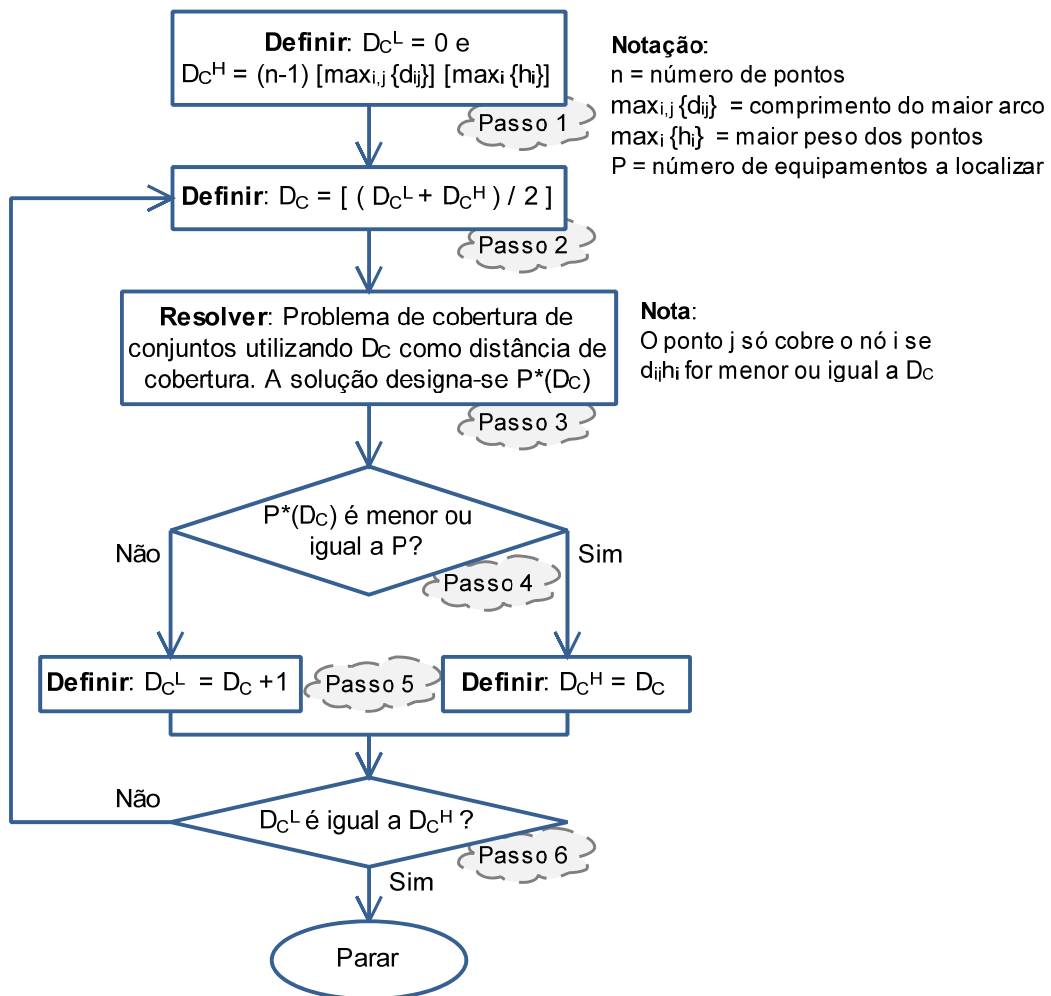


Figura 23: Fluxograma para a resolução de problemas P-Centro Com Peso

Fonte: (Daskin 1995)

Como se pode observar, apenas o primeiro passo deste algoritmo é modificado em relação ao anterior. Esta alteração tem que ver com a introdução de pesos nos pontos. D_C^H já tem de incluir o máximo dos pesos, assim como a distância de cobertura D_C considera os pesos na resolução do problema de cobertura de conjuntos.

Para exemplificar esta resolução utilizou-se o mesmo exemplo da anterior, ou seja, localizar três equipamentos o mais central possível, mas tendo em conta a população residente no distrito em 2004 como peso dos pontos.

Na próxima tabela são apresentados os resultados obtidos.

Tabela 12: Resolução do exemplo do algoritmo P-Centro Com Peso

| Iteração | Primeira | Segunda | ... | Penúltima | Última |
|----------------|--|---------------------------|-----|---------------------------|-------------------------|
| Passo 1 | $D_C^H =$ 434844763650 $D_C^L = 0$ | - | ... | $(D_C^H =$ 5151826233) | - |
| Passo 2 | $D_C =$ 217422381825 | $D_C =$ 108711190912 | ... | $D_C =$ 5151826234 | $D_C =$ 5151826233 |
| Passo 3 | $P^*(D_C) = 1$ | $P^*(D_C) = 1$ | ... | $P^*(D_C) = 3$ | $P^*(D_C) = 4$ |
| Passo 4 | Sim | Sim | ... | Sim | Não |
| Passo 5 | $D_C^H =$ 217422381825 | $D_C^H =$ 108711190912 | ... | $D_C^H =$ 5151826234 | $D_C^L =$ 5151826234 |
| Passo 6 | Não | Não | ... | Não | Não |

Com D_C igual a 5 151 826 234 metros.habitantes, os três equipamentos devem ser localizados em Manatuto, Aileu e Lospalos, segundo o algoritmo de cobertura de conjuntos.

3.4 Problemas de Mediana

Para a resolução de problemas de mediana é apresentada apenas uma resolução. A esta denominou-se **P-Mediana**, uma vez que é encontrada uma solução para problemas cujo objectivo é localizar um número P de equipamentos. Esta resolução é constituída por três algoritmos distintos: um algoritmo *add*, um *drop* e um de substituição. O primeiro algoritmo admite que não existe nenhum equipamento já instalado. Como é um algoritmo *greedy*, ou seja, procura o melhor valor a cada iteração sem perceber as consequências que terá nas iterações seguintes, no passo número dois localiza o equipamento no ponto que corresponde a um menor valor de distância média entre os equipamentos já localizados e os pontos que lhes estão atribuídos. No passo número três, o algoritmo *add* verifica se já foram localizados o número P de equipamentos definidos *a priori*. Em caso negativo, o algoritmo volta ao passo dois. Se a resposta for positiva, é executado o algoritmo de substituição. Apesar de o algoritmo *drop* ser idêntico ao *add*, o pressuposto inicial é oposto. É admitido à partida que todos os pontos têm um equipamento instalado e o objectivo é ir retirando equipamentos até obter o número P , tendo em consideração o menor aumento da distância média entre os pontos e os equipamentos a estes atribuídos. À semelhança do anterior, quando é atingido o número P de

equipamentos instalados, é executado o algoritmo de substituição. As soluções obtidas pelos dois algoritmos são comparadas e a que tiver uma menor distância média é a solução final.

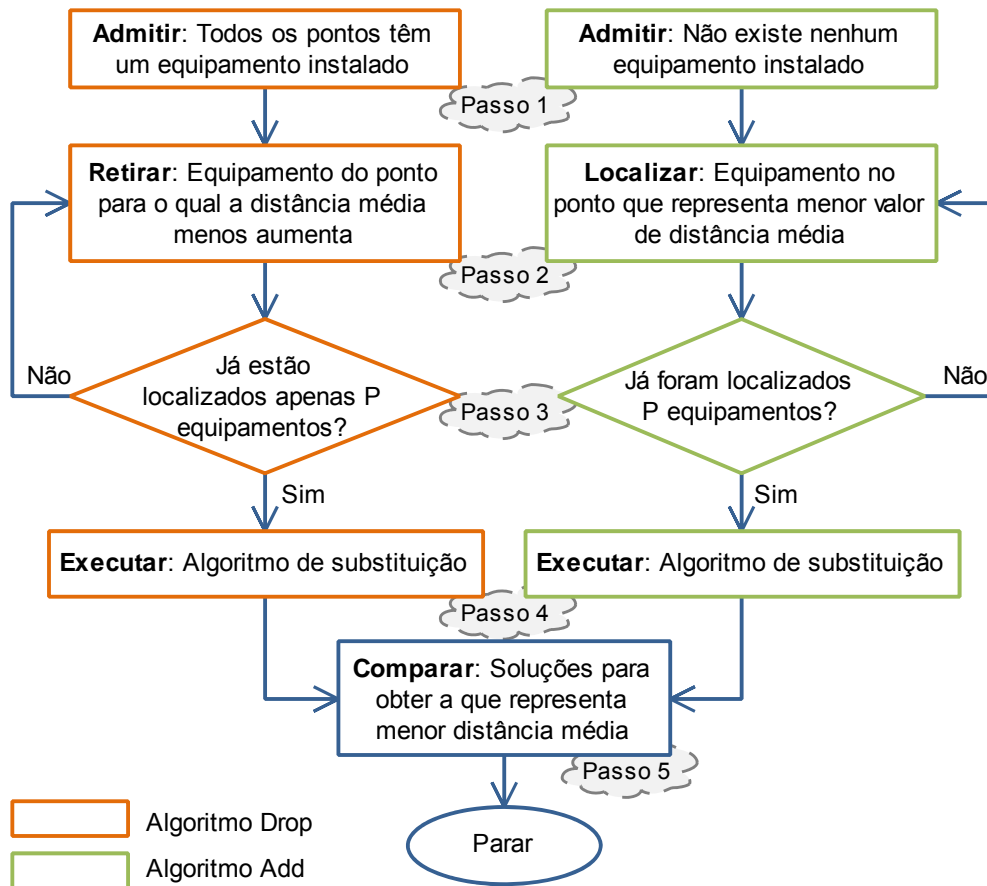


Figura 24: Fluxograma para a resolução de problemas P-Mediana

Fonte: Adaptado de (Daskin 1995)

O algoritmo de substituição a aplicar nesta resolução é semelhante aos algoritmos de substituição descritos anteriormente. Com o conjunto de P equipamentos localizados a partir dos algoritmos *add* ou *drop*, é seleccionado o primeiro equipamento a tentar remover. É então identificado o melhor nó de substituição para este equipamento e, se a distância média obtida com a troca for inferior à anterior, o algoritmo volta a seleccionar outro equipamento a tentar remover. Caso a distância média não seja inferior, o algoritmo verifica se todos os equipamentos foram sujeitos a tentativa de remoção. Caso não tenham sido, é seleccionado o próximo equipamento a tentar remover e volta-se ao passo três. Quando todos os equipamentos já foram sujeitos a tentativa de substituição, o algoritmo pára.

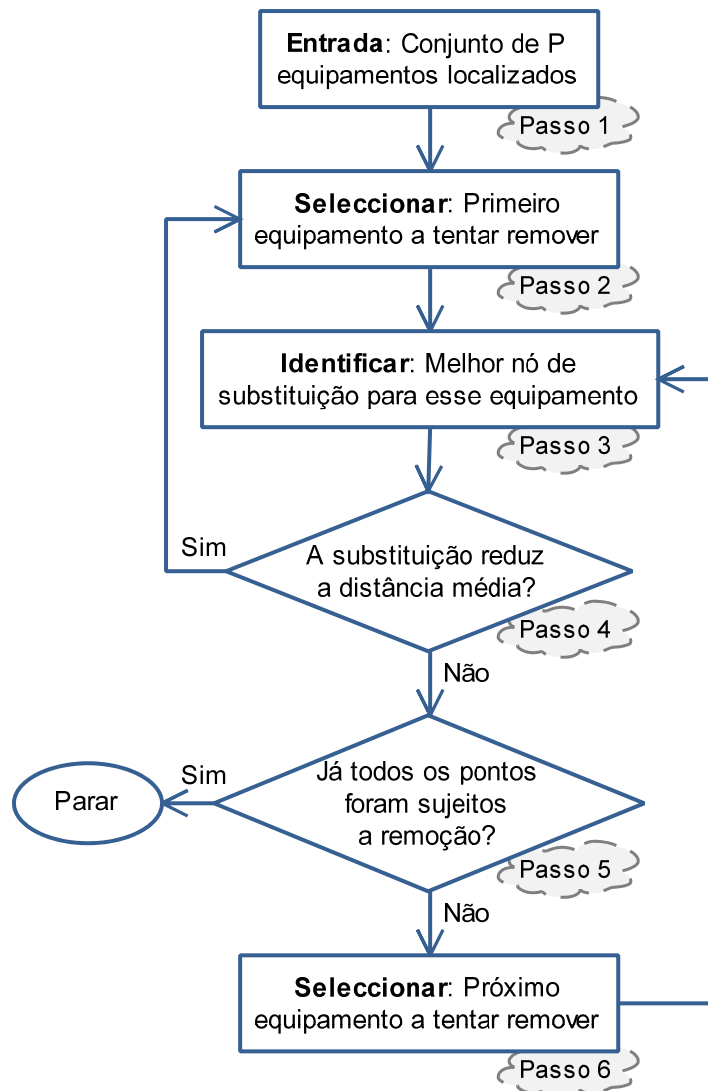


Figura 25: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de P-Mediana

Fonte: (Daskin 1995)

Para melhor exemplificar esta resolução, utilizaram-se as estações dos comboios intercidades do território de Portugal com a mesma base geográfica. O objectivo é localizar cinco equipamentos, tendo em conta a população do concelho na qual se insere a estação, como nos exemplos da centragem absoluta. Para os pesos dos arcos, utilizou-se o próprio comprimento.

Na próxima tabela são apresentados os resultados deste exemplo.

Tabela 13: Resultados intermédios do exemplo da resolução P-Mediana

| Algoritmo | Add | Substituição no Add | Drop | Substituição no Drop |
|--------------------------|---|---|--|---|
| Distância média (metros) | 30836,91 | 28052,62 | 29055,89 | 28052,62 |
| Localizações | Loulé, Sete Rios, Entroncamento, Pampilhosa e Vila Nova de Gaia | Loulé, Entrecampos, Castelo Branco, Coimbra e Porto | Loulé, Sete Rios, Coimbra, Covilhã e Vila Nova de Gaia | Loulé, Entrecampos, Castelo Branco, Coimbra e Porto |

Comparando as soluções dadas pelo algoritmo *add* e pelo algoritmo *drop*, as soluções são iguais após a utilização do algoritmo de substituição. Assim, a solução final tem uma distância média igual a 28052,62, estando os equipamentos localizados em Loulé, Entrecampos, Castelo Branco, Coimbra e Porto.

3.5 Problemas de Localização de Equipamentos com Custo Fixo

Para problemas de localização de equipamentos com custo fixo são apresentadas duas resoluções: uma para os casos em que se considera que os equipamentos não têm capacidade limitada e uma outra para os casos de equipamentos com capacidade limitada.

3.5.1 Custo fixo sem capacidade

A resolução para os problemas de custo fixo sem capacidade limitada baseia-se na compilação de três algoritmos distintos: um algoritmo *add*, um algoritmo *drop* e um algoritmo de substituição. A esta resolução deu-se o nome de **Custo Fixo sem Capacidade** e é apresentada na figura seguinte.

No primeiro passo, é aplicado o algoritmo *add* de modo a encontrar uma solução inicial. A esta solução é aplicado o algoritmo de substituição. Caso a solução não melhore, ou seja, não haja nenhuma substituição, a solução final está encontrada e a resolução pára. Se a solução melhorar, são tentados os algoritmos *add* e *drop* a essa mesma solução, de modo a verificar se adicionando ou removendo equipamentos o custo total diminui. De entre as duas soluções obtidas é seleccionada a de menor custo. No passo seis é verificado então se a solução seleccionada é melhor do que a anterior. Se a resposta for afirmativa, volta-se ao passo dois para nova utilização do algoritmo de substituição. Se a resposta for negativa, a resolução pára e a solução que representa menor custo está encontrada.

De seguida são apresentados os algoritmos que compõem esta resolução.

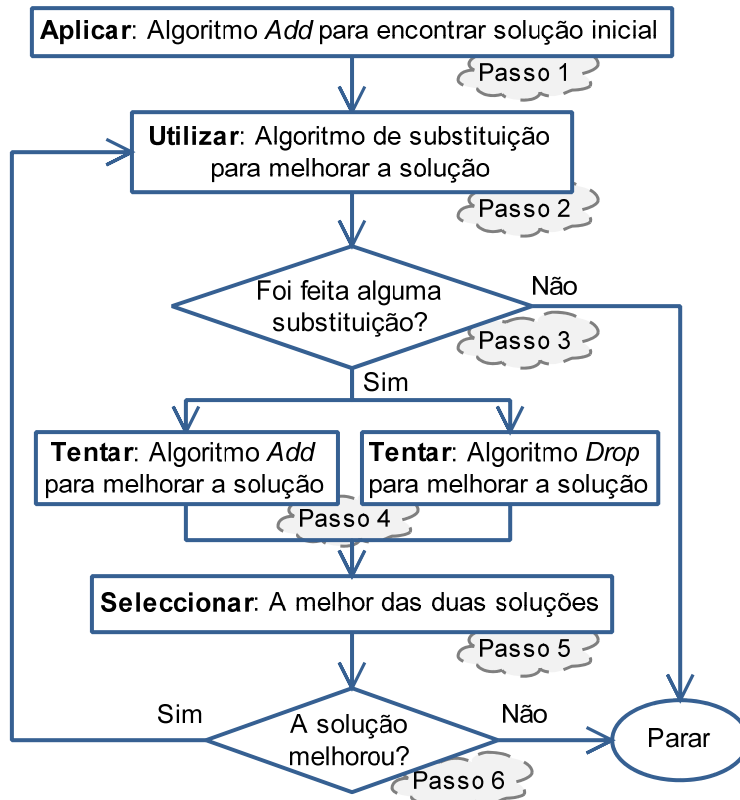
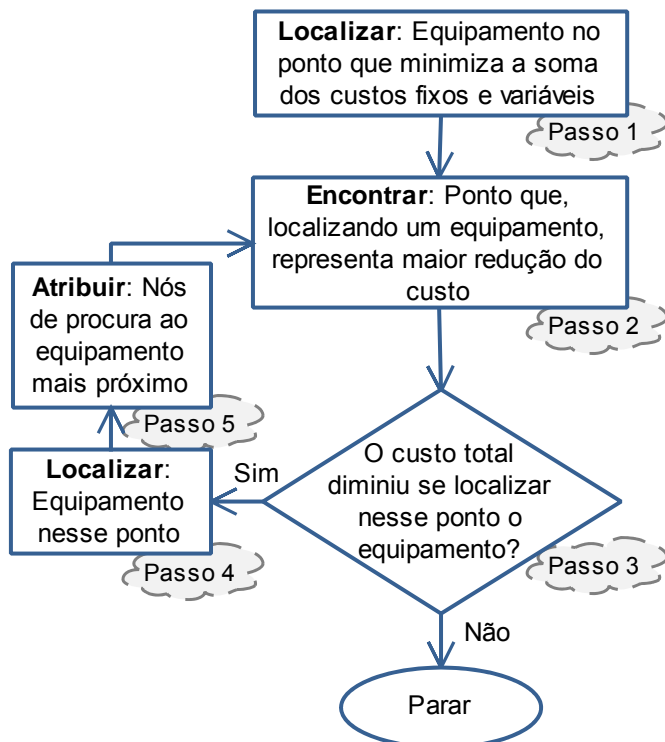


Figura 26: Fluxograma para a resolução de problemas de Custo Fixo sem Capacidade

Fonte: (Daskin 1995)

Na figura ao lado é apresentado o algoritmo *add*. O primeiro passo consiste na localização do



equipamento que minimiza a soma dos custos fixos e variáveis. No passo dois é encontrado o ponto para o qual um equipamento aí localizado representa maior redução do custo. Caso esse custo total diminua com o equipamento localizado o passo seguinte localiza o equipamento nesse ponto. Os nós de procura são atribuídos ao equipamento mais próximo no passo seguinte. O algoritmo pára quando a introdução de um equipamento não diminui o custo total. Este algoritmo só aplica o passo número um na sua primeira utilização na resolução.

Figura 27: Fluxograma do algoritmo *add* para problemas de Custo Fixo sem Capacidade

Fonte: (Daskin 1995)

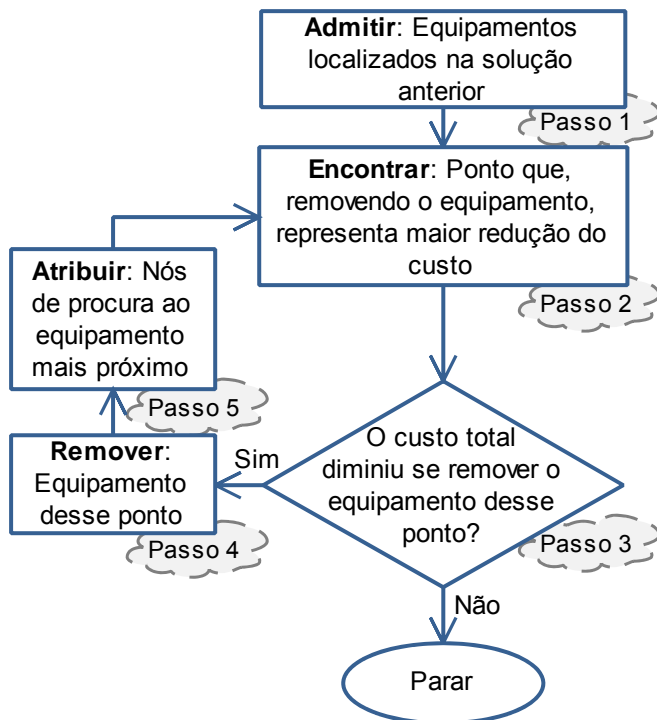


Figura 28: Fluxograma do algoritmo *drop* para problemas de Custo Fixo sem Capacidade

Fonte: (Daskin 1995)

O algoritmo *drop* da resolução de problemas de Custo Fixo sem Capacidade começa por admitir os equipamentos localizados nas posições dadas pela solução anterior. No passo número dois é encontrado o ponto, para o qual a remoção do ponto que aí está instalado, representa a maior redução do custo. Caso o custo total diminua com a remoção do equipamento anterior, é eliminado desse ponto. Os nós de procura são atribuídos ao equipamento mais próximo. O algoritmo pára quando a remoção de um equipamento não produzir diminuição no custo total.

O algoritmo de substituição, ao lado apresentado, tem como entrada o conjunto de equipamentos já localizado pelo algoritmo anterior. No passo dois é encontrado o melhor ponto de substituição para cada equipamento localizado. É identificado o melhor par de substituição e se o custo total diminuir com a troca, é realizada a substituição nesse par de pontos. Os nós de procura são atribuídos ao equipamento mais próximo. O algoritmo pára quando já não existe nenhuma troca que diminua o custo total.

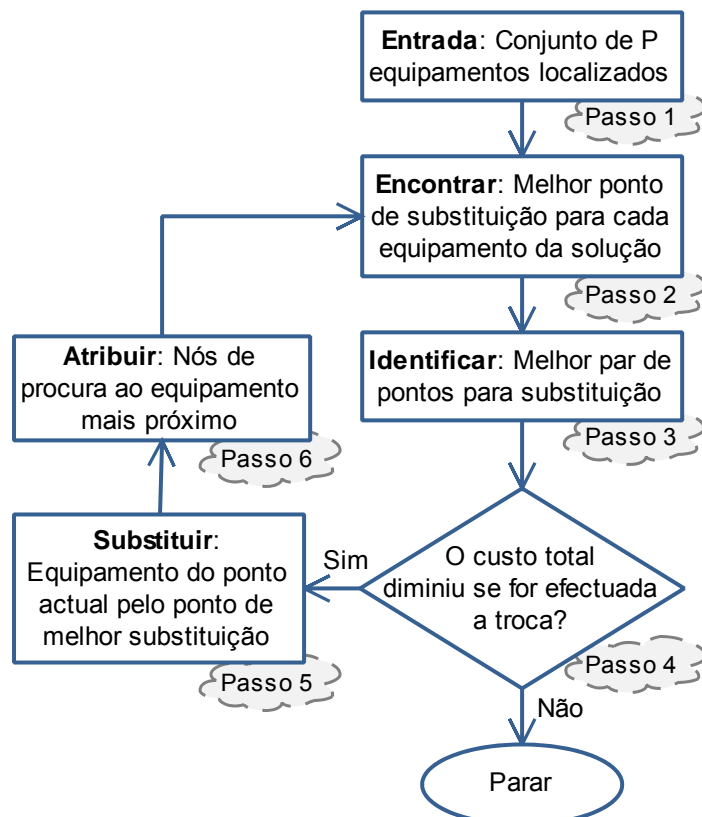


Figura 29: Fluxograma do algoritmo de substituição para problemas de Custo Fixo sem Capacidade

Fonte: (Daskin 1995)

Para exemplificar a resolução dos problemas de Custo Fixo sem Capacidade, utilizou-se como base geográfica o território de Timor-Leste usado nos exemplos anteriores.

Pretende-se então localizar um número de equipamentos que reduza o custo total, tendo em conta um custo fixo de localização em cada ponto candidato. Este é apresentado na tabela seguinte, tendo os valores sido escolhidos de forma aleatória.

Tabela 14: Custos fixos admitidos no exemplo de problemas de Custo Fixo sem Capacidade

| Distrito | Custo Fixo |
|----------|------------|
| Ainaro | 70 000 |
| Suai | 55 000 |
| Baucau | 59 000 |
| Ermera | 60 000 |
| Liquica | 65 000 |
| Manatuto | 77 000 |
| Same | 50 000 |
| Viqueque | 76 000 |
| Maliana | 80 000 |
| Aileu | 90 000 |
| Lospalos | 45 000 |
| Díli | 100 000 |

A procura de cada ponto corresponde à população desse distrito, como nos exemplos anteriores. Para o comprimento dos arcos foram utilizados valores reais medidos em quilómetros. Foi ainda considerado um custo de transporte por unidade de distância por unidade de procura igual a 0,008.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela seguinte.

Tabela 15: Resultados do exemplo da resolução de Custo Fixo sem Capacidade

| | Custo Total | Localizações |
|----------------|-------------|---------------------|
| Passo 1 | 473 979,14 | Suai, Baucau e Díli |
| Passo 2 | 473 979,14 | Suai, Baucau e Díli |
| Passo 3 | Custo Igual | Localizações Iguais |
| Parar! | | |

Como se pode verificar, o algoritmo de substituição (passo 2) não melhora a solução encontrada pelo algoritmo *add* (passo 1). Por este motivo, o algoritmo pára e a solução final é a inicial, com custo total igual a 473 979,11 e equipamentos localizados em Suai, Baucau e Díli.

3.5.2 Custo fixo com capacidade

Para resolver problemas de custo fixo com capacidade limitada foi adoptado um algoritmo heurístico do tipo *add* e *greedy*, ou seja, é um algoritmo que começa sem equipamentos instalados e a cada iteração é localizado um, no melhor ponto dessa iteração, sem verificar que consequências terá noutras iterações. Na próxima figura é apresentado o fluxograma deste algoritmo.

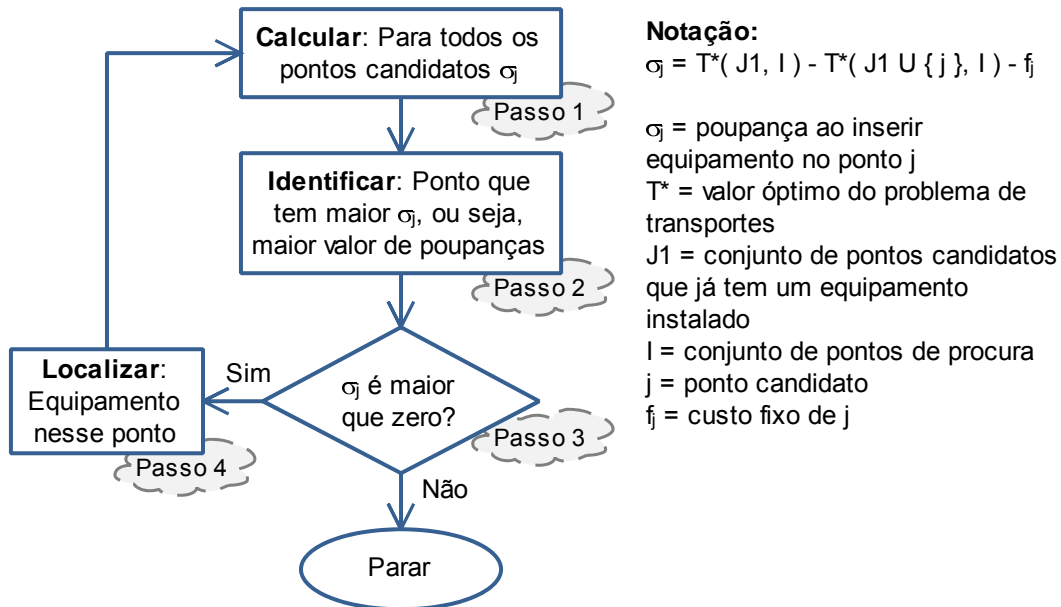


Figura 30: Fluxograma para a resolução de problemas de Custo Fixo com Capacidade

Fonte: (Sridharan 1995)

No primeiro passo da resolução são calculados os valores das poupanças obtidos aquando da localização de um equipamento num ponto candidato. A localização que apresentar maior valor de poupanças é memorizada no passo número dois. Se esse valor for superior a zero, é localizado o equipamento no ponto em questão. Caso as poupanças sejam iguais ou inferiores a zero, o algoritmo pára uma vez que já não é possível reduzir mais o custo total com a introdução de equipamentos.

No cálculo das poupanças é necessário recorrer ao problema de transportes. Este é um caso particular da programação linear cuja formulação matemática é apresentada de seguida (Valadares Tavares, et al. 1996).

$$c_{ij} = \text{custo unitário de transporte da procura do nó } i \text{ para o nó } j$$

Variáveis de entrada:

$$a_i = \text{procura existente no nó } i$$

$$b_j = \text{oferta existente no nó } j$$

Variável de decisão:

$$x_{ij} = \text{quantidade de procura a transportar do nó } i \text{ para o nó } j$$

| | | |
|------------|--|---------|
| Minimizar: | $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$ | (3.1) |
| | $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m$ | (3.2) |
| Sujeito a: | $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n$ | (3.3) |
| | $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ | (3.4) |

As variáveis de entrada desta formulação são o custo unitário de transporte da procura no nó i para o nó de oferta j , a procura existente em cada nó de procura i e a oferta existente em cada nó de oferta j . A quantidade de procura a transportar do nó i para o nó j é a variável de decisão. Esta formulação tem como função objectivo a minimização de F , (3.1), ou seja, o custo total. A primeira restrição, (3.2), exige que a quantidade de procura transportada seja igual à procura total (m nós de origem). Por sua vez, a restrição seguinte, (3.3), obriga que a quantidade de procura transportada para os nós de oferta seja igual à oferta existente (n nós de destino). Para que o problema fique equilibrado é ainda exigido que a procura seja igual à oferta.

Como exemplo para a resolução de problemas de custo fixo com capacidade adoptou-se o território de Timor-Leste com a base geográfica já utilizada noutros exemplos. O objectivo é localizar um número de equipamentos que cubra toda a procura existente e que represente o menor custo. Na próxima tabela são apresentados os pontos considerados assim como os respectivos dados.

Tabela 16: Dados dos pontos utilizados no exemplo de Custo Fixo com Capacidade

| Distrito | Procura – População (milhares) | Capacidade (Milhares) | Custo Fixo (milhares) |
|----------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Ainaro | 52 | 300 | 700 |
| Suai | 53 | 0 | - |
| Baucau | 101 | 300 | 590 |
| Ermera | 103 | 0 | - |
| Liquiça | 55 | 250 | 650 |
| Manatuto | 37 | 0 | - |
| Same | 45 | 100 | 500 |
| Viqueque | 65 | 0 | - |
| Maliana | 84 | 200 | 800 |
| Aileu | 40 | 180 | 900 |
| Lospalos | 57 | 0 | - |
| Díli | 176 | 200 | 1000 |

Após a aplicação do algoritmo de resolução, pode verificar-se que os equipamentos devem ser localizados em Baucau, Ainaro, Liquiça e Maliana, tendo um custo total igual a 42585,98.

3.6 Localização de pontos em sistemas de informação geográfica

3.6.1 Introdução

Os sistemas de informação geográfica são desenvolvidos para armazenar, recuperar, manipular, analisar e mapear informação geográfica, que é representada por pontos, linhas e/ou polígonos. Articulados com modelos de localização de pontos, podem ser uma ajuda significativa para quem necessite de resolver problemas de localização deste tipo. Os arcos e os nós do grafo para o modelo de localização são as linhas e os pontos dos dados geográficos. Para além da representação geográfica é apenas necessária a informação complementar consoante o tipo de problema que se queira resolver, seja por exemplo, a procura em cada nó em problemas de p-mediana.

Estes são um meio eficaz de recolha e organização de dados espaciais, permitindo a identificação de locais potencialmente viáveis, assim como o cálculo das distâncias entre pontos candidatos e pontos de procura. Deste modo, é possível extrair informação através de funções que os SIG já disponibilizam, para posteriormente utilizar em modelos de localização. Para além disso, é ainda possível combinar e utilizar várias bases de dados distintas, mesmo que estas tenham escalas ou sistemas de coordenadas diferentes. Os SIG podem ser úteis não só para introdução de dados de partida para a resolução de problemas de localização, mas também podem ser utilizados como meio para apresentação de resultados, por exemplo, através de criação de novos conjuntos de dados geográficos, novas tabelas, entre outras (Church 2002).

Contudo, os sistemas de informação geográfica mais comuns, por exemplo o ArcGIS™, dispõem apenas de algoritmos de análise espacial como o cálculo do caminho de menor custo. Não dispõem de ferramentas de optimização de localização de pontos (Gonçalves 2007). A ferramenta que mais se assemelha a um módulo de resolução de problemas de localização de pontos é a designada ESRI® Business Analyst. Esta ferramenta permite avaliar vários pontos candidatos à implantação de dado equipamento de forma isolada. Para cada ponto candidato pode ser desenhada a área de influência definida por um determinado raio pré-definido, sendo deste modo possível, por exemplo, verificar áreas que se intersectam ou áreas descobertas. Business Analyst disponibiliza também algoritmos para desenvolvimento de modelos preditivos, por exemplo, medir a probabilidade de um cliente se deslocar a um equipamento instalado. Esta ferramenta contém ainda outras funcionalidades, contudo analisam os pontos candidatos um a um e não apontam para uma solução, ou seja, não são capazes de indicar qual a melhor localização para um equipamento (ESRI® 2009).

Uma entidade alemã, apercebendo-se das vantagens da integração de modelos de resolução de problemas de localização em SIG e da não existência de soluções, desenvolveu ela própria uma solução, que é apresentada no próximo subcapítulo.

3.6.2 Library of Location Algorithms

LoLA (*Library of Location Algorithms*) é uma solução que foi desenvolvida com o intuito de agrupar um conjunto de algoritmos de resolução de problemas de localização de pontos, dando uma solução de forma fácil e rápida (Drezner e Hamacher 2002). Este software foi parcialmente fundado pelo Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), organização para a ciência e pesquisa na Alemanha, e está disponível na internet de forma gratuita.

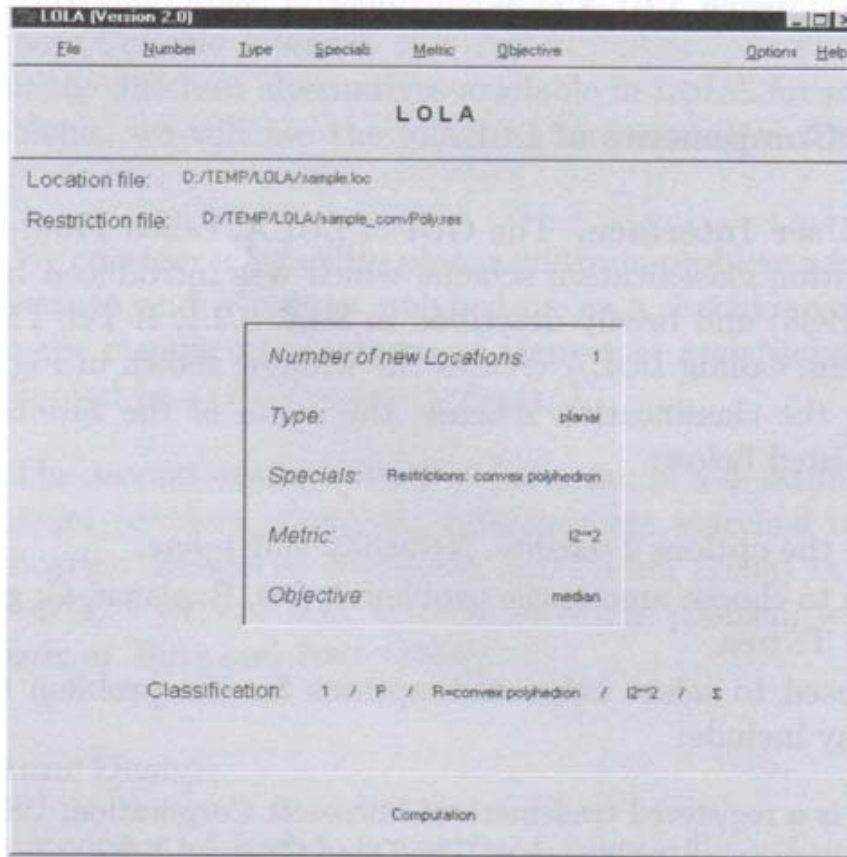


Figura 31: Interface gráfico de LoLA

Fonte: (Drezner e Hamacher 2002)

Os algoritmos são classificados segundo um esquema de cinco posições, sendo que na posição um é apresentado o número de equipamentos a localizar, na posição dois o tipo de problema (se é planar, discreto ou num grafo geral não direccional), na posição três são indicados os pressupostos e as restrições especiais, na posição quatro o tipo de função de distância, e na última posição o tipo de função objectivo (Hamacher e Nickel 1998).

Esta solução é composta por três interfaces distintos. O interface gráfico é baseado no esquema das cinco posições descrito acima, Figura 31. O interface de texto está integrado no anterior e consiste numa linha de comandos que pode ser utilizada para executar um algoritmo. Por último, o interface de programação permite a edição de algoritmos específicos da biblioteca LoLA.

As soluções para os problemas resolvidos a partir dos algoritmos da biblioteca LoLA podem ser apresentadas em formato texto ou graficamente.

Para além de resolver problemas de localização, este *software* tem a especificidade de poder ser integrado num sistema de informação geográfica, seja por exemplo o ArcView GIS™. Assim, é possível utilizar LoLA num ambiente SIG e visualizar a solução de um problema no mapa que contém os dados do mesmo. Este é o aspecto que torna LoLA não como um simples *software* de resolução de problemas de localização mas sim uma novidade nessa resolução.

Contudo, tanto o esquema de classificação de algoritmos assim como a forma de utilização desta solução requer um conhecimento prévio dos problemas de localização existentes e respectivos métodos de resolução, para deste modo adaptar da melhor forma a resolução ao problema em causa. Assim, esta solução limita os utilizadores de sistemas de informação geográfica que queiram utilizar este *software*.

Aliado a este facto, a solução apenas foi desenvolvida para o software ArcView GIS™ e não para a sua versão actual ArcGIS™ e o sítio electrónico onde se encontra disponível a versão para descarregar¹ aparenta não ser actualizado desde o ano 2001 (data indicada no fundo da página no mesmo).

¹ <http://www.mathematik.uni-kl.de/~lola/>

4 Módulo para localização de pontos em ambiente SIG

4.1 Introdução

A principal motivação para a elaboração de um módulo de localização de pontos foi por um lado a sua inexistência, e, por outro, o desenvolvimento de um módulo associado a um sistema de informação geográfica e de fácil utilização por qualquer pessoa. Como foi referido no subcapítulo anterior, existe apenas uma solução que agrega a localização de pontos aos SIG, contudo não é uma boa opção para quem não tem conhecimentos na área da ciência da localização. Neste sentido o objectivo seria conseguir uma forma de agregação intuitiva e que possa ser utilizada tanto por alguém que conheça os problemas de localização e que os saiba adaptar, como também por quem apenas queira uma solução para um problema sem ter qualquer conhecimento sobre o assunto.

Para tal, foi desenvolvido um módulo de problemas de localização de pontos no *software* ArcGIS™, recorrendo à linguagem de programação por este providenciada, *Visual Basic for Applications* (VBA), no separador de desenvolvimento de macros (*Visual Basic Editor*). O VBA é uma implementação desenvolvida pela Microsoft® sobre a base de *Visual Basic 6*, uma linguagem de programação orientada a eventos (*event-driven*), e que inclui um ambiente de desenvolvimento próprio e integrado na aplicação anfitriã (Campo, Vilar e Lúcio 1999).

As resoluções de problemas de localização de pontos incluídas no módulo são as descritas no capítulo anterior, ou seja, três de cobertura, cinco de centragem, uma de mediana e duas de custo fixo.

4.2 Interface

Tendo em conta os objectivos do módulo, optou-se por criar um esquema de perguntas ao utilizador que o encaminha para o problema adequado à medida que responde. Este esquema baseia-se num conjunto de questões dispostas em árvore, ou seja, a pergunta seguinte depende sempre de uma resposta anterior, para deste modo ser traçado o caminho que vai ao encontro da resolução mais adequada ao problema. As perguntas têm de ser, então, de resposta fechada. A tabela seguinte sistematiza o processo de selecção de características diferenciadoras entre resoluções. A primeira característica utilizada para a distinção foi a possibilidade de ser conhecida, *a priori*, a distância de cobertura. As características seguintes foram sendo adaptadas consoante a necessidade de separação, ou seja, dependendo do número e tipo de resoluções ainda não separadas. Por exemplo, a segunda característica diz apenas respeito às três primeiras resoluções da tabela, para deste modo ser possível dividir pelo menos uma das restantes.

O objectivo foi, então, conseguir dividir as resoluções com o mínimo de características possível, isto é, com apenas uma questão separar várias resoluções.

Na figura seguinte é apresentado o esquema de perguntas conseguido através da tabela, disposto em árvore.

Tabela 17: Características que diferenciam as resoluções de problemas de localização de pontos adoptadas

| | Cobertura | | | Centragem | | | | | P-Mediana | Custo Fixo | |
|---|------------------------|------------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------|----------------|----------------|
| | Cobertura de Conjuntos | Máxima Cobertura | | Absolutos | | | Nos Vértices | | | Sem capacidade | Com Capacidade |
| | | Com % | Com P Elementos | 1-Centro sem Peso | 1-Centro com Peso | 2-Centro sem Peso | P-Centro sem peso | P-Centro com peso | | | |
| Distância de cobertura conhecida | Sim | Sim | Sim | Não | Não | Não | Não | Não | Não | Não | Não |
| N.º de equipamentos pré-definido | Não | Não | Sim | | | | | | | | |
| Cobertura total da rede | Sim | Não | | | | | | | | | |
| Custo fixo diferenciado | | | | Não | Não | Não | Não | Não | Não | Sim | Sim |
| Capacidade Limitada | | | | | | | | | | Não | Sim |
| Qualidade do serviço degrada-se com distância | | | | Não | Não | Não | Não | Não | Sim | | |
| Equipamentos nos pontos ou em toda a rede | | | | Toda a rede | Toda a rede | Toda a rede | Apenas nos pontos | Apenas nos pontos | | | |
| N.º de equipamentos | | | | Um | | Dois | | | | | |
| Pontos com pesos distintos | | | | Não | Sim | Não | Não | Sim | | | |

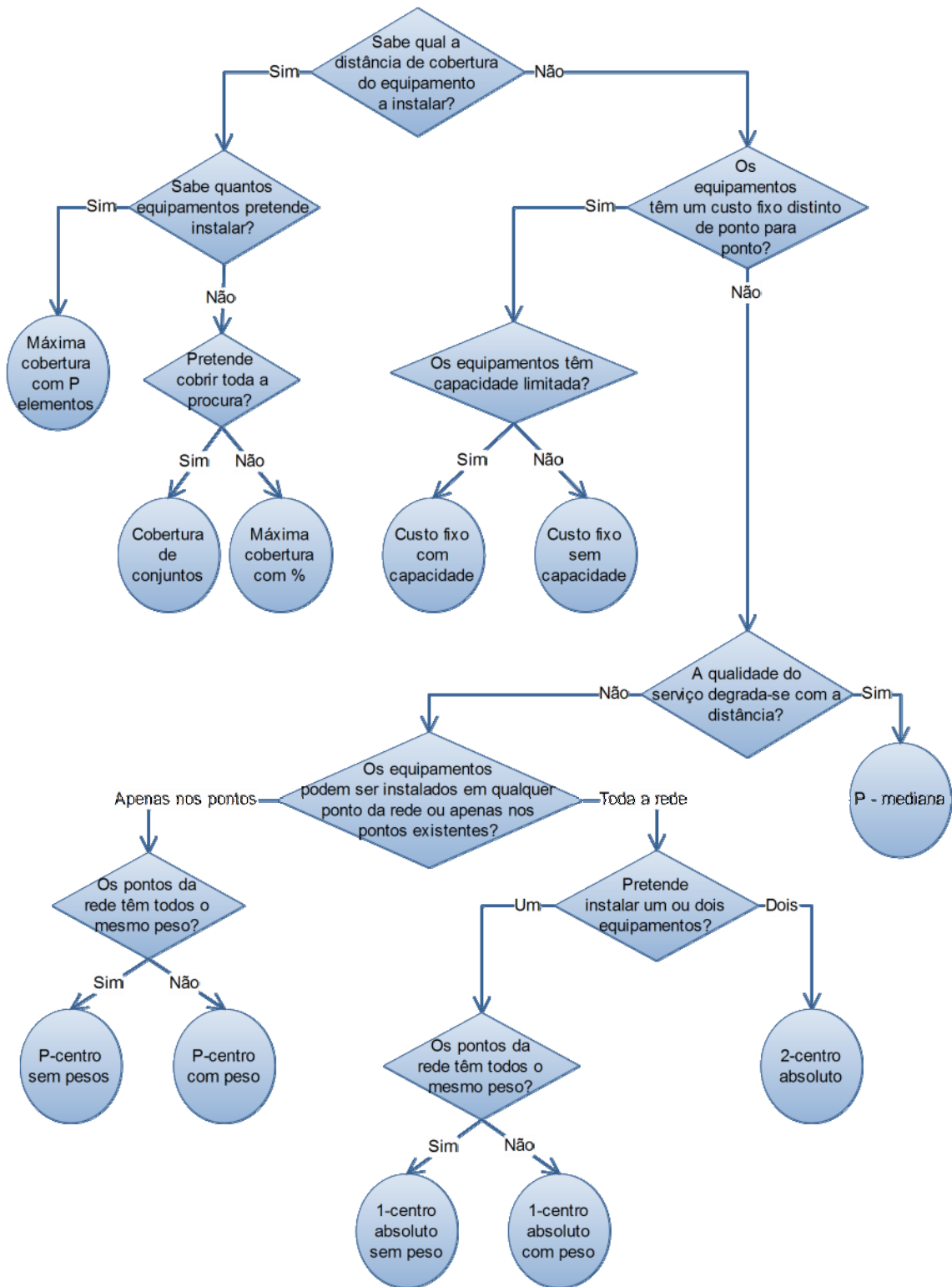


Figura 32: Esquema em árvore de perguntas ao utilizador

Como se pode verificar, no máximo são realizadas seis perguntas para atingir uma resolução final, o que se torna positivo para o utilizador. É importante referir que as resoluções são inicialmente divididas por tipo de problema (cobertura, centragem, mediana ou custo fixo) e só depois por resolução. Assim, na parte superior da figura estão representadas as resoluções

correspondentes aos problemas de cobertura e custo fixo e na parte inferior aos problemas de mediana e de centragem.

A primeira questão separa os problemas de cobertura dos restantes, uma vez que de entre as resoluções adoptadas, apenas neste tipo de problemas é conhecida a distância de cobertura a adoptar, sendo esta: “Sabe qual a distância de cobertura do equipamento a instalar?”. Caso a resposta seja positiva, fica claro que se trata de um problema de cobertura mas ainda não é possível determinar a resolução a aplicar, uma vez que existem três resoluções para este tipo de problemas. A pergunta a colocar, para separar uma das resoluções é: “Sabe quantos equipamentos pretende instalar?”. Se a resposta a esta pergunta for “sim”, é porque o problema é solucionado através da resolução **Máxima cobertura com P elementos**, visto tratar-se de um problema de cobertura no qual se sabe o número de equipamentos a instalar. Contudo, caso a mesma pergunta tiver uma resposta negativa, é necessário colocar uma última questão para diferenciar as outras duas resoluções de problemas de cobertura, sendo esta: “Pretende cobrir toda a procura?”. Se sim, a **Cobertura de conjuntos** é a resolução indicada, caso não tenha intenção de cobrir a procura na sua totalidade, a **Máxima cobertura com percentagem** é a resolução escolhida.

Voltando à questão inicial relativa ao conhecimento da distância de cobertura, caso a resposta seja negativa, é necessário efectuar outra pergunta para separar mais um tipo de problemas, sendo esta: “Os equipamentos têm um custo distinto de ponto para ponto?”. Se a resposta for positiva, trata-se então de um problema de custo fixo. Como existem dois problemas deste tipo, é inevitável realizar uma nova pergunta: “Os equipamentos têm capacidade limitada?”. Se o sim for a resposta dada, a resolução a aplicar é a **Custo fixo com capacidade**, uma vez que apenas esta contempla a limitação de capacidade. Contudo, se obtiver um não como resposta, a resolução **Custo fixo sem capacidade** é a indicada.

Regressando à pergunta do custo fixo, em caso de resposta negativa é colocada nova questão para diferenciar os outros dois tipos de problemas, passando para a parte inferior do esquema. A pergunta é então: “A qualidade do serviço degrada-se com a distância?”. Caso a resposta seja positiva, é detectado não só o tipo de problema como também a resolução a aplicar, dado que existe apenas uma resolução para os problemas de mediana, sendo esta a **P-Mediana**. Se a resposta consistir no não, é porque se trata de um problema de centragem, por exclusão de partes. Neste momento ainda é necessário separar cinco resoluções. Assim, a pergunta seguinte prende-se com a distinção entre problemas de centragem absoluta e problemas de centragem em vértices, sendo esta: “Os equipamentos podem ser localizados em qualquer ponto da rede ou apenas nos pontos existentes?”. Se apenas se puder colocar equipamentos nos pontos existentes, é um problema de centragem em vértices. Como existem dois algoritmos para problemas deste género, a pergunta seguinte é “Os pontos da rede têm todos o mesmo peso?”. Deste modo é possível afirmar que a resolução adequada é a **P-Centro sem peso** para o caso em que a resposta seja positiva, ou é a **P-Centro com peso** se a resposta for em sentido contrário. Se for possível localizar os equipamentos em toda a rede, sejam arcos

ou nós (vértices), tem-se um problema de centragem absoluta. A pergunta seguinte é: “Pretende instalar um ou dois equipamentos?”. Se a resposta for dois, a resolução a adoptar é a **2-Centro absoluto**. Caso a resposta seja um, existem ainda duas resoluções possíveis que podem ser distinguidas perguntando: “Os pontos da rede têm todos o mesmo peso?”. Se a resposta for positiva, a resolução a aplicar é a **1-Centro absoluto sem peso**, e se a resposta for negativa, a resolução é a **1-Centro absoluto com peso**.

O módulo é iniciado com a possibilidade de o utilizador conhecer ou não o tipo de problema, como demonstra a figura seguinte. Deste modo, os utilizadores que sabem que algoritmo lhes é mais apropriado podem escolhê-lo sem recorrer ao esquema de perguntas. Já os utilizadores que não sabem que algoritmo pode solucionar o seu problema, seleccionam a opção “Não”, sendo assim, encaminhados para o módulo de perguntas.

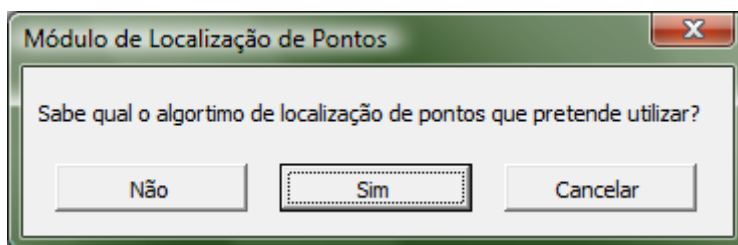


Figura 33: Início do módulo de problemas de localização de pontos

Quando o módulo de perguntas é iniciado, surge a primeira questão do esquema, como se pode observar na figura seguinte. O botão de ajuda faz expandir a janela e mostra as definições necessárias à pergunta que surge. Por exemplo, nesta primeira questão, a definição associada é a da distância de cobertura. À medida que o utilizador responde às perguntas, a janela aumenta e aparece a questão seguinte.

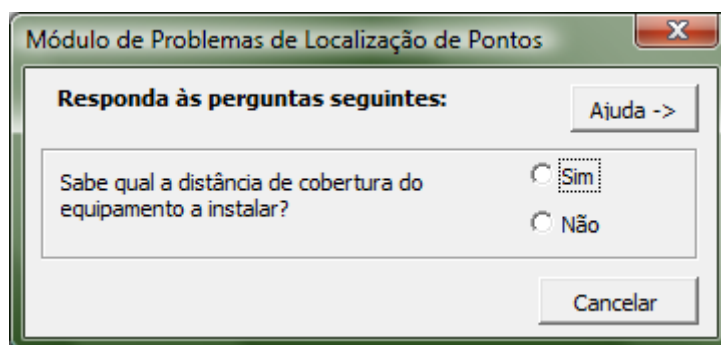


Figura 34: Primeira questão do módulo de perguntas

Quando uma resposta dá origem a uma solução de algoritmo, a janela de introdução de dados aparece com o nome da resolução obtida como título, como é possível verificar na figura seguinte.

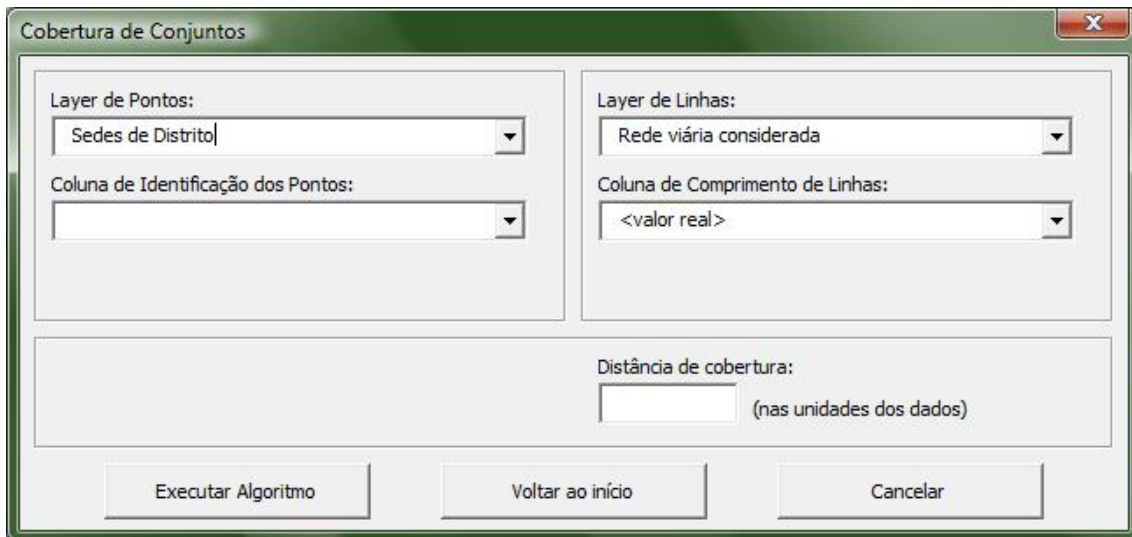


Figura 35: Introdução de dados para um problema de cobertura de conjuntos

Por exemplo, num problema de cobertura de conjuntos é necessário preencher os campos da *layer* de pontos e respectiva coluna de identificação, *layer* de linhas e respectiva coluna de comprimento, caso não queira adoptar o valor real, e a distância de cobertura, respeitando as unidades dos dados.

Caso o utilizador conheça os algoritmos e saiba qual o mais indicado para o seu problema, pode escolher a resolução, como demonstra a figura seguinte.

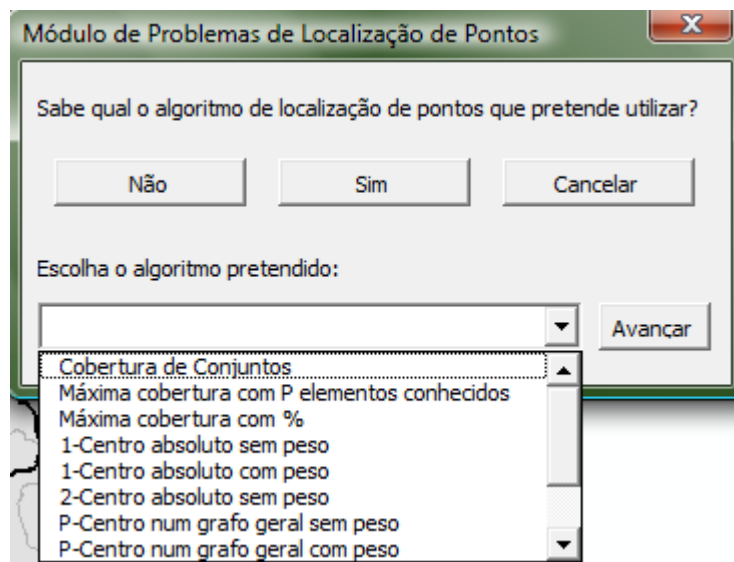


Figura 36: Escolha da resolução pretendida

Como se pode verificar, são listadas as resoluções existentes. Cabe ao utilizador escolher a sua e é directamente encaminhado para a janela de introdução de dados.

Após a introdução dos dados do problema no módulo, é apresentada a solução para o problema, com recurso à resolução indicada/determinada. Os pontos onde se devem localizar os equipamentos são seleccionados, caso a solução seja em pontos existentes, ou são desenhadas marcas nos locais da rede onde se devem localizar os equipamentos, caso a solução seja em qualquer ponto da rede. É ainda apresentada uma janela com a solução, que varia consoante a resolução utilizada, como se pode verificar na tabela seguinte.

Tabela 18: Informação apresentada na solução consoante resolução utilizada

| Resolução | Informação Apresentada na Solução |
|----------------------------------|---|
| Máxima cobertura com P elementos | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e proporção de procura coberta |
| Cobertura de conjuntos | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas |
| Máxima cobertura com percentagem | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e proporção de procura coberta |
| Custo fixo com capacidade | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e custo total |
| Custo fixo sem capacidade | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e custo total |
| P-Mediana | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e distância média |
| P-Centro sem peso | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e distância de cobertura |
| P-Centro com peso | Nome de identificação dos pontos seleccionados e respectivas coordenadas, e distância de cobertura com peso |
| 2-Centro absoluto | Coordenadas das marcas apresentadas, ou seja, dos pontos da rede onde se devem localizar os equipamentos |
| 1-Centro absoluto sem peso | Coordenadas da marca apresentada, ou seja, do ponto da rede onde se deve localizar o equipamento |
| 1-Centro absoluto com peso | Coordenadas da marca apresentada, ou seja, do ponto da rede onde se deve localizar o equipamento |

Ainda na mesma janela da solução, é dada a possibilidade de o utilizador guardar a informação acima indicada, num ficheiro com formato texto (txt).

4.3 Exemplo de aplicação

De seguida é apresentado um exemplo de utilização deste módulo.

Assuma-se que o utilizador não conhece os problemas de localização de pontos e necessita de recorrer ao módulo de perguntas. Na figura seguinte está representada a sequência de perguntas que dá origem ao modelo para o problema.

Módulo de Problemas de Localização de Pontos

Responda às perguntas seguintes: Ajuda <-

Sabe qual a distância de cobertura do equipamento a instalar? Sim Não

Os equipamentos têm um custo fixo distinto de ponto para ponto? Sim Não

A qualidade do serviço degrada-se com a distância? Sim Não

Os equipamentos podem ser instalados em qualquer ponto da rede ou apenas nos pontos existentes? Toda a rede Pontos existentes

Os pontos da rede têm todos o mesmo peso? Sim Não

Cancelar

Distância de cobertura: distância para a qual um serviço garantido por um ponto (que contenha um equipamento) esteja disponível a todos os outros pontos dentro da área de procura predefinida.

Custo fixo: pode entender-se como o sumatório dos custos inerentes à implantação do equipamento num determinado ponto.

Figura 37: Exemplo de utilização do módulo de perguntas

Como se pode verificar pela primeira questão, o utilizador não conhece a distância de cobertura associada ao seu equipamento, excluindo os problemas de cobertura. A segunda resposta indica que os equipamentos não têm um custo fixo distinto de ponto para ponto, ou seja, não é um problema de custo fixo. Relativamente à pergunta seguinte, o utilizador indica que a qualidade do serviço não se degrada com a distância, o que leva a excluir o problema de mediana. Quando questionado acerca da possível localização dos equipamentos, o utilizador indica que os mesmos apenas podem ser instalados nos pontos já existentes, ou seja, o problema é de centragem nos vértices. Na última pergunta, o utilizador responde que os pontos têm todos o mesmo peso. Deste modo, o modelo mais adequado ao problema é a P-Centro sem peso.

A janela de introdução de dados surge com o título da resolução, como se pode verificar na figura seguinte.

Para este tipo de problema, os dados a introduzir são: *layer* de pontos e respectiva coluna de identificação, *layer* de linhas e respectiva coluna de comprimento, caso não opte pelo valor real, e o número de equipamentos a instalar. Neste exemplo, utilizou-se o valor real de comprimento das linhas e pretende-se localizar três equipamentos.

Figura 38: Preenchimento de dados do problema exemplo

Ao executar o algoritmo, a solução surge, como demonstra a figura seguinte, e os três pontos onde devem ser localizados os equipamentos são seleccionados.

Figura 39: Solução final para o problema exemplo

Neste exemplo, a solução é composta por três pontos, com as respectivas coordenadas e pela distância de coberta calculada pelo algoritmo. Caso o utilizador pretenda guardar a informação disponibilizada na janela pode clicar em “Sim” e a janela representada na figura seguinte surge.

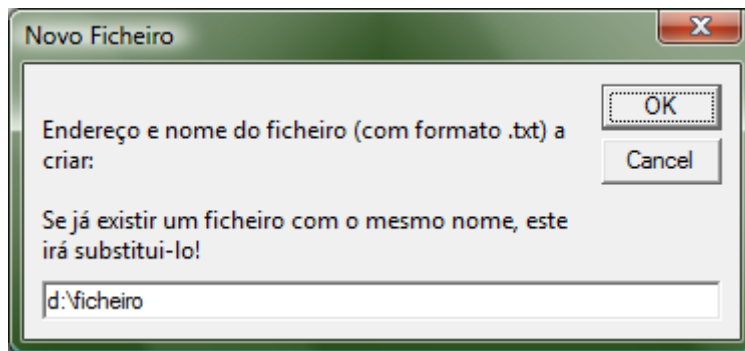


Figura 40: Guardar novo ficheiro para o problema exemplo

Assim, basta indicar o endereço e o nome do ficheiro e este é criado com a informação da janela anterior.

Terminado o processo, os pontos onde devem ser instalados os equipamentos continuam seleccionados, como demonstra a figura seguinte.

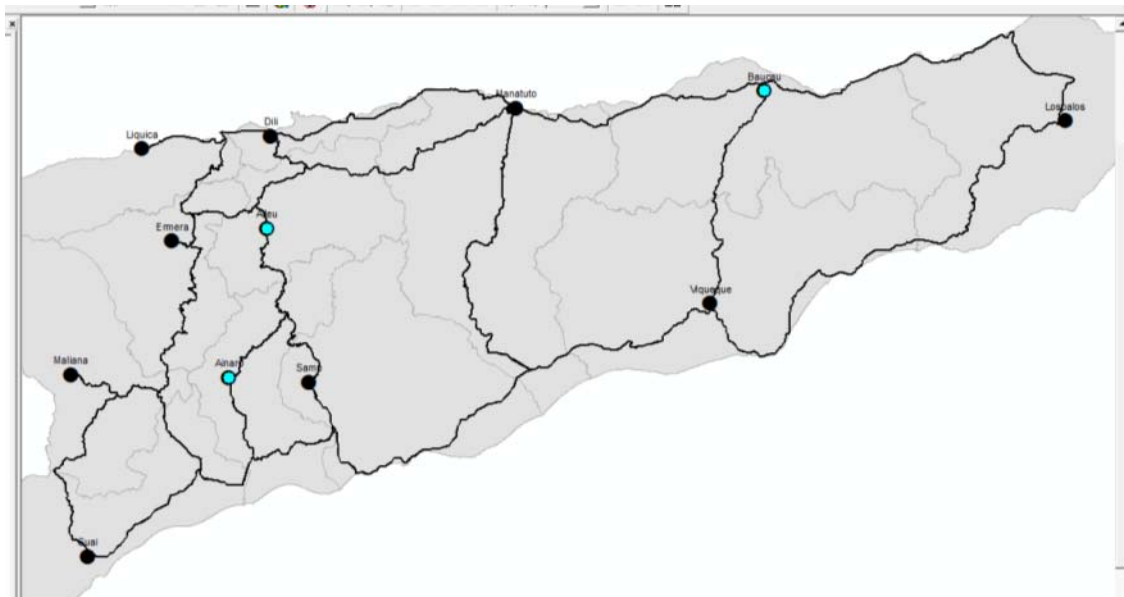


Figura 41: Representação da selecção de pontos para o problema exemplo

5 Conclusões e desenvolvimentos futuros

O crescimento e desenvolvimento de novas tecnologias tem gerado novas formas de planear e gerir o território. Problemas espaciais colocados ao nível do planeamento e gestão do território são muitas vezes resolvidos com recurso aos sistemas de informação geográfica. Um dos problemas espaciais é a optimização da selecção de locais potenciais para uma determinada actividade. A inexistência de soluções computacionais que permitam esta optimização de forma automática e directa num sistema de informação geográfica pode ser considerada uma lacuna ao nível do apoio à decisão. De modo a preencher esta falha entre os sistemas de informação geográfica e a problemática da localização de pontos, desenvolveu-se um módulo de resolução de problemas nesta área, integrado no *software* SIG ArcGIS™. Este módulo foi pensado para um utilizador que pode desconhecer o enquadramento teórico dos problemas de localização assim como as respectivas metodologias de resolução.

Os problemas de localização de pontos mais comuns são os de cobertura, nas suas formas de cobertura de conjuntos e máxima cobertura, de centragem, seja centragem absoluta ou em vértices, problemas de mediana e de custo fixo, seja capacitado ou não capacitado.

Após compreendidos os modelos formais destes problemas de localização de pontos, foram seleccionados os métodos algorítmicos para a sua resolução e que melhor se adaptariam a potenciais problemas. Deste modo, os métodos heurísticos construtivos *add* e *drop*, ou seja, optando pelo método da adição ou remoção de pontos, e os de substituição foram os utilizados no módulo. Este facto deveu-se essencialmente à sua simplicidade de resolução, o que permite obter rapidamente uma solução que, em geral, é de boa qualidade, mesmo para uma amostra considerável de pontos.

Complementarmente, alguns dos métodos algorítmicos heurísticos encontrados na literatura foram modificados e adaptados. A solução algorítmica designada como Máxima Cobertura com Percentagem é um exemplo, sendo a sua heurística original a denominada Máxima Cobertura com P Elementos. A simples modificação introduzida permite ao utilizador indicar a proporção de procura que pretende ver coberta ao invés de indicar o número de pontos que pretende instalar, possibilitando, desta forma, a implementação de um novo tipo de problema entre a cobertura de conjuntos e a máxima cobertura, visto que no primeiro caso o objectivo é cobrir a totalidade da procura com um número mínimo de pontos e o segundo caso tem como objectivo cobrir o máximo de procura com um número pré-definido de pontos. O algoritmo do problema de cobertura de conjuntos utilizado é uma adaptação dos dois anteriores, por ser mais simples que o proposto por Daskin (1995). Nos problemas de centragem não foram efectuadas modificações aos algoritmos originais. Contudo, para a resolução de problemas de mediana, houve uma agregação de dois algoritmos distintos, o *add* e o *drop*. Esta união de algoritmos permite uma melhoria na solução, pois é indicado como resultado final o que apresenta menor custo de entre as duas soluções calculadas. Os modelos apresentados para os problemas de custo fixo não apresentam alterações às versões originais encontradas na literatura consultada.

Apesar de já existir uma solução desenvolvida que integra os modelos de resolução de problemas de localização de pontos com os sistemas de informação geográfica, a LoLA, entende-se que não é uma solução prática visto ser apenas de fácil utilização para quem conhece bem os tipos de problemas existentes e as suas resoluções e estar, aparentemente, descontinuada.

A capacidade de o módulo desenvolvido poder guiar o utilizador não familiarizado com os problemas de localização de pontos ao modelo mais apropriado para o seu problema representa uma novidade neste tipo de soluções computacionais. Deste modo, qualquer utilizador que pretenda resolver um problema de localização com o apoio dos métodos de resolução implementados apenas tem de responder a um conjunto de questões que vão surgindo consoante a resposta anterior, tornando este módulo desenvolvido numa mais-valia na resolução de problemas de localização integrados num sistema de informação geográfica.

A incorporação de módulos de optimização com a capacidade de resolver problemas de localização em ambiente SIG mostrou ser benéfica por facilitar os utilizadores que já dispõem de uma base geográfica, e que com esta queiram determinar quais as melhores localizações no contexto do seu problema, e ainda os utilizadores que desconhecem a problemática da localização mas necessitam de tomar decisões que envolvem a optimização da localização de uma forma justificada. Tal acontece por possibilitar o teste de vários modelos para um mesmo problema, ou simplesmente por melhorar a solução apresentada com a capacidade de visualização que um SIG permite.

Com a elaboração desta dissertação foram atingidos os objectivos inicialmente propostos, como justificado acima. Contudo, foram ainda desenvolvidas capacidades que apesar de não incluídas nos objectivos se podem considerar importantes. A aprendizagem de uma linguagem de programação não conhecida *a priori* é um dos exemplos. Este facto aliado ao objectivo principal permitiu explorar um pouco os três níveis apresentados na figura seguinte.

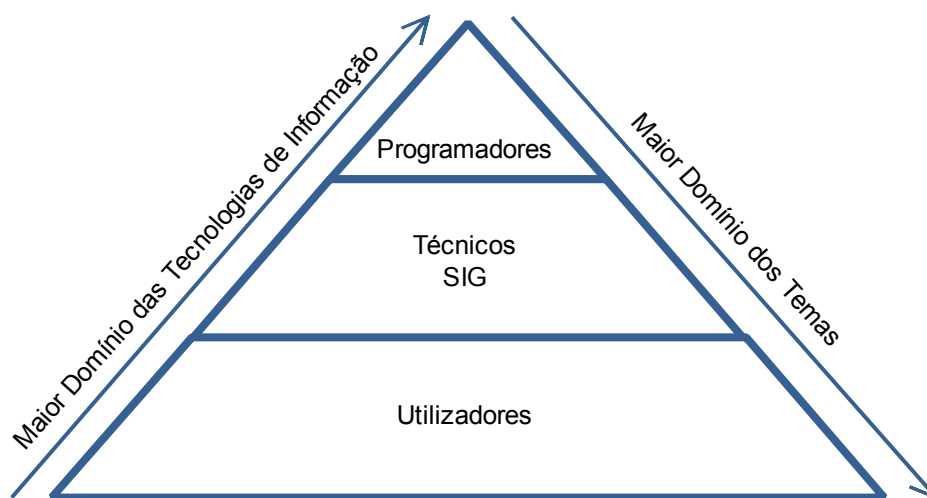


Figura 42: Domínio das novas tecnologias versus domínio dos temas
(Julião 2010)

Pode afirmar-se que ao longo do desenvolvimento da dissertação houve subidas ou descidas na pirâmide apresentada. No capítulo inicial era o domínio do tema que prevalecia, num contacto com o utilizador que conhece os problemas de localização e os seus modelos de resolução. Aquando do desenvolvimento do módulo, na fase de programação dos modelos de resolução em VBA, o domínio das tecnologias de informação era superior, entrando assim em contacto com o nível de programador. Para a fase de experimentação do módulo, a posição de técnico SIG foi a que melhor se identificou.

Durante a elaboração da dissertação foram surgindo novas ideias para complementar o trabalho desenvolvido nesta. Contudo, dadas as restrições de tempo não foi possível implementar todas. Assim, apresentam-se alguns desenvolvimentos futuros:

- *Alargar o leque de modelos de localização de pontos*
Apesar de cobertos os problemas de localização mais genéricos e comuns, seria interessante integrar uma maior variedade de modelos de localização, de carácter mais específico. Um exemplo seria o modelo proposto por Alexandris e Giannikos (2010), um novo modelo para os problemas de máxima cobertura para o qual os autores testaram a sua compatibilidade com os SIG e concluíram que a sua integração numa extensão/módulo seria interessante.
- *Melhorar a apresentação de resultados/soluções*
A ideia seria complementar a solução já apresentada no módulo com mais informação, seja por via de tabelas, estatísticas ou relatórios detalhados.
- *Migrar de uma solução VBA para uma solução VB (Visual Basic)*
Dar a possibilidade ao utilizador de utilizar o módulo como uma extensão para o SIG escolhido em vez de utilizar um projecto já existente. Esta solução teria, entre outras, vantagens a nível da migração dos dados, da harmonização com outras extensões e da integridade do código.
- *Testar a capacidade de fornecer soluções em problemas “reais”, e em função da dimensão poder escolher outros métodos de resolução*
Para problemas de elevadas dimensões os métodos de resolução mais adequados podem ser metaheurísticas, em vez das heurísticas apresentadas. Assim, permitiria a utilização de outras metodologias que explorassem o espaço de soluções de forma distinta da que foi desenvolvida na presente dissertação.

6 Bibliografia

- Abrantes, Patrícia e Estanqueiro, Rossana (2008) SIG, Análise Espacial e Ordenamento de Territórios Metropolitanos. *Sociedade e Território*, Novembro, pp. 114-124.
- Alexandris, George, e Giannikos, Ioannis (2010) A new model for maximal coverage exploiting GIS capabilities. *European Journal of Operational Research*, Vol. 202 (2), pp. 328-338.
- Campo, Luís de; Vilar, Sandro e Lúcio, Levi (1999) *Programação em Visual Basic 6*. FCA - Editora de Informática, Lda, Lisboa.
- Church, Richard L. (2002) Geographical information systems and location science. *Computers & Operations Research*, Vol. 29 (6), pp. 541-562.
- Daskin, Mark S. (1995) *Network and Discrete Location - Models, Algorithms, and Applications*. Wiley, New York.
- DGOTDU (2002) *Normas para a programação e caracterização de equipamentos colectivos*. Colecção Informação, Lisboa.
- Direcção Nacional de Estatística de Timor-Leste (2004) *The 2004 Population and Housing Census of Timor-Leste*. Timor-Leste. Informação disponibilizada em: <http://dne.mof.gov.tl/census/tables/index.htm>. Acesso em Maio de 2010.
- Drezner, Zvi e Hamacher, Horst W. (2002) *Facility Location - Application and Theory*. Springer, Berlim.
- ESRI®. 2009. *ESRI Business Analyst*. Redlands, California. Informação disponibilizada em: <http://www.esri.com/software/bao/index.html>. Acesso em Setembro de 2010.
- Gonçalves, Alexandre (2007) *Modelação Geográfica de Problemas de Localização*. Dissertação de Doutoramento em Engenharia do Território, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- Hamacher, Horst W. e Nickel, Stefan (1998) Classification of location models. *Location Science*. Vol. 6 (1-4), pp. 229-242.
- Instituto Nacional de Estatística (2002) *XIV Recenseamento Geral da População*. Lisboa. Informação disponibilizada em: <http://www.ine.pt/>. Acesso em Maio de 2010.
- Julião, Rui Pedro (2010) *Diapositivos do Curso de Verão: Planeamento e Gestão de Projectos S/G*. Faculdade de Ciências Sociais e Humanas da Universidade Nova de Lisboa
- Mendes, Armando (2005) *Modelação de Vendas de Novas Superfícies Comerciais*. Dissertação de Doutoramento em Engenharia de Sistemas, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.

Sridharan, R. (1995) The capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 87 (2), pp. 203–213

Valadares Tavares, L.; Oliveira, R. C.; Hall Themido, I. e Correia, F. N. (1996) *Investigação Operacional*. McGraw Hill, Lisboa