



**INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO**  
Universidade Técnica de Lisboa

# **Análise Numérica para as equações de Águas Rasas em duas camadas**

**Pedro Emanuel Silvério Gonçalves**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
**Matemática e Aplicações**

## **Júri**

Presidente: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Bela Cruzeiro  
Orientador: Prof. Dr. Juha Hans Videman  
Vogal: Prof. Dr. Carlos Alves

**Julho de 2010**



*“Truth is much too complicated to allow anything but approximations.”*  
*John von Neumann*

*“Problems worth attacking prove their worth by fighting back.”*  
*Paul Erdős*



# Agradecimentos

*Quae sunt Caesaris, Caesari.*

Não seria justo deixar de agradecer às pessoas que, directa ou indirectamente, tornaram possível a realização deste trabalho:

À FCT e ao CEMAT-IST, pela oportunidade que me proporcionaram ao me concederem uma das Bolsas de Integração à Investigação 2008.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Juha Videman, por todo o trabalho, paciência e compreensão que teve comigo e por todo o apoio que deu ao longo deste último ano e meio.

À minha família, por, na medida do possível, me terem apoiado e sustentado ao longo deste percurso.

A todos os meus amigos e “companheiros de armas” da LMAC e MMA do IST, por serem gente intrinsecamente decente e por criarem um ambiente onde eu me sinto em casa.

E, por fim mas não menos importante, a Liliana Cardoso. *Por tudo.*



# Resumo

As equações de águas rasas são usadas para modelar situações como interacções entre água salgada e fresca ou a infelizmente actual situação de contaminação da água por poluentes como petróleo.

Nesta tese vamos fazer uma pequena introdução a estas equações; vamos estudar a sua aproximação pelo método dos elementos finitos, usando técnicas como métodos de estabilização, semi-discretização espacial e o método de Galerkin descontínuo, para além do normal método de Galerkin; vamos deduzir estimativas para o erro *a priori* e vamos apresentar alguns resultados numéricos.

*Palavras-chave:* equações de águas rasas, método de Galerkin descontínuo, semi-discretização, métodos de estabilização, método dos elementos finitos





# Abstract

Shallow water equations are frequently used as a model to real life situations such as freshwater-saltwater interactions or the unfortunately recent topic of water contamination by pollutants such as oil.

In this thesis we will not only make a short introduction to these equations but also study their approximation by the finite element method, using ideas from stabilization methods, spacial semi-discretization and discontinuous Galerkin methods, as well as the standard Galerkin method. We will also derive *a priori* error estimates and present numerical results.

*Keywords:* shallow water equations, discontinuous Galerkin method, semi-discretization, stabilization methods, finite element method



# Notação usada

$\zeta_j$	espessura da camada $j$ de um fluido
$\mathbf{u}_j$	campo de velocidades horizontal na camada $j$ de um fluido
$p_j$	pressão na camada $j$ de um fluido
$\rho_j$	densidade da camada $j$ de um fluido
$\nu_j$	viscosidade cinemática da camada $j$ de um fluido
$g$	aceleração da gravidade
$g'$	gravidade reduzida na camada 2, dada por $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$
$\partial_t$	operador de derivação em $t$
$\partial_n$	operador de derivação normal
$\Omega$	um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira de Lipschitz
$\Omega_e$	um subconjunto de $\Omega$ ; geralmente um elemento finito
$\gamma_i$	a fronteira interior entre elementos
$\partial\Omega$	a fronteira de $\Omega$
$\partial\Omega_I$	um subconjunto de $\partial\Omega$ tal que $\partial\Omega_I = \{x \in \partial\Omega : u \cdot n < 0\}$
$\partial\Omega_O$	$\partial\Omega \setminus \partial\Omega_I$
$\mathbf{n}$	um vector unitário normal a uma dada região
$\mathbf{n}_e$	um vector unitário normal a $\Omega_e$
$\mathbf{n}_i$	um vector unitário normal a $\gamma_i$
$\sum_e$	soma sobre os elementos $\Omega_e$
$\sum_i$	soma sobre $\gamma_i$
$v^-$	$= \lim_{s \rightarrow 0^-} v(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$
$v^+$	$= \lim_{s \rightarrow 0^+} v(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$
$[v]$	$= v^- - v^+$
$\int_\Omega$	integração sobre a região $\Omega$
$(\cdot, \cdot)_R$	o produto interno $(\cdot, \cdot)_{L^2(R)}$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	integração sobre superfícies unidimensionais
$\ \cdot\ _R$	a norma $\ \cdot\ _{L^2(R)}$
$\ \cdot\ _{W(R)}$	a norma no espaço de Sobolev $W(R)$
$\ g\ _{L^\infty(0,T,X)}$	$= \max_{0 \leq t \leq T} \ g(\cdot, t)\ _X$
$\ g\ _{L^2(0,T,X)}^2$	$= \int_0^T \ g(\cdot, t)\ _X^2$
$\mathcal{P}^k(R)$	o espaço dos polinómios de grau $k$ definidos em $R$
$C^0(R)$	o espaço das funções contínuas em $R$
$\chi_A$	a função característica do conjunto $A$
$ A $	número de elementos do conjunto $A$



# Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Notação usada	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 As equações de Águas Rasas</b>	<b>3</b>
2.1 Equações da continuidade . . . . .	4
2.2 Equação do momento . . . . .	4
2.3 Acoplagem das equações . . . . .	5
<b>3 O método dos elementos finitos</b>	<b>7</b>
3.1 Formulação variacional . . . . .	7
3.1.1 Espaços $L^p$ . . . . .	9
3.1.2 Espaços de Sobolev . . . . .	9
3.2 Formulação discreta . . . . .	9
3.3 Aproximação por elementos finitos . . . . .	11
3.3.1 O operador de interpolação . . . . .	11
3.3.2 Erro de interpolação . . . . .	12
3.4 Problemas não estacionários . . . . .	12
3.4.1 Semi-discretização no espaço. . . . .	13
3.5 Método de Galerkin descontínuo . . . . .	13
3.6 Métodos de estabilização . . . . .	14
<b>4 Formulação fraca e discreta das EAR</b>	<b>17</b>
4.1 Formulação fraca EAR . . . . .	17
4.1.1 Estabilização . . . . .	18
4.2 Formulação Discreta . . . . .	18
4.2.1 Semi-discretização espacial . . . . .	19
<b>5 Estimativas de erro a priori</b>	<b>21</b>
5.1 Definições prévias . . . . .	21
5.2 Resultados prévios . . . . .	21

5.3	Estimativas de erro . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>35</b>
6.1	Implementação computacional . . . . .	35
6.2	Resultados gráficos . . . . .	36
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>39</b>
7.1	Conclusões finais . . . . .	39
7.2	Trabalho futuro . . . . .	39
<b>A</b>	<b>Código da implementação</b>	<b>41</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um antigo professor meu costumava dizer que o objectivo da Análise Numérica é o de encontrar “soluções razoáveis em tempo razoável”, e eu devo dizer que partilho da opinião.

Na maior parte das vezes que tentamos modelar situações da vida real é frequente depararmo-nos com uma equação diferencial, sobretudo quando pretendemos modelar fenómenos físicos. Se se tratar de uma equação diferencial ordinária, o tratamento do problema pode não se revelar demasiado complicado devido à extensa teoria existente para a resolução de EDOs; seja através da resolução de uma eventual versão linearizada das equações do sistema, do conhecimento de resultados qualitativos sobre as soluções dado (por exemplo) por retratos de fase ou mesmo pela aplicação de métodos numéricos ao problema. Se no entanto se tratar de uma equação diferencial parcial o caso torna-se um pouco mais complicado; não só as equações são muitas vezes difíceis de resolver como em muitos casos as soluções nem sequer são conhecidas (o exemplo mais famoso é talvez o das equações de Navier-Stokes, um dos Problemas do Milénio do Clay Institute, que oferece um milhão de dólares pela sua resolução). Torna-se então importante dispormos de ferramentas adequadas que nos permitam, pelo menos, obter uma solução aproximada mas de qualidade, idealmente de fácil obtenção (‘soluções razoáveis em tempo razoável’).

Um desses modelos de interesse, e que vamos considerar nesta tese, é o modelo das *equações de águas rasas*. Apesar de ser um modelo relativamente simples para o comportamento de escoamentos em águas pouco profundas, permite estudar (na forma multica-mada) os efeitos da estratificação, e é considerado um bom modelo para muitos fenómenos oceânicos e atmosféricos; por exemplo interacções água fresca/água salgada, dispersão de poluentes na água, etc.[Dawson e Proft, 2002] A existência de bons métodos para a resolução destas equações é de extrema importância para situações actuais como o recente derrame de petróleo na costa leste dos Estados Unidos.

Uma das melhores ferramentas disponíveis actualmente é o método dos elementos finitos. Este método, originário da engenharia aeronáutica e civil, consiste em encontrar uma versão mais fraca do problema original, a chamada *formulação variacional* que é depois aproximada num espaço de dimensão finita com uma base de funções  $\{\Psi_j\}$  adequada, intimamente ligada à discretização do domínio do problema. Este método está hoje em dia muito divulgado e é usado para a resolução de problemas em áreas como engenharia

civil, electromagnetismo e dinâmica de fluidos, parecendo portanto uma boa escolha para aproximar as nossas equações de águas rasas.

Esta tese está estruturada da seguinte forma:

- No capítulo 2 é dada uma breve introdução às equações de águas rasas em duas camadas, explicando brevemente os princípios físicos que lhes estão subjacentes, e apresentando uma dedução das equações a partir desses princípios;
- No capítulo 3 são abordadas as técnicas matemáticas a ser usadas no tratamento destas equações, como o método de Galerkin descontínuo, semi-discretização espacial e métodos de estabilização, que vão ser aplicadas nos capítulos seguintes;
- No capítulo 4 são deduzidas a formulação variacional e formulação discreta destas equações;
- No capítulo 5 são deduzidas estimativas de erro *a priori* para a aproximação de elementos finitos aplicada a estas equações;
- No capítulo 6 discute-se um pouco a implementação computacional deste problema e apresentam-se alguns resultados gráficos;
- No capítulo 7 faz-se um apanhado geral da tese e discutem-se possíveis caminhos para continuação futura deste trabalho;
- No Apêndice é apresentado o código para a implementação computacional do problema no software *Mathematica*.

Este trabalho surge na sequência das Bolsas de Integração à Investigação 2008 do CEMAT-IST e da FCT, desenvolvido sob orientação do Prof. Dr. Juha Videman.

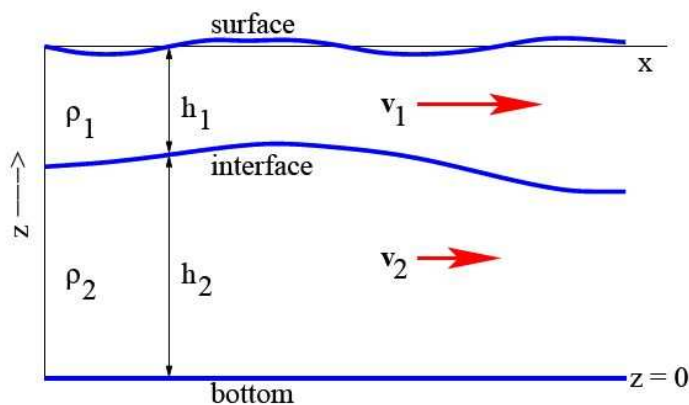


# Capítulo 2

## As equações de Águas Rasas

Em Geofísica, no estudo de fenómenos atmosféricos e oceânicos, é frequente surgirem situações nas quais o comprimento de onda de uma onda gravítica à superfície de um fluido é muito superior à espessura da camada de fluido considerada, fazendo com que a componente vertical da velocidade seja negligível face à componente horizontal.

Aqui vamos estar interessados num modelo semelhante mas em que consideramos duas camadas de fluido, de diferentes densidades, sobrepostas. Podíamos eventualmente considerar várias camadas de fluido sobrepostas, mas o modelo com duas camadas é não só um modelo relativamente simples da estratificação num fluido como é também um modelo de interesse no estudo de alguns fenómenos atmosféricos e oceânicos, como por exemplo a interacção entre água doce e água salgada no oceano [Dawson e Proft, 2002].



Ao deduzirmos estas equações, estamos implicitamente a fazer algumas assumções adicionais tais como:

1. O fluido é incompressível;
2. A camada inferior de fluido assenta numa superfície plana;
3. O atrito entre o fundo e o fluido e entre camadas de fluido é negligível;
4. Cada uma das camadas tem uma densidade constante mas diferente em cada camada;

5. O fluido encontra-se em equilíbrio hidrostático;
6. A aproximação de Boussinesq é válida, ou seja, podemos ignorar as variações de densidade em cada camada.

## 2.1 Equações da continuidade

Considerando que esse fluido se encontra em equilíbrio hidrostático, e que o movimento das partículas é independente da altura, podemos obter a equação da continuidade (para uma camada)

$$\partial_t \zeta_j + \nabla \cdot (\zeta_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (2.1)$$

na qual  $\zeta_j = \zeta_j(\mathbf{x}, t)$  representa a espessura dessa camada e  $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_{j,1}(\mathbf{x}, t), u_{j,2}(\mathbf{x}, t))$  a velocidade horizontal do fluido, a partir da equação da conservação da massa,

$$\frac{\partial u_{j,1}(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_{j,2}(\mathbf{x}, t)}{\partial y} + \frac{\partial u_{j,3}(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

integrando na componente vertical, obtendo (considerando sem perda de generalidade que a altura do fundo é 0)

$$u_{j,3}(\zeta_j, t) - u_{j,3}(0, t) = -\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

e substituindo a expressão referente à velocidade vertical pela condição cinemática na superfície livre e por 0 no fundo, vem então

$$\partial_t \zeta_j + \nabla \cdot (\zeta_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (2.4)$$

**Nota** Aqui, e no resto da tese, vamos considerar a camada de topo como a camada 1.

## 2.2 Equação do momento

A equação do momento pretende descrever a reacção do momento de um fluido a forças internas e/ou impostas ao fluido.

Para as equações do momento sobre as componentes horizontais, limitamo-nos a considerar a pressão na sua forma hidrostática na camada 1:

$$p_1 = g\rho_1(\zeta_1 + \zeta_2) \quad (2.5)$$

e na camada 2:

$$p_2 = g\rho_1\zeta_1 + g\rho_2\zeta_2 \quad (2.6)$$

na equação do momento

$$\partial_t \mathbf{u}_j + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla p_j + \nu_j \Delta \mathbf{u}_j \quad (2.7)$$

obtendo

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + g \nabla \zeta_1 &= -g \nabla \zeta_2 \\ \partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2 - \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 + (g + g') \nabla \zeta_2 &= -g \nabla \zeta_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.3 Acoplagem das equações

Finalmente, vamos proceder a última simplificação:

7. Os termos advectivos  $(\mathbf{u}_j \cdot \nabla)\mathbf{u}_j$  são de magnitude suficientemente baixa e portanto vamos ignorá-los.

Esta última assumption não é tão razoável como as anteriores. No entanto, vamos fazê-la por duas razões: um, podemos considerar que o escoamento do fluido é suficientemente lento e portanto a o termo de difusão domina sobre o termo de advecção e dois, para não dificultar o tratamento matemático das equações.

Assim sendo, conjugando este ponto 7. com o obtido nas duas secções anteriores, obtemos a versão (simplificada) das equações de Águas Rasas em duas camadas com que vamos trabalhar:

$$\begin{aligned}
 \partial_t \zeta_1 + \nabla \cdot (\zeta_1 \mathbf{u}_1) &= 0 \\
 \partial_t \mathbf{u}_1 - \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + g \nabla \zeta_1 &= -g \nabla \zeta_2 \\
 \partial_t \zeta_2 + \nabla \cdot (\zeta_2 \mathbf{u}_2) &= 0 \\
 \partial_t \mathbf{u}_2 - \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 + (g + g') \nabla \zeta_2 &= -g \nabla \zeta_1
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

(em que  $\nu_j$  é a viscosidade cinemática na camada  $j$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $g'$  é a gravidade reduzida na camada 2 (dada por  $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ ) e  $\rho_j$  é a densidade da camada  $j$ )

A acoplagem entre as duas equações é dada pelo termo de transporte  $\nabla \cdot (\zeta_j \mathbf{u}_j)$ , e as condições iniciais e de fronteira dadas por:

$$\begin{aligned}
 \zeta_j &= \hat{\zeta}_j && \text{em } \partial\Omega_I \\
 \zeta_j(\mathbf{x}, 0) &= \zeta_{0,j} && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u}_j &= \hat{\mathbf{u}}_j && \text{em } \partial\Omega \\
 \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_{0,j} && \text{em } \Omega
 \end{aligned}$$

em que  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  é um aberto com fronteira de Lipschitz,  $\partial\Omega$  a sua fronteira,  $\partial\Omega_I = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0\}$ , para um vector  $\mathbf{n}$  normal exterior a  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_O = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_I$  e funções  $\hat{\zeta}_j$ ,  $\zeta_{0,j}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_j$  e  $\mathbf{u}_{0,j}$  conhecidas à partida.



# Capítulo 3

## O método dos elementos finitos

Sendo as equações diferenciais parciais (EDPs) objectos matemáticos tão ubíquos (devido à sua utilização frequente em modelos das ciências naturais como física, química e biologia) e de difícil resolução (a menos de alguns casos particulares), é frequente o recurso a soluções aproximadas. Há, pois, que garantir não só a qualidade das aproximações usadas como também a sua manuseabilidade.

Uma aproximação frequentemente usada é o método dos elementos finitos. A ideia por trás do método é a seguinte:

- Transformar a equação diferencial numa formulação variacional que lhe corresponda.
- Discretização da formulação variacional, escolhendo um espaço de funções adequado (tipicamente funções seccionalmente polinomiais)
- Resolver a formulação discreta
- Implementar computacionalmente um método de resolução do problema.

Entre as vantagens deste método contam-se a possibilidade de resolver problemas em domínios bastante gerais e a não necessidade de uma solução exacta regular.

### 3.1 Formulação variacional

Dada uma equação diferencial parcial (EDP), o primeiro passo a dar é obter uma formulação variacional do problema. Vamos ilustrar o procedimento com o exemplo mais usado na literatura, a equação de Poisson; ao longo da tese teremos oportunidade de olhar para a formulação variacional de outros problemas com outras características.

#### **Exemplo** Equação de Poisson

Considere-se o problema de Dirichlet homogéneo:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{em } \Omega \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

Multiplicando formalmente a equação de ambos os lados por uma função  $v \in V(\Omega)$  (em que  $V(\Omega)$  é um espaço de funções com domínio em  $\Omega$ ) e integrando em  $\Omega$  (quando tal

fizer sentido, ou seja, admitindo existência dos integrais), obtemos uma *igualdade fraca* (que já explicaremos o que significa):

$$\int_{\Omega} -\Delta uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (3.2)$$

Recorrendo à fórmula de Green, podemos reescrever a equação (3.2) como:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \partial_n u = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (3.3)$$

em que  $\partial_n = \mathbf{n} \cdot \nabla$ , e  $\mathbf{n}$  é um vector normal externo a  $\partial\Omega$ .

Se agora as funções  $v \in V(\Omega)$  verificarem  $v = 0$  em  $\partial\Omega$ , podemos ainda reescrever (3.3) como

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (3.4)$$

Ao problema:

Encontrar  $u \in V(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (3.5)$$

chamamos a *formulação variacional* de problema de Dirichlet homogêneo (3.1).

Chamamos a (3.2) uma *igualdade fraca* no sentido em que soluções do problema original vão ser soluções do problema variacional mas geralmente o recíproco não é verdadeiro. Voltemos ao exemplo.

Uma escolha óbvia para o espaço seria por exemplo o espaço das funções  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  nulas em  $\partial\Omega$ . No entanto esse espaço não é um espaço de Hilbert para a norma usual. Se escolhermos por exemplo  $V(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ , que é um espaço de Hilbert (ver secção seguinte), poderíamos reescrever (3.5) na forma

Encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Omega} = (f, v)_{\Omega} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.6)$$

da qual veremos mais à frente a utilidade.

De um modo geral, a escolha do espaço  $V(\Omega)$  depende do problema em questão; geralmente vamos estar interessados em espaços de Hilbert chamados *espaços de Sobolev*, nos quais as derivadas existem não no sentido clássico mas no sentido das distribuições (veja-se por exemplo [Quarteroni e Valli, 1994]).

Antes de definirmos os espaços de Sobolev, vamos primeiro lembrar o que são os espaços  $L^p(\Omega)$ .

### 3.1.1 Espaços $L^p$

Os espaços  $L^p(\Omega)$  são os espaços de funções cuja  $p$ -ésima potência é integrável à Lebesgue em  $\Omega$ :

$$u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |u|^p < \infty \quad (3.7)$$

em que  $1 \leq p < \infty$ . Estes espaços são de Banach; estão munidos de uma norma  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} |u|^p)^{1/p}$  (a menos de classes de equivalência para a função  $u$ ). Para  $p = 2$ , a norma provém do produto interno  $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv$ , pelo que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert.

Definimos ainda o espaço de Banach  $L^\infty(\Omega)$  como o espaço de funções essencialmente limitadas, com a norma  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{ess\,x \in \Omega} |u(x)|$ .

### 3.1.2 Espaços de Sobolev

Podemos agora definir o espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  à custa do correspondente espaço  $L^p(\Omega)$  como sendo:

$$u \in W^{m,p}(\Omega) \Leftrightarrow u \in L^p(\Omega) \wedge D^1 u \in L^p(\Omega) \wedge \dots \wedge D^m u \in L^p(\Omega) \quad (3.8)$$

em que  $D^k u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ , para  $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$  com  $\alpha_i$  inteiros não negativos,  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$  e  $1 \leq p < \infty$ . Estes espaços são de Banach; estão dotados da norma  $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}$ . Similarmente, temos ainda o espaço de Banach  $W^{m,\infty}(\Omega)$ , completo para a norma  $\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Podemos definir em  $W^{m,p}(\Omega)$  uma *semi-norma*  $|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{1/p}$ . Analogamente em  $W^{m,\infty}(\Omega)$ , temos  $|u|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$ .

Para  $p = 2$ , costuma-se escrever simplesmente  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ . Este espaço é um espaço de Hilbert com o respectivo produto interno  $(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$ .

Um espaço regularmente usado é também  $H_0^1(\Omega)$  (veja-se o exemplo da secção anterior). Define-se como  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ , equipado com a mesma norma de  $H^1(\Omega)$ .

**Nota** A igualdade  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  deve ser interpretada em termo de *traço* da função na fronteira e não como uma igualdade pontual.

## 3.2 Formulação discreta

Escolhido o espaço de funções  $V(\Omega)$  adequado, levanta-se a questão: como resolver então a formulação variacional do problema?

Sendo  $V(\Omega)$  geralmente um espaço de funções de dimensão infinita, não é exequível a resolução directa da formulação variacional de um problema pois há demasiadas funções

teste a considerar! A solução é então considerar um espaço  $V_h(\Omega) \subseteq V(\Omega)$ , de dimensão finita.

Agora, como  $V_h(\Omega)$  é um espaço de dimensão finita, tem uma base de funções  $\{\Psi_j\}$  finita. Para  $v_h \in V_h(\Omega)$  qualquer, podemos então escrever

$$v_h = \sum_j v_j^h(t) \Psi_j(x, t) \quad (3.9)$$

**Nota** Em (3.9) estamos a considerar o caso mais geral, em que os coeficientes  $v_j^h$  dependem de  $t$  e as funções base  $\Psi_j$  dependem de  $x$  e  $t$ . Caso se trate de uma EDP estacionária (isto é, não depende do tempo  $t$ ), obviamente que nem os coeficientes nem as funções base vão depender de  $t$ , como é o caso de um dos exemplo que veremos a seguir, o da equação de Poisson. Falarei mais em pormenor do caso em que a EDP é não estacionária daqui a pouco.

Vamos voltar ao exemplo anterior, da equação de Poisson.

#### Exemplo Equação de Poisson

Como se trata de um problema estacionário, podemos escrever a aproximação de  $u$  em  $V_h(\Omega)$ ,  $u_h$ , como

$$u_h = \sum_j u_j^h \Psi_j(x) \quad (3.10)$$

e o problema (3.6) torna-se então:

Encontrar coeficientes  $u_j^h$  tais que:

$$\sum_j u_j^h (\nabla \Psi_j, \nabla v_h)_\Omega = (f, v_h)_\Omega \quad \forall v \in V_h(\Omega) \quad (3.11)$$

Devido à linearidade de  $(\cdot, \cdot)_\Omega$ , e ao facto de  $v_h = \sum_j v_j^h \Psi_j(x)$ , podemos reescrever (3.11) como:

Encontrar coeficientes  $u_j^h$  tais que:

$$\sum_j u_j^h (\nabla \Psi_j, \nabla \Psi_k)_\Omega = (f, \Psi_k)_\Omega \quad \forall v \in V_h(\Omega) \quad (3.12)$$

para  $1 \leq k \leq |\{\Psi_j\}|$ .

O problema resume-se então a resolver o sistema linear (3.12) e encontrar os coeficientes  $u_j^h$ , obtendo então a aproximação  $u_h = \sum_j u_j^h \Psi_j(x)$ . É chamada a *formulação discreta do problema variacional* ou apenas *formulação discreta*.

A dificuldade está agora em escolher um espaço  $V_h$  adequado às características do problema com uma base  $\{\Psi_j\}$  “simpática”, isto é, que facilite os cálculos a fazer na resolução da formulação discreta. É aqui que reside o cerne da aproximação por elementos finitos.



### 3.3 Aproximação por elementos finitos

Vamos começar por dizer formalmente o que é um elemento finito.

**Definição 3.3.1** *Suponhamos que  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  é um domínio poligonal, e seja  $\{\Omega_e\}$  uma família de abertos tais que:*

1.  $\text{int}\Omega_e \neq \emptyset$
2. A intersecção de  $\Omega_i, \Omega_j \in \{\Omega_e\}$  com  $i \neq j$  só pode ser:
  - Vazia
  - Uma hipersuperfície de dimensão no máximo  $n - 1$  comum aos dois elementos
3.  $\bigcup_e \overline{\Omega_e} = \overline{\Omega}$ .

e sejam ainda  $h = \max_{\Omega_e} h_{\Omega_e} = \max_{x,y \in \Omega_e} d(x,y)$ , sendo  $d(\cdot, \cdot)$  a distância euclideana em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{P}_{\Omega_e}$  um espaço de dimensão finita de funções em  $\Omega_e$  (as funções de forma) e  $\mathcal{N}_{\Omega_e}$  uma base para o espaço dual de  $\mathcal{P}_{\Omega_e}$  (as variáveis nodais).

Então, o triplo  $(\Omega_e, \mathcal{P}_{\Omega_e}, \mathcal{N}_{\Omega_e})$  diz-se um elemento finito e  $\mathcal{T}_h = \bigcup_{\Omega_e} (\Omega_e, \mathcal{P}_{\Omega_e}, \mathcal{N}_{\Omega_e})$  diz-se uma triangulação.

Não vamos aqui entrar em detalhes sobre as escolhas dos conjuntos  $\Omega_e, \mathcal{P}_{\Omega_e}$  e  $\mathcal{N}_{\Omega_e}$  pois isso foge um pouco ao âmbito desta tese; explicações detalhadas sobre as construções mais comuns podem ser encontradas em [Alves, 2000], [Johnson, 1987] ou [Brenner e Scott, 1994]. No entanto, é de referir que as funções base  $\{\Psi_j\}$  podem ser obtidas agora a partir das funções forma  $\{\nu_i\}$ ; para um exemplo, veja-se [Alves, 2000].

#### 3.3.1 O operador de interpolação

Dado um elemento finito  $(\Omega_e, \mathcal{P}_{\Omega_e}, \mathcal{N}_{\Omega_e})$  podemos definir um operador de projecção  $\Pi_{\Omega_e}$  chamado *operador de interpolação local* e definido como:

$$\Pi_{\Omega_e}(u) = \sum_i \nu_i(u) \phi_i \quad (3.13)$$

para  $\nu_i \in \mathcal{N}_{\Omega_e}, \phi_i \in \mathcal{P}_{\Omega_e}$  e  $i = |\mathcal{N}_{\Omega_e}| = |\mathcal{P}_{\Omega_e}|$ .

Com base em (3.13), podemos definir ainda um outro operador  $\Pi_{\Omega}$  chamado *operador de interpolação global* como:

$$(\Pi_{\Omega}(u))|_{\Omega_e} = \Pi_{\Omega_e}(u) \quad (3.14)$$

Apresentamos em seguida alguns resultados sobre  $\Pi_{\Omega}$ .

### 3.3.2 Erro de interpolação

O erro de interpolação sobre a função  $u$  é dado por  $u - \Pi_{\Omega}u$ . Na análise de erro de uma aproximação por elementos finitos, é útil ter alguns resultados sobre o erro de interpolação.

Seja  $\rho_{\Omega_e}$  o raio da maior bola contida em  $\Omega_e$ . Uma triangulação  $\mathcal{T}_h$  diz-se não degenerada se cada elemento  $\Omega_e$  da triangulação verificar

$$\frac{\rho_{\Omega_e}}{h_{\Omega_e}} \geq \beta \quad (3.15)$$

com  $\beta$  uma constante positiva e independente de  $h$ .

Para triangulações a verificar (3.15), temos os seguintes resultados para o erro de interpolação usando polinómios de grau  $r \geq 1$  (cf. [Johnson, 1987]):

$$\|u - \Pi_{\Omega}u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{r+1}|u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad (3.16)$$

$$|u - \Pi_{\Omega}u|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^r|u|_{H^{r+1}(\Omega)} \quad (3.17)$$

No caso de  $u$  não ser suficientemente regular para verificar as equações anteriores, temos (para  $1 \leq s \leq r + 1$ ) as seguintes estimativas:

$$\|u - \Pi_{\Omega}u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s|u|_{H^s(\Omega)} \quad (3.18)$$

$$|u - \Pi_{\Omega}u|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{s-1}|u|_{H^s(\Omega)} \quad (3.19)$$

Estes resultados serão importantes para a estimativa de erro que vamos deduzir no capítulo 4.

## 3.4 Problemas não estacionários

Vejam agora as particularidades de considerar problemas não estacionários, i.e., problemas que dependem do tempo  $t$ .

### Exemplo Equação do calor

Considere-se a seguinte versão simplificada da equação do calor:

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{em } \Omega \times I \quad (3.20)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \times I \quad (3.21)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.22)$$

De uma forma análoga ao exemplo da equação de Poisson (escolhendo  $V(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ , multiplicando a 1ª equação de (3.20) para  $t$  fixo por  $v \in V(\Omega)$ , integrando por partes em  $\Omega$  e recorrendo à fórmula de Green), obtemos a formulação variacional para (3.20):

Encontrar  $u(t) \in V(\Omega)$ ,  $t \in I$ , tal que

$$(\partial_t u(t), v)_{\Omega} + (\nabla u(t), \nabla v)_{\Omega} = (f(t), v)_{\Omega} \quad \forall v \in V(\Omega) \quad (3.23)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.24)$$

Dentro da moldura do método dos elementos finitos há agora várias maneiras de tratar problemas não estacionários; veja-se, por exemplo, [Johnson, 1987], [Thomee, 1997] ou [Quarteroni e Valli, 1994]. Nesta tese vamos usar um dos métodos mais usados, chamado *semi-discretização*.

### 3.4.1 Semi-discretização no espaço.

A ideia passa por efectuar a aproximação por elementos finitos *apenas na componente espacial*  $x$ , mantendo a dependência temporal do problema; obtemos então um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Voltando ao nosso exemplo da equação do calor:

**Exemplo** Equação do calor

Na aproximação (3.9) vamos considerar que as funções base  $\{\Psi_j\}$  dependem apenas da componente espacial  $x$  *mas que os coeficiente vão depender do tempo*  $t$ , podendo então escrever

$$u_h = \sum_j u_j^h(t) \Psi_j(x) \quad (3.25)$$

Em vez de (3.23), o nosso problema passa a ser (e por analogia com (3.11) e (3.12)): Encontrar as funções  $u_j^h(t)$ ,  $t \in I$ , que são soluções do sistema de EDOs

$$\sum_j \partial_t u_j^h(t) (\Psi_j, \Psi_k)_\Omega + \sum_j u_j^h(t) (\nabla \Psi_j, \nabla \Psi_k)_\Omega = (f(t), \Psi_k)_\Omega \quad (3.26)$$

$$\sum_j u_j^h(0) (\Psi_j, \Psi_k)_\Omega = (u_0, \Psi_k)_\Omega \quad (3.27)$$

para  $1 \leq k \leq |\{\Psi_j\}|$ .

A (3.26) pode agora ser aplicado algum método para resolução numérica de equações diferenciais ordinárias como Euler ou Runge-Kutta; esta é talvez a grande vantagem desta via de resolução para um problema não estacionário.

## 3.5 Método de Galerkin descontínuo

Ao invés de requerer funções de teste contínuas, podemos estar interessados em trabalhar com funções teste potencialmente descontínuas de elemento para elemento. Por exemplo, existem problemas nos quais uma forte componente advectiva faz com que a verdadeira solução desses problema exiba discontinuidades em tempo finito.

**Exemplo** Equação de transporte

Considere-se a seguinte versão simplificada da equação de transporte de neutrões:

$$u + \nabla \cdot (\mathbf{a}u) = f \quad \text{em } \Omega \quad (3.28)$$

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega_I \quad (3.29)$$

em que  $\mathbf{a}$  é um vector constante.

Multiplicando agora a 1ª equação por uma função  $v \in H^1(\Omega_e)$  e integrando por partes, obtemos:

$$(u, v)_{\Omega_e} - (u, \mathbf{a} \cdot \nabla v)_{\Omega_e} + \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_e u, v \rangle_{\partial\Omega_e} = (f, v)_{\Omega_e} \quad \forall v \in H^1(\Omega_e) \quad (3.30)$$

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega_I \quad (3.31)$$

em que  $\mathbf{n}_e$  é um vector normal exterior à fronteira  $\partial\Omega_e$ .

Seja agora  $\mathbf{n}_i$  um vector normal a uma aresta interior  $\gamma_i$ . Dada uma função  $v_j \in H^1(\Omega_e)$ , o seu traço nas arestas interiores é dado por  $v_j^-(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^-} v_j(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$  e  $v_j^+(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} v_j(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$ , para  $\mathbf{x} \in \gamma_i$ . Definimos ainda o salto de  $v_j$  como  $[v_j] = v_j^- - v_j^+$ .

Precisamos ainda de encontrar um espaço  $V_h(\Omega)$  adequado às especificidades do problema. Esse espaço vai ser o espaço  $\mathcal{S}^k(\Omega)$  das funções polinomiais em cada elemento mas não necessariamente contínuas de elemento para elemento, definido como  $\mathcal{S}^k(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}^k(\Omega_e)\}$ . Assim, escolhendo  $V_h(\Omega) = \mathcal{S}^k(\Omega)$ , obtemos então a formulação discreta:

Encontrar  $u_h \in \mathcal{S}^k(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} \sum_e (u_h, v_h)_{\Omega_e} - \sum_e (u_h, \mathbf{a} \cdot \nabla v_h)_{\Omega_e} + \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_e u_h, v_h \rangle_{\partial\Omega_O} + \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_e u_h, [v_h] \rangle_{\gamma_i} = \\ \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_e g, v_h \rangle_{\partial\Omega_I} + (f, v_h)_{\Omega_e} \quad \forall v \in \mathcal{S}^k(\Omega) \end{aligned}$$

Repare-se agora na grande vantagem do método: a solução  $u_h$  pode ser calculada *elemento a elemento*, ordenando os elementos começando em  $\partial\Omega_I$ , pois para cada elemento o valor da função  $u_h$  na fronteira de *inflow*  $\partial\Omega_{e,I}$ , definida de forma análoga a  $\partial\Omega_I$ , é conhecido a partir do(s) elemento(s) anteriores!

Para outras vantagens do método, veja-se por exemplo [Cockburn et al., 2000].

### 3.6 Métodos de estabilização

Os métodos de estabilização para problemas de elementos finitos consistem em adicionar à formulação discreta do problema em questão termos extra que garantam consistência e estabilidade numérica.

**Exemplo** Modelo de advecção/difusão

Considere-se o seguinte problema de advecção/difusão:

$$-k\Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u = f \quad \text{em } \Omega \quad (3.32)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.33)$$

em que  $k$  é um parâmetro do problema, cuja formulação variacional é dada por:

Encontrar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$k(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.34)$$

Ora, como se pode ver em [Franca et al., 2003], acontece que para valores pequenos de  $k$ , mesmo pequenas variações em  $f$  podem levar a grandes variações em  $u$ . Uma possível maneira de contornar o problema é então juntar um termo  $S(u_h, v_h)$  à formulação discreta do problema:

Encontrar  $u_h \in V_h(\Omega)$  tal que:

$$k(\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h, v_h)_\Omega + S(u_h, v_h) = (f, v_h)_\Omega \quad \forall v_h \in V_h(\Omega) \quad (3.35)$$

Segundo [Franca et al., 2003], as escolhas mais comuns para  $S(u_h, v_h)$  são:

1.  $S(u_h, v_h) = \sum_{\Omega_e} \tau_{\Omega_e} (-k\Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v_h)_{\Omega_e}$
2.  $S(u_h, v_h) = \sum_{\Omega_e} \tau_{\Omega_e} (-k\Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v_h - k\Delta v_h)_{\Omega_e}$
3.  $S(u_h, v_h) = \sum_{\Omega_e} \tau_{\Omega_e} (-k\Delta u_h + \mathbf{a} \cdot \nabla u_h - f, \mathbf{a} \cdot \nabla v_h + k\Delta v_h)_{\Omega_e}$

sendo que 1. corresponde a um método SUPG, 2. a um método Galerkin/Least Squares e 3. ao método USFEM. Todos estes métodos são consistentes, para uma boa escolha do parâmetro  $\tau_{\Omega_e}$  (ver mais uma vez [Franca et al., 2003] e as referências aí contidas).

Mais à frente vamos ver como o uso de um termo de estabilização na formulação discreta das EAR nos vai permitir deduzir uma estimativa de erro de boa qualidade.



# Capítulo 4

## Formulação fraca e discreta das EAR

Considerem-se então as equações de Águas Rasas em duas camadas que obtivemos no capítulo 1:

$$\begin{aligned}\partial_t \zeta_1 + \nabla \cdot (\zeta_1 \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_1 - \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + g \nabla \zeta_1 &= -g \nabla \zeta_2 \\ \partial_t \zeta_2 + \nabla \cdot (\zeta_2 \mathbf{u}_2) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_2 - \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 + (g + g') \nabla \zeta_2 &= -g \nabla \zeta_1\end{aligned}$$

com as condições e iniciais e de fronteira dadas por:

$$\begin{aligned}\zeta_j &= \hat{\zeta}_j && \text{em } \partial\Omega_I \\ \zeta_j(\mathbf{x}, 0) &= \zeta_{0,j} && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}_j &= \hat{\mathbf{u}}_j && \text{em } \partial\Omega \\ \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_{0,j} && \text{em } \Omega\end{aligned}$$

Vamos começar por reescrever o problema na sua formulação fraca.

### 4.1 Formulação fraca EAR

Comece-se por multiplicar, formalmente, as equações da continuidade por uma função teste  $v_j \in H^1(\Omega_e)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . Integrando por partes em cada  $\Omega_e$ , obtemos:

$$(\partial_t \zeta_1, v_1)_{\Omega_e} - (\mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e, v_1 \rangle_{\partial\Omega_e} = 0 \quad (4.1)$$

$$(\partial_t \zeta_2, v_2)_{\Omega_e} - (\mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_e, v_2 \rangle_{\partial\Omega_e} = 0 \quad (4.2)$$

Multiplicando formalmente as equações do momento por uma função teste  $\mathbf{w}_j \in H_0^1(\Omega)$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , e integrando por partes em  $\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned}(\partial_t \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + (g \nabla \zeta_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + (\nu_1 \nabla \mathbf{u}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} &= -(g \nabla \zeta_2, \mathbf{w}_1)_{\Omega} \\ (\partial_t \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + ((g + g') \nabla \zeta_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + (\nu_2 \nabla \mathbf{u}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} &= -(g \nabla \zeta_1, \mathbf{w}_2)_{\Omega}\end{aligned}$$

### 4.1.1 Estabilização

Ao escolher funções  $\zeta_j \in H^1(\Omega)$  não garante que elas sejam contínuas de elemento para elemento  $\Omega_e$ . É útil então juntar ao método termos de estabilização que ajudem a melhorar os resultados numéricos e as estimativas de erro.

Vamos então adicionar o termo de estabilização  $-\sum_i g\langle[\zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} - \sum_i g\langle[\zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i}$  e o termo  $-\sum_i g\langle[\zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} - \sum_i (g+g')\langle[\zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i}$  às respectivas equações do momento. Note-se que, como a função  $\zeta_j$  do problema original é suposta contínua, estes termos são na verdade nulos.

Somando as equações (4.1), a formulação fraca do problema é, então, a seguinte:

Encontrar  $(\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in (H^1(\Omega), H^1(\Omega), H^1(\Omega)H^1(\Omega))$  tais que

$$\begin{aligned} \sum_e (\partial_t \zeta_1, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} + \langle \zeta_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_O} = \\ \langle \hat{\zeta}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_I}, \quad \forall v_1 \in H^1(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \nu_1(\nabla \mathbf{u}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} - \sum_i g\langle[\zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} - \\ \sum_i g\langle[\zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} = -g(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_1)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{w}_1 \in H_0^1(\Omega) \\ \sum_e (\partial_t \zeta_2, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} + \langle \zeta_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_O} = \\ \langle \hat{\zeta}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_I}, \quad \forall v_2 \in H^1(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + (g+g')(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + \nu_2(\nabla \mathbf{u}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} - \sum_i g\langle[\zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} - \\ \sum_i (g+g')\langle[\zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i\rangle_{\gamma_i} = -g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_2)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{w}_2 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Repare-se que, se a função  $\zeta_j$  do problema original for contínua, os termos  $\sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i}$  e  $\sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i}$  são nulos.

## 4.2 Formulação Discreta

Começemos por apresentar os espaços em que vamos trabalhar: seja  $\mathcal{S}^k(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}^k(\Omega_e)\}$  o espaço em que vamos aproximar  $\zeta_j$ , em que  $\mathcal{P}^k(\Omega_e)$  é o espaço das funções polinomiais de grau  $k$  em  $\Omega_e$ ;  $W_h^1(\Omega) \subseteq (H^1(\Omega))^2 \cap \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_1\}$  o espaço em que aproximamos  $\mathbf{u}_1$  e  $W_h^2(\Omega) \subseteq (H^1(\Omega))^2 \cap \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_2\}$  o espaço em que aproximamos  $\mathbf{u}_2$ . Sejam ainda  $W_{0,h}^j(\Omega)$  os correspondentes subespaços de  $(H_0^1(\Omega))^2$ . Definimos ainda  $V_h^c(\Omega) = \mathcal{S}^k(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ .

Vamos então aproximar, para  $t$  fixo,  $\zeta_j(\cdot, t)$  por  $Z_j(\cdot, t) \in \mathcal{S}^k(\Omega)$  e  $\mathbf{u}_j(\cdot, t)$  por  $\mathbf{U}_j(\cdot, t) \in W_h^j(\Omega)$ . Temos em atenção que o valor de  $\zeta_j$  nas fronteiras entre elementos  $\gamma_i$  deve ser aproximado pelo seu *upwind value*  $Z_j^\uparrow$ :

$$\zeta_j \approx Z_j^\uparrow = \begin{cases} Z_j^- & \text{se } \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i > 0 \text{ em } \gamma_i \\ Z_j^+ & \text{se } \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \text{ em } \gamma_i \end{cases}$$



Para  $t = 0$  definimos  $Z_j(\cdot, 0) = Z_{0,j} \in \mathcal{S}^k(\Omega)$  e  $\mathbf{U}_j(\cdot, 0) = \mathbf{U}_{0,j} \in W_h^j(\Omega)$  por

$$\begin{aligned} (Z_{0,j} - \zeta_{0,j}, v_j)_\Omega &= 0 \quad \forall v \in \mathcal{S}^k(\Omega)(\Omega) \\ (\mathbf{U}_{0,j} - \mathbf{u}_{0,j}, \mathbf{w}_j)_\Omega &= 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W_{0,h}(\Omega) \end{aligned}$$

A formulação discreta para as EAR é então a seguinte: para cada  $t > 0$ , encontrar  $(Z_1, Z_2, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \in (\mathcal{S}^k(\Omega), \mathcal{S}^k(\Omega), W_h^1(\Omega), W_h^2(\Omega))$  tais que:

$$\begin{aligned} \sum_e (\partial_t Z_1, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{U}_1 Z_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_1^\uparrow \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} + \langle Z_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_O} = \\ - \langle \hat{\zeta}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_I} \quad \forall v_1 \in \mathcal{S}^k(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{U}_1, \mathbf{w}_1)_\Omega + \sum_e g(\nabla Z_1, \mathbf{w}_1)_\Omega + \nu_1(\nabla \mathbf{U}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_\Omega - \sum_i g\langle [Z_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \\ \sum_i g\langle [Z_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = -g(\nabla Z_2, \mathbf{w}_1)_\Omega, \quad \forall \mathbf{w}_1 \in W_h^1(\Omega) \\ \sum_e (\partial_t Z_2, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{U}_2 Z_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_2^\uparrow \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} + \langle Z_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_O} = \\ - \langle \hat{\zeta}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_I} \quad \forall v_2 \in \mathcal{S}^k(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{U}_2, \mathbf{w}_2)_\Omega + \sum_e (g + g')(\nabla Z_2, \mathbf{w}_2)_\Omega + \nu_2(\nabla \mathbf{U}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_\Omega - \sum_i g\langle [Z_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \\ \sum_i (g + g')\langle [Z_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = -g(\nabla Z_1, \mathbf{w}_2)_\Omega, \quad \forall \mathbf{w}_2 \in W_h^2(\Omega) \end{aligned}$$

### 4.2.1 Semi-discretização espacial

Uma vez que as funções  $\mathbf{U}_j$  e  $Z_j$  dependem de uma variável espacial  $\mathbf{x}$  e de uma variável temporal  $t$ , põe-se a questão de como enquadrar esta situação no contexto da aproximação por elementos finitos. Estão propostos vários métodos na literatura ([Johnson, 1987], [Thomee, 1997]); nesta situação, usamos uma semi-discretização espacial das funções  $\mathbf{U}_j$  e  $Z_j$ , isto é, consideramos coeficientes variáveis no tempo para a sua representação por elementos finitos:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z \\ Z_2 &= \sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z \\ \mathbf{U}_1 &= \sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U \\ \mathbf{U}_2 &= \sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U \end{aligned}$$

para funções base  $\Psi_{i_Z}^Z$  e  $\Psi_{i_U}^U = (\Psi_{i_U,1}^U, \Psi_{i_U,2}^U)$  adequadas ao problema. Assim, ao substituir as funções  $\mathbf{U}_j$  e  $Z_j$  por esta sua aproximação na formulação variacional discreta, obtemos um sistema de EDOs no qual as incógnitas são os coeficientes  $z_{i_Z,1}(t)$ ,  $z_{i_Z,2}(t)$ ,  $u_{i_U,1}(t)$  e  $u_{i_U,2}(t)$  da aproximação por elementos finitos.



# Capítulo 5

## Estimativas de erro a priori

Antes de deduzirmos uma estimativa de erro, temos primeiro de estabelecer algumas definições e referir alguns resultados auxiliares.

### 5.1 Definições prévias

Seja (para  $t$  fixo)  $\zeta_{I_j}(\cdot, t) \in V_h^c(\Omega)$  o interpolante contínuo de  $\zeta_j$ . Considere-se também a *projecção parabólica*  $\Pi \mathbf{u}_j(\cdot, t) \in W_h^j(\Omega)$  que verifica

$$(\partial_t(\Pi \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j), \mathbf{w}_j)_\Omega + (\nu_j \nabla(\Pi \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j), \nabla \mathbf{w}_j)_\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}_j \in W_{0,h}(\Omega) \quad (5.1)$$

com  $\Pi \mathbf{u}_j(\cdot, 0)$  dada por:

$$(\Pi \mathbf{u}_j(\cdot, 0) - \mathbf{u}_{0,j}, \mathbf{w}_j)_\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w}_j \in W_{0,h}^j(\Omega) \quad (5.2)$$

.

Vamos ainda precisar de definir os seguintes termos:

$$\begin{aligned} e_{\zeta_j} &= Z_j - \zeta_{I_j} \\ \theta_{\zeta_j} &= \zeta_j - \zeta_{I_j} \\ e_{\zeta_j}^\uparrow &= Z_j^\uparrow - \zeta_{I_j} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j} &= \mathbf{U}_j - \Pi \mathbf{u}_j \\ \theta_{\mathbf{u}_j} &= \mathbf{u}_j - \Pi \mathbf{u}_j \end{aligned}$$

### 5.2 Resultados prévios

Vamos agora referir alguns resultados prévios que vão ser necessários na análise do erro.

Começamos por assumir uma certa regularidade das soluções, o que vai implicar que

as seguintes constantes são finitas:

$$\begin{aligned} K_{\zeta_j} &= \int_0^T \|\partial_t \zeta_j\|_{H^k(\Omega)}^2 + \|\zeta_j\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 dt + \|\zeta_{0,j}\|_{H^k(\Omega)}^2 \\ K_{\mathbf{u}_j} &= \int_0^T \|\mathbf{u}_j\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2 dt \\ K_{\mathbf{u}_j}^* &= \|\mathbf{u}_j\|_{L^\infty(0,T,W^1,\infty)} \\ K_{\zeta_j}^* &= \|\zeta_{I_j}\|_{L^\infty(0,T,W^1,\infty)} \end{aligned}$$

Adicionalmente, vamos assumir que existem constantes  $K_{Z_j}^* \geq 2K_{\zeta_j}^*$ , independentes de  $h$ , tais que

$$\|Z_j\|_{L^\infty(0,T,L^\infty(\Omega))} \leq K_{Z_j}^* \quad (5.3)$$

Podemos agora, com base nos resultados obtidos na secção sobre os erros de interpolação, obter o seguinte ([Dawson e Proft, 2002]):

$$\int_0^T \|\partial_t \theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 + \|\theta_{\zeta_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \|\theta_{\zeta_j}(0)\|_{\Omega}^2 \leq K(K_{\zeta_j})h^{2k} \quad (5.4)$$

$$\int_0^T \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 + h^{-2} \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt \leq K(K_{\mathbf{u}_j})h^{2k} \quad (5.5)$$

Temos ainda a enunciar três resultados ([Dawson e Proft, 2002],[Brenner e Scott, 1994]):

**Teorema 5.2.1** *Se  $\Omega_e$  tiver uma fronteira de Lipschitz, existe uma constante  $K_e^t$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega_e)} \leq K_e^t \|u\|_{L^2(\Omega_e)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega_e)}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega_e) \quad (5.6)$$

**Teorema 5.2.2** *Se  $u_h \in \mathcal{S}^k(\Omega)$ , temos*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq K^i h^{-1} \|u\|_{\Omega} \quad (5.7)$$

com  $K^i$  independente de  $h$ .

**Teorema 5.2.3** *Para  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  temos*

$$\|e_{\zeta_j}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Kh^{-1} \|e_{\zeta_j}(\cdot, t)\|_{\omega} \quad (5.8)$$

com  $K$  independente de  $h$ .

Por fim, vamos também recorrer à *desigualdade de Young*:

$$ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2, \quad \text{para } a, b, \epsilon \in \mathbb{R} \text{ e } \epsilon > 0 \quad (5.9)$$

e ao *lema de Gronwall* (cf. por exemplo [Quarteroni e Valli, 1994]):

**Lema 5.2.4 (Gronwall)** *Se  $\beta$  é não negativa,  $\alpha$  é constante e  $u$  verifica*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^T \beta(s)u(s)ds \quad (5.10)$$

então verifica também

$$u(t) \leq \alpha \exp\left\{\int_a^T \beta(s)ds\right\} \quad (5.11)$$

### 5.3 Estimativas de erro

Após as duas secções anteriores, estamos agora em condições de demonstrar o seguinte teorema:

**Teorema 5.3.1** *Para  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \zeta_1$  e  $\zeta_2$  a que verifiquem a formulação discreta, as equações satisfazem a estimativa de erro*

$$\| (e_{\zeta_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}) \| \leq K_1 h^k \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned} 2 \| (e_{\zeta_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}) \|^2 &= \| e_{\zeta_1}(T) \|_{\Omega}^2 + \| e_{\zeta_2}(T) \|_{\Omega}^2 + \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}(T) \|_{\Omega}^2 + \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}(T) \|_{\Omega}^2 + \\ &\int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_1}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_2}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \\ &\int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \\ &\int_0^T \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \int_0^T \| \nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \|_{\Omega}^2 dt + \int_0^T \| \nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \|_{\Omega}^2 dt \end{aligned}$$

em que  $K_1$  é uma constante independente de  $h$  e  $k$ , mas dependente de  $g, g', \nu_j, K^i, K^t, K_{\zeta_j}, K_{\mathbf{u}_j}, K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}^*$  e  $K_{Z_j}^*$ . Para  $k > 1$  e  $h$  suficientemente pequeno, podemos remover a dependência de  $K_1$  em  $K_{Z_j}^*$ .

**Demonstração** Subtraindo a formulação fraca da formulação discreta, e tomando as funções teste nos subespaços da formulação discreta em ambas as formulações, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_e (\partial_t(Z_1 - \zeta_1), v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (U_1 Z_1 - \mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_1^\dagger \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} \\ &\quad + \langle (Z_1 - \zeta_1) \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_O} + (\partial_t(\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1), \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \sum_e (g \nabla(Z_1 - \zeta_1), \mathbf{w}_1)_{\Omega_e} \\ &\quad + (\nu_1 \nabla(\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1), \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} - \sum_i \langle g[Z_1 - \zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i \langle g[Z_2 - \zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} \\ + \sum_e (\partial_t(Z_2 - \zeta_2), v_2)_{\Omega_e} &- \sum_e (U_2 Z_2 - \mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_2^\dagger \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} \\ &\quad + \langle (Z_2 - \zeta_2) \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_O} + (\partial_t(\mathbf{U}_2 - \mathbf{u}_2), \mathbf{w}_2)_{\Omega} + \sum_e ((g + g') \nabla(Z_2 - \zeta_2), \mathbf{w}_2)_{\Omega_e} \\ + (\nu_2 \nabla(\mathbf{U}_2 - \mathbf{u}_2), \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} &- \sum_i \langle (g + g')[Z_2 - \zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i \langle g[Z_1 - \zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} \\ &= -(g \nabla(Z_2 - \zeta_2), \mathbf{w}_1)_{\Omega} - (g \nabla(Z_1 - \zeta_1), \mathbf{w}_2)_{\Omega} \end{aligned}$$

Incorporando agora  $\Pi \mathbf{u}_1, \Pi \mathbf{u}_2, \zeta_{I_1}$  e  $\zeta_{I_2}$ , podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}
& \sum_e (\partial_t (Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1), v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (U_1 Z_1 - \mathbf{U}_1 \zeta_{I_1} + \mathbf{U}_1 \zeta_{I_1} - \mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} \\
& + \sum_i \langle (Z_1^\dagger \mathbf{U}_1 - \zeta_{I_1} \mathbf{U}_1 + \zeta_{I_1} \mathbf{U}_1 - \zeta_1 \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} + \langle (Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1) \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial \Omega_O} \\
& \quad + (\partial_t (\mathbf{U}_1 - \Pi \mathbf{u}_1 + \Pi \mathbf{u}_1 - u_1), \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \sum_e (g \nabla (Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1), \mathbf{w}_1)_{\Omega_e} \\
& \quad + (\nu_1 \nabla (\mathbf{U}_1 - \Pi \mathbf{u}_1 + \Pi \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_1), \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} - \sum_i \langle g [Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad - \sum_i \langle g [Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} + \sum_e (\partial_t (Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2), v_2)_{\Omega_e} \\
& \quad \quad - \sum_e (U_2 Z_2 - \mathbf{U}_2 \zeta_{I_2} + \mathbf{U}_2 \zeta_{I_2} - \mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} \\
& \quad \quad + \sum_i \langle (Z_2^\dagger \mathbf{U}_2 - \zeta_{I_2} \mathbf{U}_2 + \zeta_{I_2} \mathbf{U}_2 - \zeta_2 \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad + \langle (Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2) \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial \Omega_O} + (\partial_t (\mathbf{U}_2 - \Pi \mathbf{u}_2 + \Pi \mathbf{u}_2 - u_2), \mathbf{w}_2)_{\Omega} \\
& + \sum_e ((g + g') \nabla (Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2), \mathbf{w}_2)_{\Omega_e} + (\nu_2 \nabla (\mathbf{U}_2 - \Pi \mathbf{u}_2 + \Pi \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2), \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} \\
& - \sum_i \langle (g + g') [Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i \langle g [Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad = -(g \nabla (Z_2 - \zeta_{I_2} + \zeta_{I_2} - \zeta_2), \mathbf{w}_1)_{\Omega} - (g \nabla (Z_1 - \zeta_{I_1} + \zeta_{I_1} - \zeta_1), \mathbf{w}_2)_{\Omega}
\end{aligned}$$

Tendo em conta os resultados da secção 5.1, a equação acima vem:

$$\begin{aligned}
& \sum_e (\partial_t e_{\zeta_1}, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (U_1 e_{\zeta_1}, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle e_{\zeta_1}^\dagger \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} + \langle e_{\zeta_1} \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial \Omega_O} \\
& \quad + (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \sum_e (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{w}_1)_{\Omega_e} + (\nu_1 \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}, \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} - \sum_i \langle g [e_{\zeta_1}], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad - \sum_i \langle g [e_{\zeta_2}], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} + (g \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \sum_e (\partial_t e_{\zeta_2}, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (U_2 e_{\zeta_2}, \nabla v_2)_{\Omega_e} \\
& + \sum_i \langle e_{\zeta_2}^\dagger \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} + \langle e_{\zeta_2} \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial \Omega_O} + (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + \sum_e ((g + g') \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{w}_2)_{\Omega_e} \\
& + (\nu_2 \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}, \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} - \sum_i \langle (g + g') [e_{\zeta_2}], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i \langle g [e_{\zeta_1}], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} + (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{w}_2)_{\Omega} \\
& = \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_1}, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_1 \zeta_1 - \mathbf{U}_1 \zeta_{I_1}, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_1} \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad + \langle \theta_{\zeta_1} \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial \Omega_O} + \sum_e (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{w}_1)_{\Omega_e} + (g \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{w}_1)_{\Omega} \\
& + \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_2}, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_2 \zeta_2 - \mathbf{U}_2 \zeta_{I_2}, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_2} \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} \\
& \quad + \langle \theta_{\zeta_2} \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial \Omega_O} + \sum_e ((g + g') \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{w}_2)_{\Omega_e} + (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{w}_2)_{\Omega}
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo  $(v_1, v_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  por  $(e_{\zeta_1}, e_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})$  (pois pertencem aos

subespaços considerados na formulação discreta) e integrando no tempo de 0 a T, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_e (\partial_t e_{\zeta_1}, e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e (U_1 e_{\zeta_1}, \nabla e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_1}^\dagger \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_1}] \rangle_{\gamma_i} dt + \\
& \quad \int_0^T \langle e_{\zeta_1} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_1} \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt + \int_0^T \sum_e (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt + \\
& \int_0^T (\nu_1 \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}, \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_2}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt + \\
& \quad \int_0^T (g \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt + \int_0^T \sum_e (\partial_t e_{\zeta_2}, e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e (U_2 e_{\zeta_2}, \nabla e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt + \\
& \quad \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_2}^\dagger \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_2}] \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \langle e_{\zeta_2} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_2} \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt + \\
& \quad \int_0^T \sum_e ((g + g') \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt + \int_0^T (\nu_2 \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}, \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt - \\
& \quad \int_0^T \sum_i \langle (g + g')[e_{\zeta_2}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt + \\
& \quad \int_0^T (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt = \int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_1}, e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt - \\
& \quad \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_1 \zeta_1 - \mathbf{U}_1 \zeta_{I_1}, \nabla e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_1} \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_1}] \rangle_{\gamma_i} dt + \\
& \quad \int_0^T \langle \theta_{\zeta_1} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_1} \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T \sum_e (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt + \int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt + \\
& \quad \int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_2}, e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_2 \zeta_2 - \mathbf{U}_2 \zeta_{I_2}, \nabla e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt + \\
& \quad \int_0^T \sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_2} \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_2}] \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \langle \theta_{\zeta_2} \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_2} \rangle_{\partial\Omega_O} dt \\
& \quad + \int_0^T \sum_e ((g + g') \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt + \int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt
\end{aligned}$$

O passo seguinte é manipular um pouco os termos do lado esquerdo desta equação. Vamos começar com o termo  $\int_0^T \sum_e (\partial_t e_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sum_e (\partial_t e_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt &= \sum_e \left( \int_0^T \partial_t e_{\zeta_j}, e_{\zeta_j} dt \right)_{\Omega_e} = \sum_e \frac{1}{2} (e_{\zeta_j}^2(T) - e_{\zeta_j}^2(0))_{\Omega_e} \\
&= \frac{1}{2} \sum_e (\|e_{\zeta_j}(T)\|_{\Omega_e}^2 - \|e_{\zeta_j}(0)\|_{\Omega_e}^2) = \frac{1}{2} \|e_{\zeta_j}(T)\|_{\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|e_{\zeta_j}(0)\|_{\Omega}^2
\end{aligned}$$

Similiarmente para  $\int_0^T \sum_e (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j})_{\Omega_e} dt$ , e atendendo a que  $\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}(0) = 0$  (cf. o apen-

dice), temos

$$\int_0^T \sum_e (\partial_t \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j})_{\Omega_e} dt = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}(T)\|_{\Omega}^2$$

Em seguida, integrando  $-\int_0^T \sum_e (U_i e_{\zeta_j}, \nabla e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt$  por partes, temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T \sum_e (U_i e_{\zeta_j}, \nabla e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_e \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_e, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\Omega_e} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_j, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}^2] \rangle_{\gamma_i} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_j, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt \end{aligned}$$

Combinando  $-\frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}^2] \rangle_{\gamma_i} dt$  com  $\int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}^2] \rangle_{\gamma_i} dt &= \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^- \rangle_{\gamma_i} dt \\ &\quad - \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 - (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt \end{aligned}$$

Repare-se agora que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i > 0 &\Rightarrow \\ \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^- \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \\ \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 - (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt &= \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^- U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^- \rangle_{\gamma_i} dt - \\ \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^- U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 - (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt &= \\ \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^- U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt + \\ \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt \end{aligned}$$



Por outro lado

$$\begin{aligned}
& \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \Rightarrow \\
& \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^- \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 - (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt = \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^+ U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^- \rangle_{\gamma_i} dt - \\
& \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^+ U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 - (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt = \\
& -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^-)^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^- U \cdot \mathbf{n}_i, e_{\zeta_j}^+ \rangle_{\gamma_i} dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, (e_{\zeta_j}^+)^2 \rangle_{\gamma_i} dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt
\end{aligned}$$

Podemos então aglutinar os dois últimos resultados para concluir que

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_i \langle e_{\zeta_j}^\dagger \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}^2] \rangle_{\gamma_i} dt = \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_j}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt
\end{aligned}$$

Combinando  $-\frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega} dt$  com  $\int_0^T \langle e_{\zeta_j} \hat{u}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt$ , e notando que  $\Pi \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}$  (pois  $\mathbf{U}_j = \hat{u}_j$  em  $\partial\Omega$  e  $\Pi \mathbf{u}_j \in W_h^j(\Omega)$ ), temos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle e_{\zeta_j} \hat{u}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega} dt = \\
& \int_0^T \langle \hat{u}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt = \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\hat{u}_j \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle (\hat{u}_j - \Pi \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt
\end{aligned}$$

Integrando  $\int_0^T \sum_e (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt$  por partes, combinando com  $-\int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot$

$\mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt$  e notando que  $\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j} = 0$  em  $\partial\Omega$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_e (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = \\ & \int_0^T \sum_e \langle g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \rangle_{\partial\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = \\ & \int_0^T \langle g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \rangle_{\partial\Omega} dt + \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \\ & - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = - \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \end{aligned}$$

Similarmente se obtém

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_e ((g + g') \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_i \langle (g + g')[e_{\zeta_2}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = \\ & - \int_0^T \sum_e ((g + g') e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \\ & \int_0^T \sum_e (g \nabla e_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_1}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = - \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt \\ & \int_0^T \sum_e (g \nabla e_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_i \langle g[e_{\zeta_2}], \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} dt = - \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_2}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \end{aligned}$$

Para  $\int_0^T (\nu_j \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}, \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j})_{\Omega} dt$  temos ainda

$$\int_0^T (\nu_j \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}, \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j})_{\Omega} dt = \int_0^T \|\nu_j^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt$$

Atendendo aos resultados das últimas páginas, podemos reescrever o resultado da p.25 como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_{\zeta_1}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|e_{\zeta_2}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}(T)\|_{\Omega}^2 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_1}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_2}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt + \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt = \\ & \frac{1}{2} \|e_{\zeta_1}(0)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|e_{\zeta_2}(0)\|_{\Omega}^2 + \int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_1}, e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_2}, e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt - \\ & \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_1 \zeta_1 - \mathbf{U}_1 \zeta_{I_1}, \nabla e_{\zeta_1})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_2 \zeta_2 - \mathbf{U}_2 \zeta_{I_2}, \nabla e_{\zeta_2})_{\Omega_e} dt + \\ & \int_0^T \sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_1} \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_1}] \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_2} \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_2}] \rangle_{\gamma_i} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \langle \theta_{\zeta_1} \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_1} \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T \langle \theta_{\zeta_2} \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_2} \rangle_{\partial\Omega_O} dt - \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \langle (\hat{u}_1 - \Pi \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \langle (\hat{u}_2 - \Pi \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \\
& \int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt + \int_0^T \sum_e ((g + g') \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt + \int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt + \\
& \int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_1, e_{\zeta_1}^2)_{\Omega_e} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_2, e_{\zeta_2}^2)_{\Omega_e} dt + \\
& \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_e ((g + g') e_{\zeta_2}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt + \\
& \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_2}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt
\end{aligned}$$

Vamos majorar os termos do lado direito. Começando por  $\frac{1}{2} \|e_{\zeta_j}(0)\|_{\Omega}^2$  e atendendo a que  $\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|e_{\zeta_j}(0)\|_{\Omega}^2 &= (e_{\zeta}(0), e_{\zeta}(0))_{\Omega} = (Z_{j_0} - \zeta_{j_0} + \theta_{\zeta}(0), e_{\zeta}(0))_{\Omega} = \\
& (Z_{j_0} - \zeta_{j_0}, e_{\zeta}(0))_{\Omega} + (\theta_{\zeta}(0), e_{\zeta}(0))_{\Omega} = (\theta_{\zeta}(0), e_{\zeta}(0))_{\Omega} \leq \|\theta_{\zeta}(0)\| \|e_{\zeta}(0)\| \\
& \Rightarrow \|e_{\zeta}(0)\| \leq \|\theta_{\zeta}(0)\| \leq K(K_{\zeta})h^{2k}
\end{aligned}$$

Para  $\int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt$ , vem

$$\begin{aligned}
\int_0^T \sum_e (\partial_t \theta_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt &\leq \int_0^T \sum_e \|\partial_t \theta_{\zeta_j}\|_{\Omega_e} \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega_e} dt \leq \int_0^T \|\partial_t \theta_{\zeta_j}\|_{\Omega} \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \|\partial_t \theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt \leq K(K_{\zeta})h^{2k} + \frac{1}{2} \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Integrando  $-\int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}, \nabla e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt$  por partes e combinando com  $\int_0^T \sum_i \langle \zeta_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt$  e  $\int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{u}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt$ , vem

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}, \nabla e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_i \langle \zeta_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt + \\
& \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{u}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt = \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt - \\
& \int_0^T \sum_i \langle \zeta_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt - \int_0^T \sum_e \langle \zeta_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \sum_i \langle \zeta_j \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_i - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i, [e_{\zeta_j}] \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt = \\
& \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt - \int_0^T \sum_e \langle (\theta_{\zeta_j} + \zeta_{I_j}) \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} - \zeta_{I_j} \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega} dt + \\
& \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt = \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt - \\
& \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega} dt - \int_0^T (\zeta_{I_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j})_{\partial\Omega} dt + \\
& \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_O} dt = \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt - \\
& \int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_I} dt - \int_0^T (\zeta_{I_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j})_{\partial\Omega} dt
\end{aligned}$$

Agora, majoramos  $\int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt$ :

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j \zeta_j - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt = \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot (\mathbf{u}_j (\theta_{\zeta_j} + \zeta_{I_j}) - \mathbf{U}_j \zeta_{I_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt = \\
& \int_0^T \sum_e ((\nabla \cdot \mathbf{u}_j) \theta_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_e (\mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_{\zeta_j}, e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt + \\
& \int_0^T \sum_e (\zeta_{I_j} \nabla \cdot (\theta_{\mathbf{u}_j} - \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt + \int_0^T \sum_e (\nabla \zeta_{I_j} \cdot (\theta_{\mathbf{u}_j} - \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}), e_{\zeta_j})_{\Omega_e} dt \leq \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla \cdot \mathbf{u}_j\|_{\Omega}^2 \|\theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{u}_j\|_{\Omega}^2 \|\nabla \theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\zeta_{I_j}\|_{\Omega}^2 \|\nabla \theta_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt + \\
& \frac{4}{2\nu_j} \int_0^T \|\zeta_{I_j}\|_{\Omega}^2 \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{8} \int_0^T \|\nu_j^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt + \\
& \frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla \zeta_{I_j}\|_{\Omega}^2 \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T \|\nabla \zeta_{I_j}\|_{\Omega}^2 \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 + \frac{5}{2} \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt \leq \\
& K(K_{\mathbf{u}_j}^*) \int_0^T \|\theta_{\zeta_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + K(K_{\zeta_j}^*) \int_0^T \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + K(K_{\zeta_j}^*) \int_0^T \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt + \\
& K(K_{\zeta_j}^*, \nu_j) \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_j^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt \leq \\
& K(K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}, K_{\zeta_j}) h^{2k} + K(K_{\zeta_j}^*, \nu_j) \int_0^T \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 + \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_j^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Quanto a  $\int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_I} dt$  e  $-\int_0^T (\zeta_{I_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j})_{\partial\Omega} dt$ , temos:

$$\int_0^T \langle \theta_{\zeta_j} \hat{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega_I} dt - \int_0^T (\zeta_{I_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j})_{\partial\Omega} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}K(K_{\mathbf{u}_j}^*) \int_0^T h^{-1} \|\theta_{\zeta_j}\|_{\partial\Omega_I}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T h \|e_{\zeta_j}\|_{\partial\Omega_I}^2 dt + \\
& \frac{1}{2}K(K_{\zeta_j}^*) \int_0^T h^{-1} \|(\hat{u}_j - \Pi\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}\|_{\partial\Omega}^2 + \frac{1}{2} \int_0^T h \|e_{\zeta_j}\|_{\partial\Omega}^2 dt \leq \\
K(K_{\mathbf{u}_j}^*, K^t) \int_0^T h^{-1} \|\theta_{\zeta_j}\|_{\Omega} \|\theta_{\zeta_j}\|_{H^1(\Omega)} dt + K(K_{\zeta_j}^*, K^t) \int_0^T h^{-1} \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega} \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{H^1(\Omega)} dt + \\
& K(K^t) \int_0^T h \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega} \|e_{\zeta_j}\|_{H^1(\Omega)} dt \leq K(K_{\mathbf{u}_j}^*, K^t) \int_0^T h^{-2} \|\theta_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + \\
& K(K_{\mathbf{u}_j}^*, K^t) \int_0^T \|\theta_{\zeta_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + K(K_{\zeta_j}^*, K^t) \int_0^T h^{-2} \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{\Omega}^2 dt + \\
& K(K_{\zeta_j}^*, K^t) \int_0^T \|\theta_{\mathbf{u}_j}\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + K(K^t, K^i) \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt \leq \\
& K(K_{\mathbf{u}_j}^*, K^t, K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}, K_{\zeta_j}) h^{2k} + K(K^t, K^i) \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Usando para  $-\frac{1}{2} \int_0^T \langle (\hat{u}_j - \Pi\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt$  técnicas semelhantes às usadas para  $-\int_0^T \langle \zeta_{I_j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j} \rangle_{\partial\Omega} dt$  anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^T \langle (\hat{u}_j - \Pi\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}, e_{\zeta_j}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt \leq \\
& \frac{1}{2} \|e_{\zeta_j}\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \int_0^T \|(\hat{u}_j - \Pi\mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}\|_{\partial\Omega_O} \|e_{\zeta_j}\|_{\partial\Omega_O} dt \leq \\
& K(K_{Z_j}^*, K^t, K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}) h^{2k} + K(K^t, K^i) \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Para  $\int_0^T (g\nabla\theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt$ , vem

$$\begin{aligned}
& \int_0^T (g\nabla\theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt = \int_0^T (g\theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt - \int_0^T (g\theta_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt = \\
& \int_0^T (g\theta_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt \leq \frac{8}{2\nu_1} g \int_0^T \|\theta_{\zeta_1}\|_{\Omega} dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt \leq \\
& K(g, \nu_1, K_{\zeta_1}) h^{2k} + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Da mesma forma, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \sum_e ((g + g') \nabla\theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt \leq K(g, g', \nu_2, K_{\zeta_2}) h^{2k} + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt \\
& \int_0^T (g\nabla\theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega} dt \leq K(g, \nu_2, K_{\zeta_1}) h^{2k} + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt \\
& \int_0^T (g\nabla\theta_{\zeta_2}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt \leq K(g, \nu_1, K_{\zeta_2}) h^{2k} + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt
\end{aligned}$$

Quanto a  $-\frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_j, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt$ , temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{U}_j, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt + \\ & \quad \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \theta_{\mathbf{u}_j}, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_e (\nabla \cdot \mathbf{u}_j, e_{\zeta_j}^2)_{\Omega_e} dt \leq \\ & K(K_{Z_j}^*, K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}^*, \nu_j) \int_0^T \|e_{\zeta_j}\|_{\Omega}^2 dt + K(K_{Z_j}^*, K_{\zeta_j}^*, K_{\mathbf{u}_j}, \nu_j) h^{2k} + \frac{1}{8} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt \end{aligned}$$

Finalmente, e de maneira similar a  $\int_0^T (g \nabla \theta_{\zeta_1}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega} dt$ , temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \leq K(g, \nu_1) \int_0^T \|e_{\zeta_1}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt \\ & \int_0^T \sum_e ((g + g') e_{\zeta_2}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt \leq K(g, g', \nu_2) \int_0^T \|e_{\zeta_2}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt \\ & \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_1}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2})_{\Omega_e} dt \leq K(g, \nu_2) \int_0^T \|e_{\zeta_1}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt \\ & \int_0^T \sum_e (g e_{\zeta_2}, \nabla \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1})_{\Omega_e} dt \leq K(g, \nu_1) \int_0^T \|e_{\zeta_2}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{16} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt \end{aligned}$$

Juntando todos estes resultados, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|e_{\zeta_1}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|e_{\zeta_2}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}(T)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}(T)\|_{\Omega}^2 + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_1}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_2}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial \Omega_O} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial \Omega_O} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial \Omega_I} dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial \Omega_I} dt + \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt + \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt \leq \\ & K(K_{\mathbf{u}_1}, K_{\mathbf{u}_2}, K_{\mathbf{u}_1}^*, K_{\mathbf{u}_2}^*, K_{\zeta_1}, K_{\zeta_2}, K_{\zeta_1}^*, K_{\zeta_2}^*, K_{Z_1}^*, K_{Z_2}^*, K^t, \nu_1, \nu_2, g, g') h^{2k} + \\ & \quad \frac{1}{2} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt + \\ & K(K_{\mathbf{u}_1}, K_{\mathbf{u}_2}, K_{\mathbf{u}_1}^*, K_{\mathbf{u}_2}^*, K_{\zeta_1}^*, K_{\zeta_2}^*, K_{Z_1}^*, K_{Z_2}^*, K^t, K^i, \nu_1, \nu_2, g, g') \int_0^T \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 + \|e_{\zeta_1}\|_{\Omega}^2 dt + \\ & K(K_{\mathbf{u}_1}, K_{\mathbf{u}_2}, K_{\mathbf{u}_1}^*, K_{\mathbf{u}_2}^*, K_{\zeta_1}^*, K_{\zeta_2}^*, K_{Z_1}^*, K_{Z_2}^*, K^t, K^i, \nu_1, \nu_2, g, g') \int_0^T \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 + \|e_{\zeta_2}\|_{\Omega}^2 dt \end{aligned}$$

Escondendo os termos  $\frac{1}{2} \int_0^T \|\nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}\|_{\Omega}^2 dt$  e  $\frac{1}{2} \int_0^T \|\nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}\|_{\Omega}^2 dt$  do lado esquerdo e aplicando o lema de Gronwall, obtemos o resultado do teorema 5.3.1.

Para  $k > 1$  e  $h$  suficientemente pequeno, temos (cf. [Dawson e Proft, 2002])

$$\|Z_j\|_{L^\infty(0,T,L^\infty)} \leq \|\zeta_{I_j}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty)} + \|e_{\zeta_j}\|_{L^\infty(0,T,L^\infty)} \leq K_{\zeta_j}^* + KK_1h^{k-1} \ll 2K_{\zeta_j}^* \leq K_{Z_j}^* \quad (5.13)$$

□

Usando a desigualdade triangular e os resultados (5.4) e (5.5), obtemos facilmente o

**Corolário 5.3.2**

$$\|(\zeta_j - Z_j)(T)\|_\Omega + \|(\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j)(T)\|_\Omega \leq K_1h^k \quad (5.14)$$





# Capítulo 6

## Resultados numéricos

### 6.1 Implementação computacional

Substituindo na formulação discreta  $Z_1, Z_2, \mathbf{U}_1$  e  $\mathbf{U}_2$  pela sua representação de elementos finitos como visto no capítulo 4, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
& \sum_e (\partial_t (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_Z}^Z)_{\Omega_e} - \sum_e ((\sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U) (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \nabla \Psi_{i_Z}^Z)_{\Omega_e} + \\
& \quad \sum_i \langle (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z)^\uparrow (\sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U) \cdot \mathbf{n}_i, [\Psi_{i_Z}^Z] \rangle_{\gamma_i} + \\
& \quad \langle (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z) \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, \Psi_{i_Z}^Z \rangle_{\partial \Omega_O} = - \langle \hat{\zeta}_1 \hat{u}_1 \cdot \mathbf{n}, \Psi_{i_Z}^Z \rangle_{\partial \Omega_I} \\
& \quad (\partial_t (\sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} + \sum_e (g \nabla (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} + \\
& \quad (\nu_1 \nabla (\sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U), \nabla \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} - \sum_i \langle g [(\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z)], \Psi_{i_U}^U \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \\
& \quad \sum_i \langle g [(\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z)], \Psi_{i_U}^U \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = - (g \nabla (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} \\
& \sum_e (\partial_t (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_Z}^Z)_{\Omega_e} - \sum_e ((\sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U) (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \nabla \Psi_{i_Z}^Z)_{\Omega_e} + \\
& \quad \sum_i \langle (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z)^\uparrow (\sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U) \cdot \mathbf{n}_i, [\Psi_{i_Z}^Z] \rangle_{\gamma_i} + \\
& \quad \langle (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z) \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, \Psi_{i_Z}^Z \rangle_{\partial \Omega_O} = - \langle \hat{\zeta}_2 \hat{u}_2 \cdot \mathbf{n}, \Psi_{i_Z}^Z \rangle_{\partial \Omega_I} \\
& \quad (\partial_t (\sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} + \sum_e ((g + g') \nabla (\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} + \\
& \quad (\nu_2 \nabla (\sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U), \nabla \Psi_{i_U}^U)_{\Omega} - \sum_i \langle g [(\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z)], \Psi_{i_U}^U \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \\
& \quad \sum_i \langle (g + g') [(\sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z)], \Psi_{i_U}^U \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = - (g \nabla (\sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z), \Psi_{i_U}^U)_{\Omega}
\end{aligned}$$

com as condições iniciais dadas por

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(0)(\Psi_{i_Z}^Z - \zeta_{0,1}, \Psi_{i_Z}^Z)_\Omega &= 0 \\ \sum_i \sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(0)(\Psi_{i_Z}^Z - \zeta_{0,2}, \Psi_{i_Z}^Z)_\Omega &= 0 \\ \sum_i \sum_{i_U} u_{i_U,1}(0)(\Psi_{i_U}^U - u_{0,1}, \Psi_{i_U}^U)_\Omega &= 0 \\ \sum_i \sum_{i_U} u_{i_U,2}(0)(\Psi_{i_U}^U - u_{0,2}, \Psi_{i_U}^U)_\Omega &= 0 \end{aligned}$$

**Nota** Apesar do aspecto algo gargantuano destas equações, na verdade muitos dos termos dos somatórios são nulos; uma escolha adequada das funções base simplifica ainda um pouco mais estas equações. A versão destas equações que foi implementada para esta tese tem isso em consideração, e está no apêndice A.

Para a implementação computacional deste problema considerámos apenas um problema unidimensional. Os elementos  $\Omega_e$  serão, nesse caso, subintervalos de igual dimensão, nos quais definimos funções base polinomiais de grau 1, contínuas entre elementos no caso de  $U_j$  e (potencialmente) descontínuas de elemento para elemento no caso de  $Z_j$ :

$$\begin{aligned} \{\Psi_{i_Z}^Z\} &= \cup_e(\{\chi_{\Omega_e}\} \cup \left\{\frac{x - a_e}{b_e - a_e} \chi_{\Omega_e}\right\}), \text{ para } \Omega_e = [a_e, b_e] \\ \{\Psi_{i_U}^U\} &= \cup_e\left(\frac{x - a_e}{b_e - a_e} \chi_{\Omega_{A_e}} - \frac{x - b_e}{c_e - b_e} \chi_{\Omega_{B_e}}\right), \text{ para elementos } \Omega_{A_e} = [a_e, b_e] \text{ e } \Omega_{B_e} = [b_e, c_e] \end{aligned}$$

Quanto ao sistema de EDOs acima, ele foi resolvido numericamente pelo método de Euler explícito com um passo  $\Delta t$  fixo.

## 6.2 Resultados gráficos

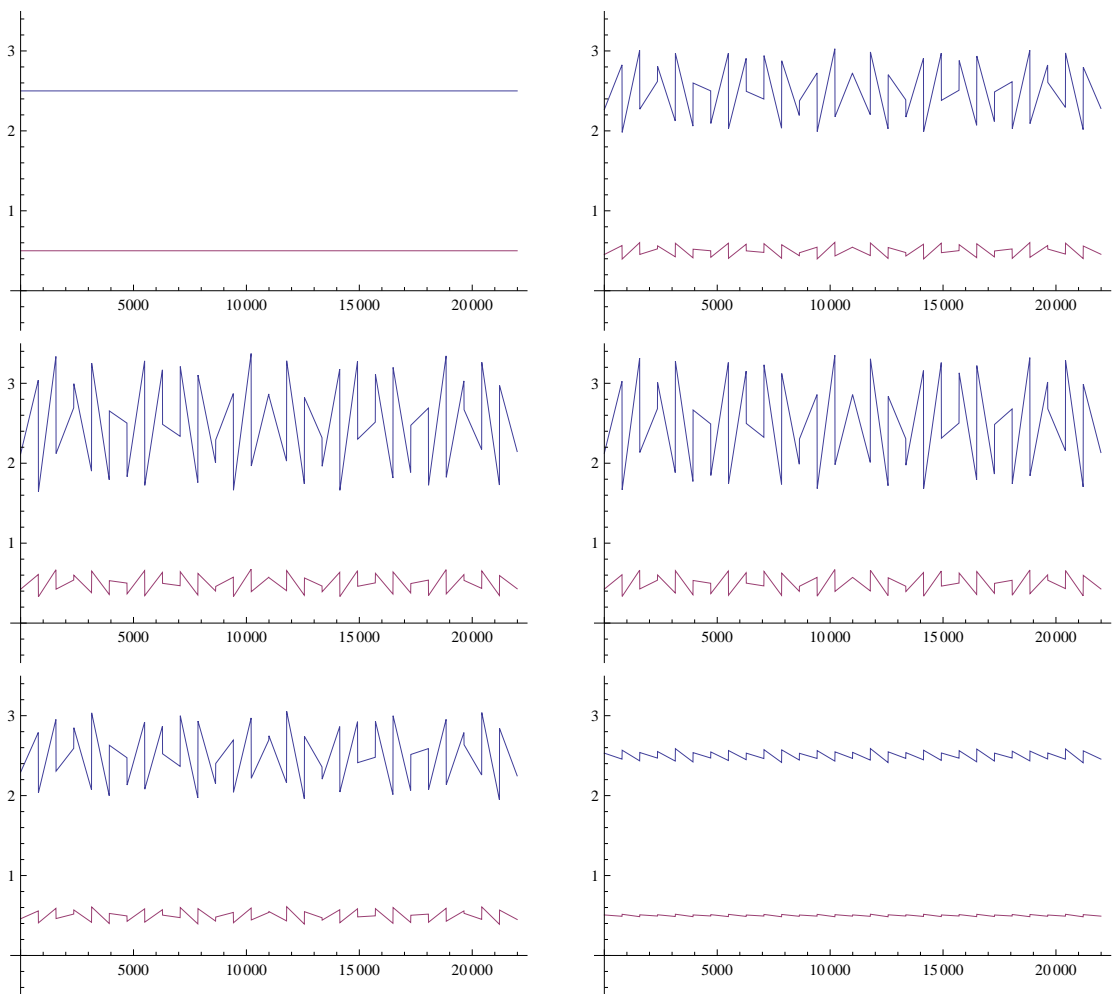
Nesta secção apresentam-se os resultados gráficos obtidos para o problema com as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned} \zeta_1(x, 0) &= 2 & x \in \Omega \\ \zeta_2(x, 0) &= 0.5 & x \in \Omega \\ \zeta_1 &= 2 & \text{em } \partial\Omega_I \\ \zeta_2 &= 0.5 & \text{em } \partial\Omega_I \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) &= \sin\left(\frac{x}{700}\right) & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 &= \sin\left(\frac{x}{700}\right) & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

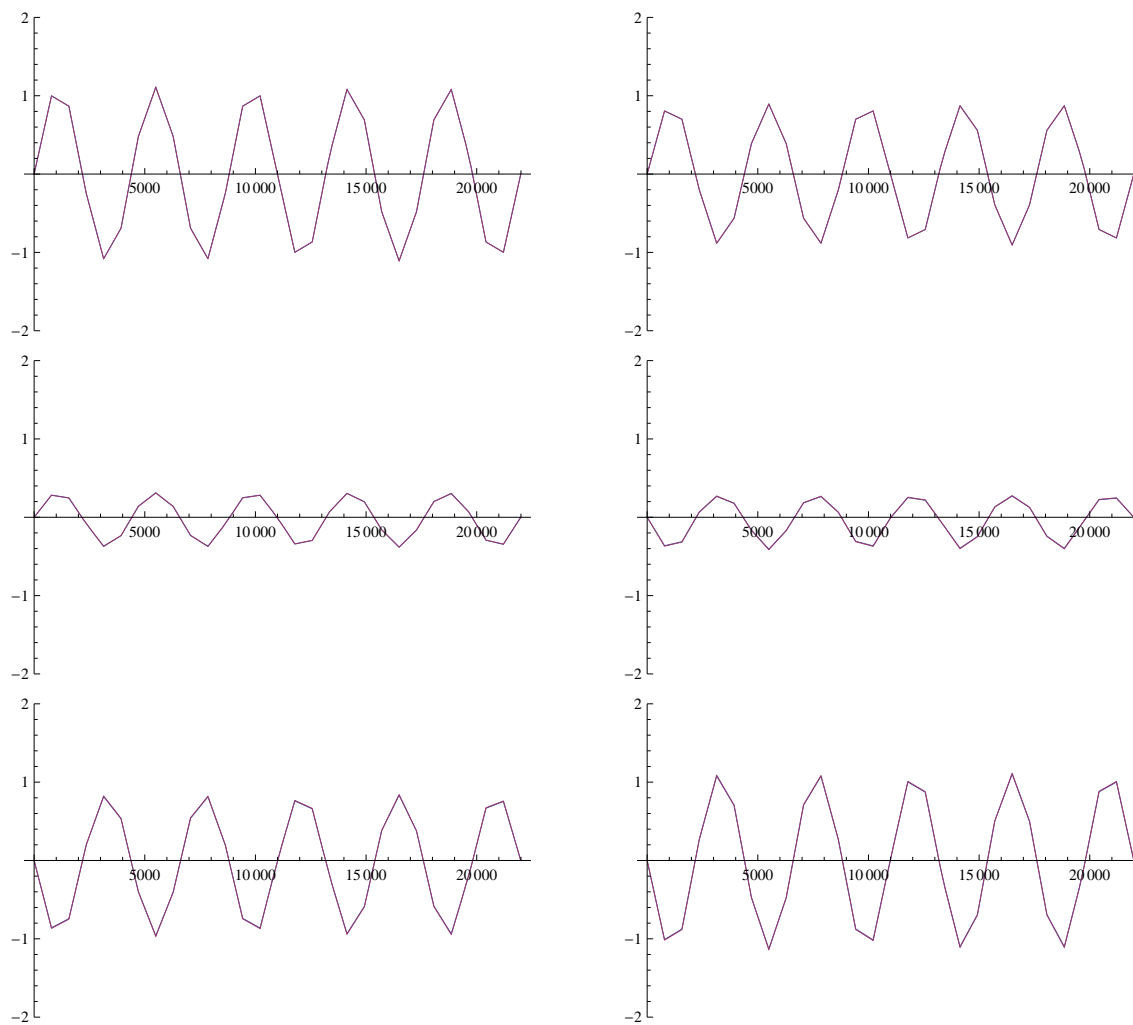
e para a seguinte escolha de parâmetros:

$$\begin{aligned} g &= 9.81 & g' &= 0.19 \\ \nu_1 &= \nu_2 &= 25 \end{aligned}$$

e para 28 elementos.



Elevação vertical da camada 1(a azul) e da camada 2(a rosa), para  $t = 0, 15, 30, 45, 60, 75$



Velocidade horizontal na camada 1(a azul) e na camada 2(a rosa), para  $t = 0, 15, 30, 45, 60, 75$

# Capítulo 7

## Conclusão

### 7.1 Conclusões finais

Nesta tese introduzimos uma versão simplificada das equações de águas rasas em duas camadas. Fizemos uma aproximação pelo método dos elementos finitos - aproximando as equações do momento por uma conjugação do método de Galerkin standard com um termo de estabilização e as equações da continuidade por um método de Galerkin descontínuo. Deduzimos uma estimativa de erro *a priori* para este método, tendo, na sequência de [Dawson e Proft, 2002] obtido o resultado esperado: convergência de ordem  $h^k$ . Para terminar, implementámos o método para um problema de teste unidimensional. Apesar de não ter sido possível obter resultados numéricos *relevantes* sobre convergência, devido às especificidades do problema e da sua implementação, foi possível obter resultados gráficos de algum interesse.

### 7.2 Trabalho futuro

Na minha opinião, os próximos passos a tomar para desenvolvimento deste trabalho são os seguintes:

- Implementar o método numa linguagem que permita melhor desempenho (ex. C++), para obter resultados com maior relevância, nomeadamente na convergência;
- Na sequência de [Dawson e Proft, 2002], tentar também aproximar estas equações por um método DG/NIPG (Nonsymmetric Inferior Penalty Galerkin) para termos um termo de comparação com este método.
- Tentar implementar o método para um problema bidimensional, mais próximo da realidade;
- Generalizar esses resultados para a versão multi-camada das equações.



# Apêndice A

## Código da implementação

Neste capítulo apresenta-se o código em *Mathematica* que foi usado nesta tese.

```
a = 0;
b = 7000 * Pi;
n = 28;
edge = Rest[Most[Range[a, b, (b - a)/n]]];
upwind = 1;
e1 = 25;
e2 = 25;
g = 9.81;
g2 = 0.19;
leap = Limit[#1[x], x -> #2, Direction -> 1] - Limit[#1[x], x -> #2, Direction ->
-1]&;
uini1[x] = Sin[x/700];
uini2[x] = Sin[x/700];
hini1[x] = 2;
hini2[x] = 0.5;
u1hat[a] := uini1[a];
u2hat[a] := uini2[a];
u1hat[b] := uini1[b];
u2hat[b] := uini2[b];
h1hat[a] := hini1[a];
h2hat[a] := hini2[a];
h1hat[b] := hini1[b];
h2hat[b] := hini2[b];

Psih = Function[{x}, #]&/@
Rifle[Table[Piecewise[{1, (b - a) * (i - 1)/n <= x <= (b - a) * i/n}], {i, n}],
Table[Piecewise[{{(x - (b - a) * (i - 1)/n) * n/(b - a),
(b - a) * (i - 1)/n <= x <= (b - a) * i/n}], {i, n}]];
Psiu = Function[{x}, #]&/@
Table[Piecewise[{{(x - (b - a) * (i - 1)/n) * n/(b - a),
(b - a) * (i - 1)/n <= x <= (b - a) * i/n}, {(-x + (b - a) * (i/n)) * n/(b - a) + 1,
(b - a) * i/n <= x <= (b - a) * (i + 1)/n}], {i, n - 1}];
```

```
DPsih = Table[Psih[[i]]', {i, Length[Psih]};
DPsiu = Table[Psiu[[i]]', {i, Length[Psiu]};
```

```
h1 = ToExpression["hum" <> ToString[#]]&/@Range[Length[Psih]];
h2 = ToExpression["hdois" <> ToString[#]]&/@Range[Length[Psih]];
u1 = ToExpression["uum" <> ToString[#]]&/@Range[Length[Psiu]];
u2 = ToExpression["udois" <> ToString[#]]&/@Range[Length[Psiu]];
```

```
frst = Join[
{Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] * Psih[[1]][x],
{x, a, b}], {i, 1, 2}] + -Sum[u1[[1]][t] * h1[[i2]][t] * Limit[Psih[[i2]][x],
x -> edge[[1]], Direction -> upwind] * leap[Psih[[1]], edge[[1]]],
{i2, 2 - upwind, 2 - upwind + 1}] + (-0.5 * upwind + 0.5) * Sum[h1[[i]][t] * Psih[[i]][a] *
Psih[[1]][a] * u1hat[a], {i, 1, 2}] ==
(0.5 * upwind + 0.5) * h1hat[a] * u1hat[a] * Psih[[1]][a],
Table[Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] * Psih[[j]][x], {x, a, b}],
{i, Ceiling[j, 2] - 1, Ceiling[j, 2]}] - Sum[u1[[i3]][t] * h1[[i2]][t] * Limit[Psih[[i2]][x],
x -> edge[[i3]], Direction -> upwind] * leap[Psih[[j]], edge[[i3]]],
{i2, 2 * i3 - upwind, 2 * i3 - upwind + 1}], {i3, Ceiling[j, 2]/2 - 1, Ceiling[j, 2]/2}] == 0,
{j, 3, Length[Psih] - 3, 2}], {Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] *
Psih[[Length[Psih] - 1]][x], {x, a, b}], {i, Length[Psih] - 1, Length[Psih]}] +
- Sum[u1[[Length[edge]]][t] * h1[[i2]][t] * Limit[Psih[[i2]][x], x -> edge[[Length[edge]]],
Direction -> upwind] * leap[Psih[[Length[Psih] - 1]], edge[[Length[edge]]]],
{i2, 2 * Length[edge] - upwind, 2 * Length[edge] - upwind + 1}] +
(0.5 * upwind + 0.5) * Sum[h1[[i]][t] * Psih[[i]][b] * Psih[[Length[Psih] - 1]][b] * u1hat[b],
{i, Length[Psih] - 1, Length[Psih]}] ==
(-0.5 * upwind + 0.5) * h1hat[b] * u1hat[b] * Psih[[Length[Psih] - 1]][b],
{Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] * Psih[[2]][x], {x, a, b}], {i, 1, 2}] -
Sum[u1[[1]][t] * h1[[i2]][t] * NIntegrate[Psiu[[1]][x] * Psih[[i2]][x] * DPsih[[2]][x],
{x, a, b}], {i2, 1, 2}] + -Sum[u1[[1]][t] * h1[[i2]][t] * Limit[Psih[[i2]][x],
x -> edge[[1]], Direction -> upwind] * leap[Psih[[2]], edge[[1]]],
{i2, 2 - upwind, 2 - upwind + 1}] == 0},
Table[Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] * Psih[[j]][x], {x, a, b}],
{i, Ceiling[j, 2] - 1, Ceiling[j, 2]}] - Sum[u1[[i1]][t] * h1[[i2]][t] *
NIntegrate[Psiu[[i1]][x] * Psih[[i2]][x] * DPsih[[j]][x], {x, a, b}],
{i1, Ceiling[j, 2]/2 - 1, Ceiling[j, 2]/2}], {i2, Ceiling[j, 2] - 1, Ceiling[j, 2]}] +
- Sum[u1[[i3]][t] * h1[[i2]][t] * Limit[Psih[[i2]][x], x -> edge[[i3]],
Direction -> upwind] * leap[Psih[[j]], edge[[i3]]], {i2, 2 * i3 - upwind, 2 * i3 - upwind + 1},
{i3, Ceiling[j, 2]/2 - 1, Ceiling[j, 2]/2}] == 0, {j, 4, Length[Psih] - 2, 2}],
{Sum[h1[[i]]'[t] * NIntegrate[Psih[[i]][x] * Psih[[Length[Psih]]][x],
{x, a, b}], {i, Length[Psih] - 1, Length[Psih]}] - Sum[u1[[Length[Psiu]]][t] * h1[[i2]][t] *
NIntegrate[Psiu[[Length[Psiu]]][x] * Psih[[i2]][x] * DPsih[[Length[Psih]]][x], {x, a, b}],
{i2, Length[Psih] - 1, Length[Psih]}] + -Sum[u1[[Length[edge]]][t] * h1[[i2]][t] *
Limit[Psih[[i2]][x], x -> edge[[Length[edge]]],
Direction -> upwind] * leap[Psih[[Length[Psih]]],
edge[[Length[edge]]]], {i2, 2 * Length[edge] - upwind, 2 * Length[edge] - upwind + 1}] +
(0.5 * upwind + 0.5) * Sum[h1[[i]][t] * Psih[[i]][b] * Psih[[Length[Psih]]][b] * u1hat[b],
```



$$\{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\} == \\ (-0.5 * \text{upwind} + 0.5) * h1\hat{a}[b] * u1\hat{a}[b] * P\text{sih}[\text{Length}[P\text{sih}]][b];$$

$$\text{scnd} = \text{Join}[ \\ \{ \text{Sum}[u1[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] + \\ \text{Sum}[h1[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2, 4, 2\}] + \\ \text{Sum}[u1[[i]][t] * e1 * N\text{Integrate}[D\text{Psiu}[[i]][x] * D\text{Psiu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] + \\ \text{Sum}[h1[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[1]]] * P\text{siu}[[1]][\text{edge}[[1]]], \{i1, 1, 3\}] + \\ \text{Sum}[h2[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[1]]] * P\text{siu}[[1]][\text{edge}[[1]]], \{i1, 1, 3\}] == \\ - \text{Sum}[h2[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2, 4, 2\}], \\ \text{Table}[\text{Sum}[u1[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, j - 1, j + 1\}] + \\ \text{Sum}[h1[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2*j, 2*j + 2, 2\}] + \\ \text{Sum}[u1[[i]][t] * e1 * N\text{Integrate}[D\text{Psiu}[[i]][x] * D\text{Psiu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, j - 1, j + 1\}] + \\ \text{Sum}[h1[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[j]]] * P\text{siu}[[j]][\text{edge}[[j]]], \{i1, 2*j - 1, 2*j + 1\}] + \\ \text{Sum}[h2[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[j]]] * P\text{siu}[[j]][\text{edge}[[j]]], \{i1, 2*j - 1, 2*j + 1\}] == \\ - \text{Sum}[h2[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2*j, 2*j + 2, 2\}], \\ \{j, 2, \text{Length}[P\text{siu}] - 1\}, \\ \{ \text{Sum}[u1[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[\text{Length}[P\text{siu}]][x], \{x, a, b\}], \\ \{i, \text{Length}[P\text{siu}] - 1, \text{Length}[P\text{siu}]\} + \\ \text{Sum}[h1[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[\text{Length}[P\text{siu}]][x], \{x, a, b\}], \\ \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 2, \text{Length}[P\text{sih}], 2\}] + \\ \text{Sum}[u1[[i]][t] * e1 * N\text{Integrate}[D\text{Psiu}[[i]][x] * D\text{Psiu}[\text{Length}[P\text{siu}]][x], \{x, a, b\}], \\ \{i, \text{Length}[P\text{siu}] - 1, \text{Length}[P\text{siu}]\} + \text{Sum}[h1[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \\ \text{edge}[\text{Length}[P\text{siu}]]] * P\text{siu}[\text{Length}[P\text{siu}]][\text{edge}[\text{Length}[P\text{siu}]]], \\ \{i1, \text{Length}[P\text{sih}] - 3, \text{Length}[P\text{sih}] - 1\}] + \text{Sum}[h2[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \\ \text{edge}[\text{Length}[P\text{siu}]]] * P\text{siu}[\text{Length}[P\text{siu}]][\text{edge}[\text{Length}[P\text{siu}]]], \\ \{i1, \text{Length}[P\text{sih}] - 3, \text{Length}[P\text{sih}] - 1\}] == \\ - \text{Sum}[h2[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[D\text{Psih}[[i]][x] * P\text{siu}[\text{Length}[P\text{siu}]][x], \{x, a, b\}], \\ \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 2, \text{Length}[P\text{sih}], 2\}];$$

$$\text{thrd} = \text{Join}[ \\ \{ \text{Sum}[h2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] + \\ - \text{Sum}[u2[[1]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], x \rightarrow \text{edge}[[1]], \\ \text{Direction} \rightarrow \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[[1]], \text{edge}[[1]]], \{i2, 2 - \text{upwind}, 2 - \text{upwind} + 1\}] + \\ (-0.5 * \text{upwind} + 0.5) * \text{Sum}[h2[[i]][t] * P\text{sih}[[i]][a] * P\text{sih}[[1]][a] * u2\hat{a}[a], \{i, 1, 2\}] == \\ (0.5 * \text{upwind} + 0.5) * h2\hat{a}[a] * u2\hat{a}[a] * P\text{sih}[[1]][a], \\ \text{Table}[\text{Sum}[h2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[[j]][x], \{x, a, b\}], \\ \{i, \text{Ceiling}[j, 2] - 1, \text{Ceiling}[j, 2]\}] + - \text{Sum}[u2[[i3]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], \\ x \rightarrow \text{edge}[[i3]], \text{Direction} \rightarrow \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[[j]], \text{edge}[[i3]]], \\ \{i2, 2 * i3 - \text{upwind}, 2 * i3 - \text{upwind} + 1\}, \{i3, \text{Ceiling}[j, 2]/2 - 1, \text{Ceiling}[j, 2]/2\}] == 0, \\ \{j, 3, \text{Length}[P\text{sih}] - 3, 2\}], \{ \text{Sum}[h2[[i]]'[t] * \\ N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[\text{Length}[P\text{sih}] - 1][x], \\ \{x, a, b\}], \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\} - \\ \text{Sum}[u2[\text{Length}[\text{edge}]]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], \\ x \rightarrow \text{edge}[\text{Length}[\text{edge}]], \text{Direction} \rightarrow \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[\text{Length}[P\text{sih}] - 1], \\ \text{edge}[\text{Length}[\text{edge}]]], \{i2, 2 * \text{Length}[\text{edge}] - \text{upwind}, 2 * \text{Length}[\text{edge}] - \text{upwind} + 1\}] + \\ (0.5 * \text{upwind} + 0.5) * \text{Sum}[h2[[i]][t] * P\text{sih}[[i]][b] * P\text{sih}[\text{Length}[P\text{sih}] - 1][b] * u2\hat{a}[b],$$

$$\begin{aligned}
& \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\} == \\
& (-0.5 * \text{upwind} + 0.5) * h2\hat{h}[b] * u2\hat{h}[b] * P\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}] - 1][b]], \\
& \{ \text{Sum}[h2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[[2]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] - \\
& \text{Sum}[u2[[1]][t] * h2[[i2]][t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[1]][x] * P\text{sih}[[i2]][x] * DP\text{sih}[[2]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i2, 1, 2\}] + -\text{Sum}[u2[[1]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], x - > \text{edge}[[1]], \\
& \text{Direction} - > \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[[2]], \text{edge}[[1]]], \{i2, 2 - \text{upwind}, 2 - \text{upwind} + 1\}] == 0\}, \\
& \text{Table}[\text{Sum}[h2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, \text{Ceiling}[j, 2] - 1, \\
& \text{Ceiling}[j, 2]\}] - \text{Sum}[u2[[i1]][t] * h2[[i2]][t] * \\
& N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i1]][x] * P\text{sih}[[i2]][x] * DP\text{sih}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i1, \text{Ceiling}[j, 2]/2 - 1, \\
& \text{Ceiling}[j, 2]/2\}], \{i2, \text{Ceiling}[j, 2] - 1, \text{Ceiling}[j, 2]\}] + \\
& - \text{Sum}[u2[[i3]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], x - > \text{edge}[[i3]], \\
& \text{Direction} - > \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[[j]], \text{edge}[[i3]]], \{i2, 2 * i3 - \text{upwind}, 2 * i3 - \text{upwind} + 1\}], \\
& \{i3, \text{Ceiling}[j, 2]/2 - 1, \text{Ceiling}[j, 2]/2\}] == 0, \{j, 4, \text{Length}[P\text{sih}] - 2, 2\}], \\
& \{ \text{Sum}[h2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{sih}[[i]][x] * P\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}]]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\}] - \text{Sum}[u2[[\text{Length}[P\text{siu}]]][t] * h2[[i2]][t] * \\
& N\text{Integrate}[P\text{siu}[[\text{Length}[P\text{siu}]]][x] * P\text{sih}[[i2]][x] * DP\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}]]][x], \\
& \{x, a, b\}], \{i2, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\}] + \\
& - \text{Sum}[u2[[\text{Length}[\text{edge}]]][t] * h2[[i2]][t] * \text{Limit}[P\text{sih}[[i2]][x], x - > \text{edge}[[\text{Length}[\text{edge}]]], \\
& \text{Direction} - > \text{upwind}] * \text{leap}[P\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}]]], \text{edge}[[\text{Length}[\text{edge}]]], \\
& \{i2, 2 * \text{Length}[\text{edge}] - \text{upwind}, 2 * \text{Length}[\text{edge}] - \text{upwind} + 1\}] + \\
& (0.5 * \text{upwind} + 0.5) * \text{Sum}[h2[[i]][t] * P\text{sih}[[i]][b] * P\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}]]][b] * u2\hat{h}[b], \\
& \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 1, \text{Length}[P\text{sih}]\}] == \\
& (-0.5 * \text{upwind} + 0.5) * h2\hat{h}[b] * u2\hat{h}[b] * P\text{sih}[[\text{Length}[P\text{sih}]]][b]];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{frth} = \text{Join}[ \\
& \{ \text{Sum}[u2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] + \\
& \text{Sum}[h2[[i]][t] * (g + g2) * N\text{Integrate}[DP\text{sih}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2, 4, 2\}] + \\
& \text{Sum}[u2[[i]][t] * e2 * N\text{Integrate}[DP\text{siu}[[i]][x] * DP\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 1, 2\}] + \\
& \text{Sum}[h2[[i1]][t] * (g + g2) * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[1]]] * P\text{siu}[[1]][\text{edge}[[1]]], \{i, 1, 3\}] + \\
& \text{Sum}[h1[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[1]]] * P\text{siu}[[1]][\text{edge}[[1]]], \{i, 1, 3\}] == \\
& - \text{Sum}[h1[[i]][t] * g * N\text{Integrate}[DP\text{sih}[[i]][x] * P\text{siu}[[1]][x], \{x, a, b\}], \{i, 2, 4, 2\}], \\
& \text{Table}[\text{Sum}[u2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \{i, j - 1, j + 1\}] + \\
& \text{Sum}[h2[[i]][t] * (g + g2) * N\text{Integrate}[DP\text{sih}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, 2 * j, 2 * j + 2, 2\}] + \text{Sum}[u2[[i]][t] * e2 * N\text{Integrate}[DP\text{siu}[[i]][x] * DP\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, j - 1, j + 1\}] + \text{Sum}[h2[[i1]][t] * (g + g2) * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[j]]] * P\text{siu}[[j]][\text{edge}[[j]]], \\
& \{i1, 2 * j - 1, 2 * j + 1\}] + \text{Sum}[h1[[i1]][t] * g * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[j]]] * P\text{siu}[[j]][\text{edge}[[j]]], \\
& \{i1, 2 * j - 1, 2 * j + 1\}] == -\text{Sum}[h1[[i]][t] * g * \\
& N\text{Integrate}[DP\text{sih}[[i]][x] * P\text{siu}[[j]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, 2 * j, 2 * j + 2, 2\}], \{j, 2, \text{Length}[P\text{siu}] - 1\}], \\
& \{ \text{Sum}[u2[[i]]'[t] * N\text{Integrate}[P\text{siu}[[i]][x] * P\text{siu}[[\text{Length}[P\text{siu}]]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, \text{Length}[P\text{siu}] - 1, \text{Length}[P\text{siu}]\}] + \text{Sum}[h2[[i]][t] * (g + g2) * \\
& N\text{Integrate}[DP\text{sih}[[i]][x] * P\text{siu}[[\text{Length}[P\text{siu}]]][x], \{x, a, b\}], \\
& \{i, \text{Length}[P\text{sih}] - 2, \text{Length}[P\text{sih}], 2\}] + \text{Sum}[u2[[i]][t] * e2 * \\
& N\text{Integrate}[DP\text{siu}[[i]][x] * DP\text{siu}[[\text{Length}[P\text{siu}]]][x], \{x, a, b\}], \{i, \text{Length}[P\text{siu}] - 1, \\
& \text{Length}[P\text{siu}]\}] + \text{Sum}[h2[[i1]][t] * (g + g2) * \text{leap}[P\text{sih}[[i1]], \text{edge}[[\text{Length}[P\text{siu}]]]] * \\
& P\text{siu}[[\text{Length}[P\text{siu}]]][\text{edge}[[\text{Length}[P\text{siu}]]]], \{i1, \text{Length}[P\text{sih}] - 3, \text{Length}[P\text{sih}] - 1\}] +
\end{aligned}$$

```

Sum[h1[[i1]][t] * g * leap[Psih[[i1]], edge[Length[Psiu]]] *
Psiu[[Length[Psiu]][edge[Length[Psiu]]],
{i1, Length[Psih] - 3, Length[Psih] - 1}] == -Sum[h1[[i]][t] * g *
NIntegrate[DPsih[[i]][x] * Psiu[[Length[Psiu]][x], {x, a, b}],
{i, Length[Psih] - 2, Length[Psih], 2}]];

hmat = Table[ArrayPad[{NIntegrate[Psih[[Ceiling[j, 2] - 1]][x] * Psih[[j]][x],
{x, a, b}], NIntegrate[Psih[[Ceiling[j, 2]]][x] * Psih[[j]][x], {x, a, b}],
{Ceiling[j, 2] - 2, Length[Psih] - Ceiling[j, 2]}], {j, Length[Psih]}];

umat = Join[{PadRight[{NIntegrate[Psiu[[1]][x] * Psiu[[1]][x], {x, a, b}],
NIntegrate[Psiu[[2]][x] * Psiu[[1]][x], {x, a, b}], Length[Psiu]}],
Table[ArrayPad[{NIntegrate[Psiu[[j - 1]][x] * Psiu[[j]][x], {x, a, b}],
NIntegrate[Psiu[[j]][x] * Psiu[[j]][x], {x, a, b}],
NIntegrate[Psiu[[j + 1]][x] * Psiu[[j]][x], {x, a, b}], {j - 2, Length[Psiu] - j - 1}],
{j, 2, Length[Psiu] - 1}], {PadLeft[{NIntegrate[Psiu[[Length[Psiu] - 1]][x] *
Psiu[[Length[Psiu]]][x], {x, a, b}],
NIntegrate[Psiu[[Length[Psiu]]][x] * Psiu[[Length[Psiu]]][x],
{x, a, b}], Length[Psiu]}];

hrhs1 = Table[NIntegrate[hini1[x] * Psih[[j]][x], {x, a, b}], {j, Length[Psih]}];
hrhs2 = Table[NIntegrate[hini2[x] * Psih[[j]][x], {x, a, b}], {j, Length[Psih]}];

urhs1 = Table[NIntegrate[uini1[x] * Psiu[[j]][x], {x, a, b}], {j, Length[Psiu]}];
urhs2 = Table[NIntegrate[uini2[x] * Psiu[[j]][x], {x, a, b}], {j, Length[Psiu]}];

haux1 = LinearSolve[hmat, hrhs1];
haux2 = LinearSolve[hmat, hrhs2];
uaux1 = LinearSolve[umat, urhs1];
uaux2 = LinearSolve[umat, urhs2];

ini1 = Table[h1[[j]][0] == haux1[[j]], {j, Length[h1]}];
ini2 = Table[h2[[j]][0] == haux2[[j]], {j, Length[h2]}];
ini3 = Table[u1[[j]][0] == uaux1[[j]], {j, Length[u1]}];
ini4 = Table[u2[[j]][0] == uaux2[[j]], {j, Length[u2]}];

s28 = NDSolve[Join[frst, scnd, thrd, frth, ini1, ini2, ini3, ini4],
Join[h1, h2, u1, u2], {t, 0, 2000}, MaxSteps -> Infinity, StartingStepSize -> 0.25,
Method -> {"FixedStep", Method -> "ExplicitEuler"}];

Animate[Plot[{Sum[Evaluate[h1[[j]][t]/.s28][[1]] * Psih[[j]][x],
{j, Length[Psih]}] + Sum[Evaluate[h2[[j]][t]/.s28][[1]] * Psih[[j]][x],
{j, Length[Psih]}], Sum[Evaluate[h2[[j]][t]/.s28][[1]] * Psih[[j]][x],
{j, Length[Psih]}], {x, a, b}, PlotRange -> 10], {t, 0, 120},
AnimationRunning -> False, DefaultDuration -> 60]

Animate[Plot[{Sum[Evaluate[u1[[j]][t]/.s28] * Psiu[[j]][x],
{j, Length[Psiu]}], Sum[Evaluate[u2[[j]][t]/.s28] * Psiu[[j]][x], {j, Length[Psiu]}],
{x, a, b}, PlotRange -> 2], {t, 0, 120}, AnimationRunning -> False,
DefaultDuration -> 60]

```



# Bibliografia

- [Kundu, 2004] P.K.Kundu, I.M.Cohen: *Fluid Mechanics*, 3ª edição, Elsevier Academic Press, 2004
- [Vallis, 2006] G.K.Vallis: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2006
- [Teixeira e Lebre, 1995] F.S.Teixeira, A.B.Lebre: *Apontamentos de Análise Funcional 1*, Secção de Folhas AEIST, 1995
- [Alves, 2000] C.J.S.Alves: *Introdução a Métodos Numéricos para Problemas Elípticos*, Secção de Folhas AEIST, 2000
- [Brenner e Scott, 1994] S.C.Brenner, L.R.Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Method*, Springer-Verlag, 1994
- [Johnson, 1987] C.Johnson: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Studentlitteratur, 1987
- [Quarteroni e Valli, 1994] A.Quarteroni, A.Valli: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1994
- [Thomee, 1997] V.Thomé: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer-Verlag, 1997
- [Dawson e Proft, 2002] C.Dawson, J.Proft: *Discontinuous and Coupled/Discontinuous Galerkin Methods for the Shallow Water equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 191, pp. 4721-4746, 2002
- [Arnold et al., 2000] D.N.Arnold, F.Brezzi, B.Cockburn, D.Marini: *Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B.Cockburn, G.E.Karniadakis e C.-W.Shu (eds.), pp. 89-101, Springer-Verlag, 2000
- [Arnold et al., 2002] D.N.Arnold, F.Brezzi, B.Cockburn, D.Marini: *Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems*, SIAM J. Numer. Anal., vol.39, 5, pp. 1749-1779, 2002
- [Brezzi et al.] F.Brezzi, M.Manzani, D.Marini, P.Pietra, A.Russo: *Discontinuous Finite Elements for Diffusion Problems*

- [Cockburn et al., 2000] B.Cockburn, G.E.Karniadakis, C.-W.Shu: *The Development of Discontinuous Galerkin Methods*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B.Cockburn, G.E. Karniadakis e C.-W.Shu (eds.), pp. 3-50, Springer-Verlag, 2000
- [Franca et al., 2003] L.P.Franca, G.Hauke, A. Masud: *Stabilized Finite Element Methods*, Finite Element Methods: 1970s and Beyond, L.P.Franca (ed.), 2003
- [Rivière et al., 1999] B.Rivière, M.F.Wheeler, V.Girault: *Improved Energy Estimates for Interior Penalty, Constrained and Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems, Part1*, Computational Geosciences, 3, pp. 337-360, 1999