

Análise Numérica para as Equações de Águas Rasas em Duas Camadas

Pedro Gonçalves

Abstract: As equações de águas rasas são usadas para modelar situações como interações entre água salgada e fresca ou dispersão de poluentes na água. Nesta tese vamos fazer uma pequena introdução a estas equações; vamos estudar a sua aproximação pelo método dos elementos finitos, usando para a semi-discretização espacial técnicas como métodos de estabilização e o método de Galerkin descontínuo, para além do normal método de Galerkin; vamos deduzir estimativas para o erro *a priori* e vamos apresentar alguns resultados numéricos.

Keywords: Equações de águas rasas, método de Galerkin descontínuo, semi-discretização, métodos de estabilização, método dos elementos finitos

Contents

1	Introdução
2	Equações de Águas Rasas
3	Formulação Fraca do Problema
3.1	Estabilização
4	Formulação Discreta
4.1	Semi-discretização espacial
5	Estimativas de Erro
6	Implementação
6.1	Resultados do problema de teste
7	Conclusões e Trabalho Futuro

1. INTRODUÇÃO

1 Na maior parte das vezes que tentamos estudar situações da vida real por um modelo matemático deparamo-nos com uma equação diferencial, sobretudo quando pretendemos modelar fenómenos físicos. Se se tratar de uma equação diferencial ordinária, o tratamento do problema pode não se revelar demasiado complicado devido à extensa teoria existente para a resolução de EDOs. No entanto, se se tratar de uma equação diferencial parcial o caso torna-se um pouco mais complicado. É então importante dispormos de ferramentas adequadas que nos permitam obter uma solução aproximada de qualidade, idealmente de fácil obtenção.

5 Um desses problemas de interesse, e que vamos considerar nesta tese, é o das *equações de águas rasas*. Apesar de ser um modelo relativamente simples para o comportamento de escoamentos em águas pouco profundas, permite estudar (na forma multicamada) os efeitos da estratificação, e é considerado um bom modelo para muitos fenómenos oceânicos e atmosféricos; por exemplo interações água fresca/água salgada, dispersão de poluentes na água, etc.[Dawson e Proft (2002)] Para discretizar este problema, que dá origem a um sistema de equações diferenciais parciais, vamos usar uma das melhores ferramentas disponíveis actualmente: o método dos elementos finitos. Conjugando o método de Galerkin usual com técnicas de estabilização (na aproximação da equação do momento), e usando o método de Galerkin descontínuo para a discretização espacial da equação de continuidade, obtemos um problema semi-discreto, isto é, um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas.

A principal contribuição desta tese no estudo deste problema está na dedução de estimativas de erro a priori para este método de elementos finitos. É também feita uma implementação computacional do problema e a sua aplicação a um problema de teste.

2. EQUAÇÕES DE ÁGUAS RASAS

Em Geofísica, no estudo de fenómenos atmosféricos e oceânicos, é frequente surgirem situações nas quais o

comprimento de onda de uma onda gravítica à superfície de um fluido é muito superior à espessura da camada de fluido considerada, fazendo com que a componente vertical da velocidade seja negligível face à componente horizontal. Considerando que esse fluido se encontra em equilíbrio hidrostático, e que o movimento das partículas é independente da altura, podemos obter a equação da continuidade (para uma camada)

$$\partial_t \zeta_j + \nabla \cdot (\zeta_j \mathbf{u}_j) = 0 \quad (1)$$

na qual $\zeta_j = \zeta_j(\mathbf{x}, t)$ representa a espessura dessa camada e $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_{j,1}(\mathbf{x}, t), u_{j,2}(\mathbf{x}, t))$ a velocidade horizontal do fluido, a partir da equação da conservação da massa, integrando na componente vertical e substituindo a expressão referente à velocidade vertical pela condição cinemática na superfície livre. Para as equações do momento sobre as componentes horizontais, limitamo-nos a considerar a pressão na sua forma hidrostática.

Considerando duas camadas de fluido de diferentes densidades e desprezando em cada uma o termo advectivo ($\mathbf{u}_j \cdot \nabla$) \mathbf{u}_j , obtemos então as equações que nos vão interessar:

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta_1 + \nabla \cdot (\zeta_1 \mathbf{u}_1) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_1 - \nu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + g \nabla \zeta_1 &= -g \nabla \zeta_2 \\ \partial_t \zeta_2 + \nabla \cdot (\zeta_2 \mathbf{u}_2) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u}_2 - \nu_2 \Delta \mathbf{u}_2 + (g + g') \nabla \zeta_2 &= -g \nabla \zeta_1 \end{aligned} \quad (2)$$

(em que ν_j é a viscosidade cinemática na camada j , g é a aceleração da gravidade, g' é a gravidade reduzida na camada 2 (dada por $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$) e ρ_j é a densidade da camada j)

com as seguintes condições iniciais e de fronteira:

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \hat{\zeta}_j & \text{em } \partial\Omega_I \\ \zeta_j(\mathbf{x}, 0) &= \zeta_{0,j} & \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}_j &= \hat{\mathbf{u}}_j & \text{em } \partial\Omega \\ \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_{0,j} & \text{em } \Omega \end{aligned}$$

em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é um aberto com fronteira de Lipschitz, $\partial\Omega$ a sua fronteira, $\partial\Omega_I = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0\}$, para um vector \mathbf{n} normal exterior a $\partial\Omega$, $\partial\Omega_O = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_I$ e funções $\hat{\zeta}_j$, $\zeta_{0,j}$, $\hat{\mathbf{u}}_j$ e $\mathbf{u}_{0,j}$ conhecidas à partida.

3. FORMULAÇÃO FRACA DO PROBLEMA

Seja $\Omega_e \subseteq \Omega$ um subconjunto de Ω com fronteira de Lipschitz, de tal forma que a união $\cup_e \Omega_e$ constitua uma triangulação de Ω . Comece-se por multiplicar, formalmente, as equações da continuidade por uma função teste $v_j \in H^1(\Omega_e)$, $j \in \{1, 2\}$. Integrando por partes em cada Ω_e , obtemos:

$$(\partial_t \zeta_1, v_1)_{\Omega_e} - (\mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_e, v_1 \rangle_{\partial\Omega_e} = 0 \quad (3)$$

$$(\partial_t \zeta_2, v_2)_{\Omega_e} - (\mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_e, v_2 \rangle_{\partial\Omega_e} = 0 \quad (4)$$

Multiplicando formalmente as equações do momento por uma função teste $\mathbf{w}_j \in H_0^1(\Omega)$, $j \in \{1, 2\}$, e integrando por partes em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_t \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \nu_1(\nabla \mathbf{u}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} &= \\ -g(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_1)_{\Omega} & \\ (\partial_t \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + (g + g')(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + \nu_2(\nabla \mathbf{u}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} &= \\ -g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_2)_{\Omega} & \end{aligned}$$

3.1 Estabilização

Ao escolher funções $\zeta_j \in H^1(\Omega)$ não garante que elas sejam contínuas de elemento para elemento Ω_e . É útil então juntar ao método termos de estabilização que ajudem a melhorar os resultados numéricos e as estimativas de erro.

Seja \mathbf{n}_i um vector normal a uma aresta interior γ_i . Dada uma função $v_j \in H^1(\Omega_e)$, o seu traço nas arestas interiores é dado por $v_j^-(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^-} v_j(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$ e $v_j^+(\mathbf{x}) = \lim_{s \rightarrow 0^+} v_j(\mathbf{x} + s\mathbf{n}_i)$, para $\mathbf{x} \in \gamma_i$. Definimos ainda o salto de v_j como $[v_j] = v_j^- - v_j^+$.

Vamos então adicionar o termo de estabilização $-\sum_i g \langle [\zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i g \langle [\zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i}$ e o termo $-\sum_i g \langle [\zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i (g + g') \langle [\zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i}$ às respectivas equações do momento. Note-se que, como a função ζ_j do problema original é suposta contínua, estes termos são na verdade nulos.

Somando as equações (3), a formulação fraca do problema é, então, a seguinte:

Encontrar $(\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in (H^1(\Omega), H^1(\Omega), H^1(\Omega)H^1(\Omega))$ tais que:

$$\begin{aligned} \sum_e (\partial_t \zeta_1, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_1 \zeta_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} \\ + \langle \zeta_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_O} = \langle \hat{\zeta}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_I}, \quad \forall v_1 \in H^1(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_1)_{\Omega} + \nu_1(\nabla \mathbf{u}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_{\Omega} - \\ \sum_i g \langle [\zeta_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i g \langle [\zeta_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = \\ -g(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_1)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{w}_1 \in H_0^1(\Omega) \\ \sum_e (\partial_t \zeta_2, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{u}_2 \zeta_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} \\ + \langle \zeta_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_O} = \langle \hat{\zeta}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_I}, \quad \forall v_2 \in H^1(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + (g + g')(\nabla \zeta_2, \mathbf{w}_2)_{\Omega} + \nu_2(\nabla \mathbf{u}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_{\Omega} - \\ \sum_i g \langle [\zeta_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i (g + g') \langle [\zeta_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = \\ -g(\nabla \zeta_1, \mathbf{w}_2)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{w}_2 \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Repare-se que, se a função ζ_j do problema original for contínua, os termos $\sum_i \langle \zeta_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i}$ e $\sum_i \langle \zeta_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i}$ são nulos.

4. FORMULAÇÃO DISCRETA

Começemos por apresentar os espaços em que vamos trabalhar: seja $\mathcal{S}^k(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : v|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}^k(\Omega_e)\}$ o espaço em que vamos aproximar ζ_j , em que $\mathcal{P}^k(\Omega_e)$ é o espaço das funções polinomiais de grau k em Ω_e ; $W_h^1(\Omega) \subseteq (H^1(\Omega))^2 \cap \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_1\}$ o espaço em que aproximamos \mathbf{u}_1 e $W_h^2(\Omega) \subseteq (H^1(\Omega))^2 \cap \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_2\}$ o espaço em que aproximamos \mathbf{u}_2 . Sejam ainda $W_{0,h}^j(\Omega)$ os

correspondentes subespaços de $(H_0^1(\Omega))^2$. Definimos ainda $V_h^c(\Omega) = \mathcal{S}^k(\Omega) \cap C^0(\Omega)$.

Vamos então aproximar, para t fixo, $\zeta_j(\cdot, t)$ por $Z_j(\cdot, t) \in \mathcal{S}^k(\Omega)$ e $\mathbf{u}_j(\cdot, t)$ por $\mathbf{U}_j(\cdot, t) \in W_h^j(\Omega)$. Temos em atenção que o valor de ζ_j nas fronteiras entre elementos γ_i deve ser aproximado pelo seu *upwind value* Z_j^\uparrow :

$$\zeta_j \approx Z_j^\uparrow = \begin{cases} Z_j^- & \text{se } \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i > 0 \text{ em } \gamma_i \\ Z_j^+ & \text{se } \mathbf{U}_j \cdot \mathbf{n}_i \leq 0 \text{ em } \gamma_i \end{cases}$$

Para $t = 0$ definimos $Z_j(\cdot, 0) = Z_{0,j} \in \mathcal{S}^k(\Omega)$ e $\mathbf{U}_j(\cdot, 0) = \mathbf{U}_{0,j} \in W_h^j(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} (Z_{0,j} - \zeta_{0,j}, v_j)_\Omega &= 0 & \forall v \in \mathcal{S}^k(\Omega)(\Omega) \\ (\mathbf{U}_{0,j} - \mathbf{u}_{0,j}, \mathbf{w}_j)_\Omega &= 0 & \forall \mathbf{w} \in W_{0,h}(\Omega) \end{aligned}$$

A formulação discreta para as EAR é então a seguinte: para cada $t > 0$, encontrar $(Z_1, Z_2, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \in (\mathcal{S}^k(\Omega), \mathcal{S}^k(\Omega), W_h^1(\Omega), W_h^2(\Omega))$ tais que:

$$\begin{aligned} \sum_e (\partial_t Z_1, v_1)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{U}_1 Z_1, \nabla v_1)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_1^\uparrow \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i, [v_1] \rangle_{\gamma_i} \\ + \langle Z_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_O} = - \langle \hat{\zeta}_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}, v_1 \rangle_{\partial\Omega_I} \quad \forall v_1 \in \mathcal{S}^k(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{U}_1, \mathbf{w}_1)_\Omega + \sum_e g(\nabla Z_1, \mathbf{w}_1)_\Omega + \nu_1 (\nabla \mathbf{U}_1, \nabla \mathbf{w}_1)_\Omega \\ - \sum_i g(\langle [Z_1], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i g(\langle [Z_2], \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = \\ -g(\nabla Z_2, \mathbf{w}_1)_\Omega, \quad \forall \mathbf{w}_1 \in W_h^1(\Omega) \\ \sum_e (\partial_t Z_2, v_2)_{\Omega_e} - \sum_e (\mathbf{U}_2 Z_2, \nabla v_2)_{\Omega_e} + \sum_i \langle Z_2^\uparrow \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i, [v_2] \rangle_{\gamma_i} \\ + \langle Z_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_O} = - \langle \hat{\zeta}_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}, v_2 \rangle_{\partial\Omega_I} \quad \forall v_2 \in \mathcal{S}^k(\Omega) \\ (\partial_t \mathbf{U}_2, \mathbf{w}_2)_\Omega + \sum_e (g + g')(\nabla Z_2, \mathbf{w}_2)_\Omega + \nu_2 (\nabla \mathbf{U}_2, \nabla \mathbf{w}_2)_\Omega \\ - \sum_i g(\langle [Z_1], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} - \sum_i (g + g') \langle [Z_2], \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\gamma_i} = \\ -g(\nabla Z_1, \mathbf{w}_2)_\Omega, \quad \forall \mathbf{w}_2 \in W_h^2(\Omega) \end{aligned}$$

4.1 Semi-discretização espacial

Uma vez que as funções \mathbf{U}_j e Z_j dependem de uma variável espacial \mathbf{x} e de uma variável temporal t , põe-se a questão de como enquadrar esta situação no contexto da aproximação por elementos finitos. Estão propostos vários métodos na literatura ([Johnson (1987)], [Thomee (1997)]); nesta situação, usamos uma semi-discretização espacial das funções \mathbf{U}_j e Z_j , isto é, consideramos coeficientes variáveis no tempo para a sua representação por elementos finitos:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{i_Z} z_{i_Z,1}(t) \Psi_{i_Z}^Z \\ Z_2 &= \sum_{i_Z} z_{i_Z,2}(t) \Psi_{i_Z}^Z \\ \mathbf{U}_1 &= \sum_{i_U} u_{i_U,1}(t) \Psi_{i_U}^U \\ \mathbf{U}_2 &= \sum_{i_U} u_{i_U,2}(t) \Psi_{i_U}^U \end{aligned}$$

para funções base $\Psi_{i_Z}^Z$ e $\Psi_{i_U}^U = (\Psi_{i_U,1}^U, \Psi_{i_U,2}^U)$ adequadas ao problema. Assim, ao substituir as funções \mathbf{U}_j e Z_j por esta sua aproximação na formulação variacional discreta, obtemos um sistema de EDOs no qual as incógnitas são os coeficientes $z_{i_Z,1}(t)$, $z_{i_Z,2}(t)$, $u_{i_U,1}(t)$ e $u_{i_U,2}(t)$ da aproximação por elementos finitos.

5. ESTIMATIVAS DE ERRO

Visto que pretendemos obter estimativas para os erros $\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j$ e $\zeta_j - Z_j$, é-nos útil definir os seguintes termos:

$$\begin{aligned} e_{\zeta_j} &= Z_j - \zeta_j \\ \theta_{\zeta_j} &= \zeta_j - \zeta_{I_j} \\ e_{\zeta_j}^\uparrow &= Z_j^\uparrow - \zeta_{I_j} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j} &= \mathbf{U}_j - \Pi \mathbf{u}_j \\ \theta_{\mathbf{u}_j} &= \mathbf{u}_j - \Pi \mathbf{u}_j \end{aligned}$$

em que $\zeta_{I_j}(\cdot, t) \in V_h^c(\Omega)$ é o interpolante contínuo de ζ_j (cf. [Brenner e Scott (1994)]) e $\Pi \mathbf{u}_j(\cdot, t) \in W_h^j(\Omega)$ é a projecção parabólica de \mathbf{u}_j (ver [Dawson e Proft (2002)] e [Gonçalves (2010)]).

Tendo em conta as estimativas sobre erros de interpolação e as desigualdades auxiliares apresentadas em [Gonçalves (2010)], é possível demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 5.1. Para $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \zeta_1$ e ζ_2 a que verifiquem a formulação discreta, as equações satisfazem a estimativa de erro

$$\| (e_{\zeta_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}) \| \leq K_1 h^k \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} 2 \| (e_{\zeta_j}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_j}) \|^2 &= \| e_{\zeta_1}(T) \|_\Omega^2 + \| e_{\zeta_2}(T) \|_\Omega^2 + \\ &+ \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1}(T) \|_\Omega^2 + \| \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2}(T) \|_\Omega^2 + \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_1}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \\ &+ \int_0^T \sum_i \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}_i|, [e_{\zeta_2}]^2 \rangle_{\gamma_i} dt + \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \\ &+ \int_0^T \langle |\hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_O} dt + \int_0^T \langle |\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_1}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \\ &+ \int_0^T \langle |\mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{n}|, e_{\zeta_2}^2 \rangle_{\partial\Omega_I} dt + \int_0^T \| \nu_1^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_1} \|_\Omega^2 dt + \\ &+ \int_0^T \| \nu_2^{1/2} \nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_2} \|_\Omega^2 dt \end{aligned}$$

em que K_1 é uma constante independente de h e k , em que $\| \cdot \|_\Omega$ é a norma em $L^2(\Omega)$.

A partir do teorema é fácil obter como corolário de interesse:

Corolário 1.

$$\|(\zeta_j - Z_j)(T)\|_{\Omega} + \|(\mathbf{u}_j - \mathbf{U}_j)(T)\|_{\Omega} \leq K_1 h^k$$

6. IMPLEMENTAÇÃO

6.1 Resultados do problema de teste

Para problema de teste, considerámos uma versão unidimensional das equações de águas rasas, com as condições iniciais e de fronteira:

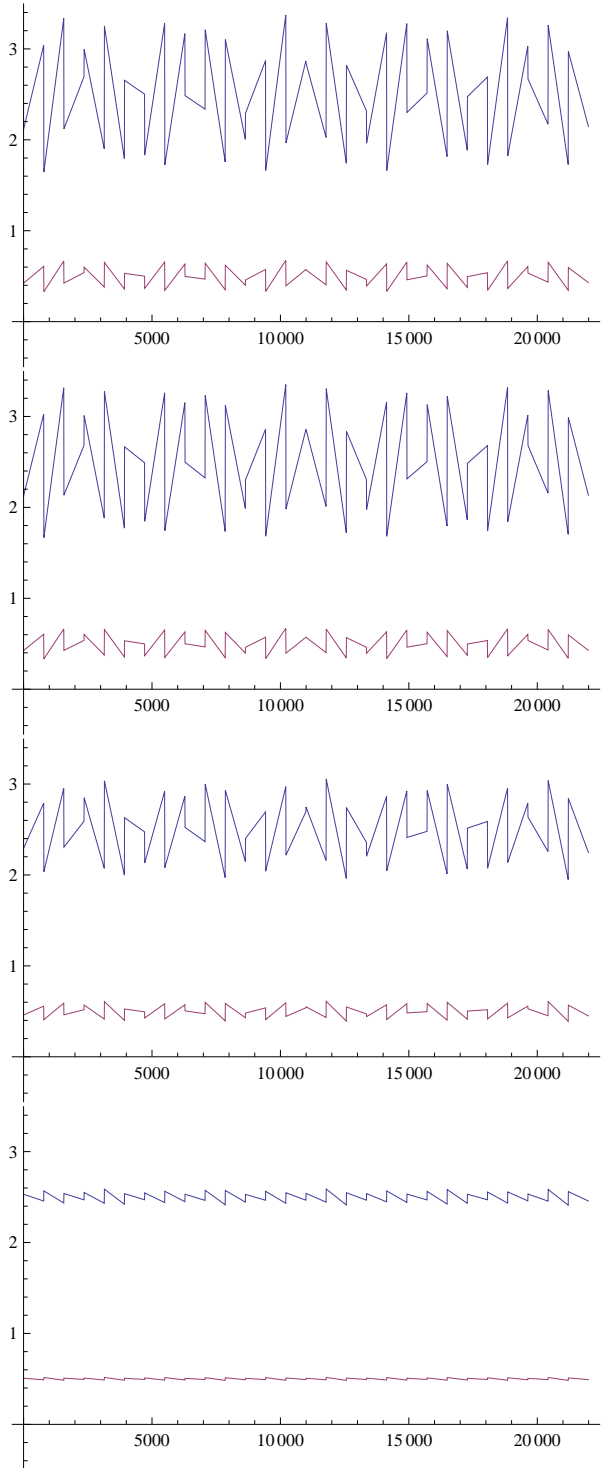
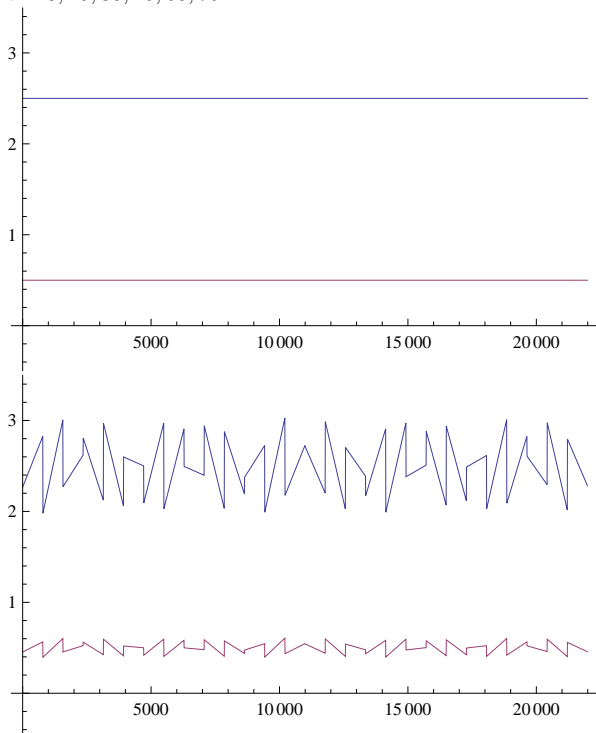
$$\begin{aligned} \zeta_1(x, 0) &= 2 & x \in \Omega \\ \zeta_2(x, 0) &= 0.5 & x \in \Omega \\ \zeta_1 &= 2 & \text{em } \partial\Omega_I \\ \zeta_2 &= 0.5 & \text{em } \partial\Omega_I \\ u_1(x, 0) = u_2(x, 0) &= \sin\left(\frac{x}{700}\right) & x \in \Omega \\ u_1 = u_2 &= \sin\left(\frac{x}{700}\right) & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

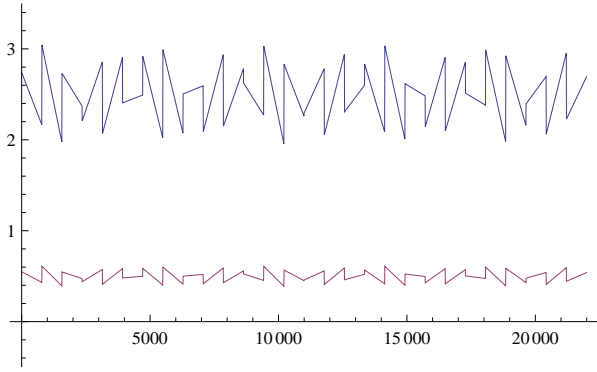
e funções base polinomiais de grau 1, contínuas entre elementos no caso de U_j e (potencialmente) descontínuas de elemento para elemento no caso de Z_j :

$$\begin{aligned} \{\Psi_{iZ}^Z\} &= \cup_e(\{\chi_{\Omega_e}\} \cup \left\{\frac{x-a_e}{b_e-a_e}\chi_{\Omega_e}\right\}), \text{ para } \Omega_e = [a_e, b_e] \\ \{\Psi_{iU}^U\} &= \cup_e\left(\frac{x-a_e}{b_e-a_e}\chi_{\Omega_{A_e}} - \frac{x-b_e}{c_e-b_e}\chi_{\Omega_{B_e}}\right), \\ &\text{para elementos } \Omega_{A_e} = [a_e, b_e] \text{ e } \Omega_{B_e} = [b_e, c_e] \end{aligned}$$

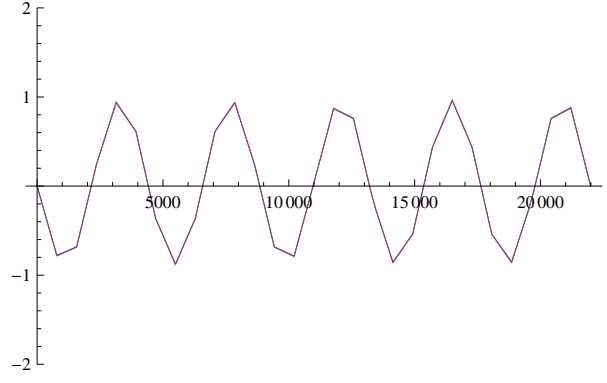
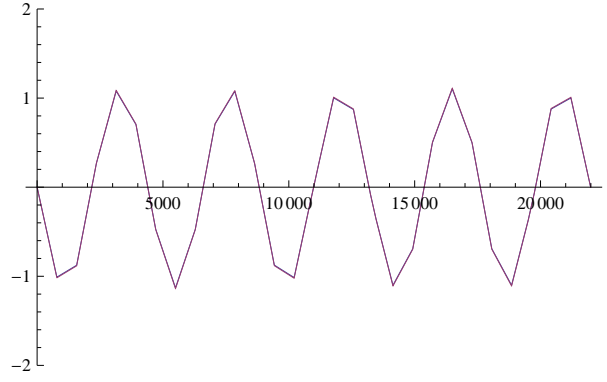
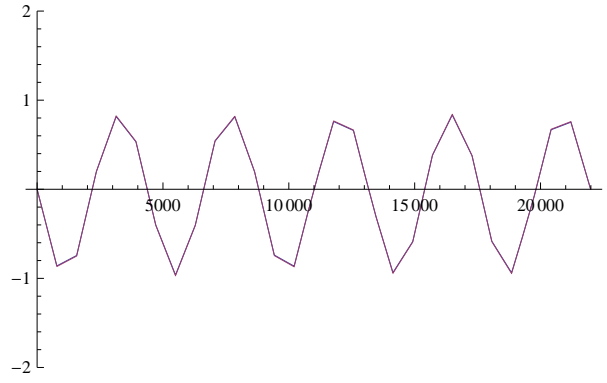
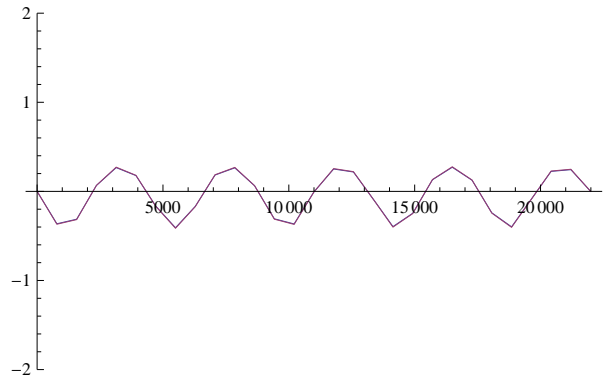
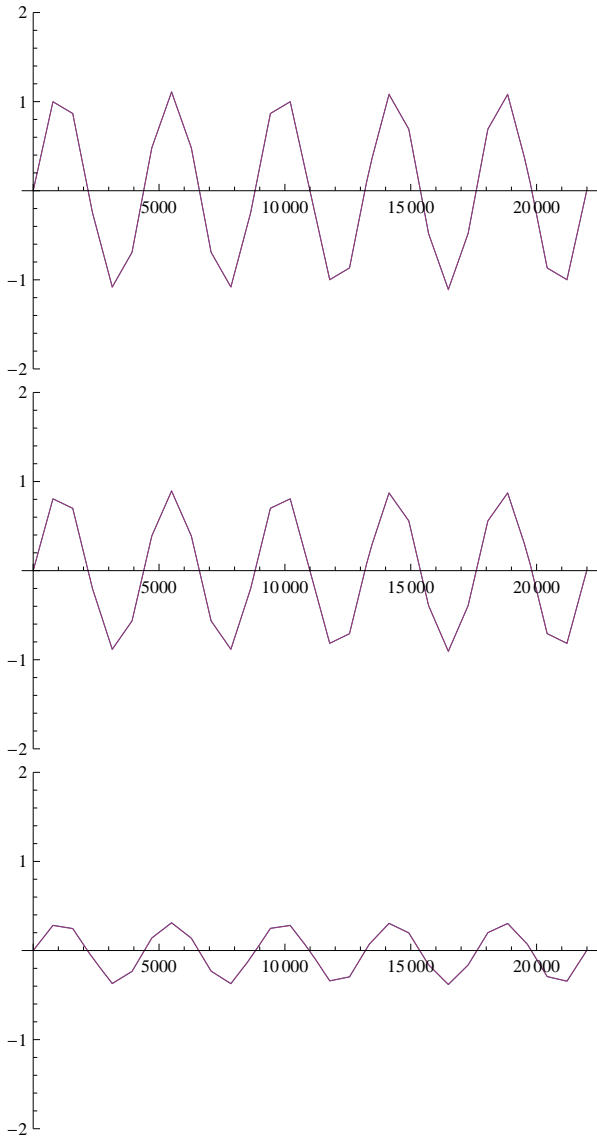
Abaixo encontram-se alguns gráficos das soluções obtidas.

Elevação vertical da camada 1(a azul) e da camada 2(a rosa), para $t = 0, 15, 30, 45, 60, 75$





Velocidade horizontal na camada 1(a azul) e na camada 2(a rosa), para $t = 0, 15, 30, 45, 60, 75$



7. CONCLUSÕES E TRABALHO FUTURO

Nesta tese introduzimos uma versão simplificada das equações de águas rasas em duas camadas. Fizemos uma aproximação pelo método dos elementos finitos - aproximando as equações do momento por uma conjugação do método de Galerkin standard com um termo de estabilização e as equações da conservação da massa por um método de Galerkin descontínuo. Deduzimos uma estima-

tiva de erro *a priori* para este método, tendo, na sequência de [Dawson e Proft (2002)] obtido o resultado esperado: convergência de ordem h^k . Para terminar, implementámos o método para um problema de teste unidimensional.

Os próximos passos a tomar para desenvolvimento deste trabalho são os seguintes:

- Implementar o método numa linguagem que permita melhor desempenho (ex. C++), para obter resultados com maior relevância, nomeadamente na convergência;
- Na sequência de [Dawson e Proft (2002)], tentar também aproximar estas equações por um método DG/NIPG (Nonsymmetric Inferior Penalty Galerkin) para termos um termo de comparação com este método.
- Tentar implementar o método para um problema bidimensional, mais próximo da realidade;
- Generalizar esses resultados para a versão multicamada das equações.

B.Rivière, M.F.Wheeler, V.Girault: *Improved Energy Estimates for Interior Penalty, Constrained and Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems, Part1*, Computational Geosciences, 3, pp. 337-360, 1999

P.Gonçalves: *Análise Numérica para as Equações de Águas Rasas em Duas Camadas*, Dissertação para a obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, 2010

REFERENCES

- P.K.Kundu, I.M.Cohen: *Fluid Mechanics*, 3ª edição, Elsevier Academic Press, 2004
- G.K.Vallis: *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2006
- F.S.Teixeira, A.B.Lebre: *Apontamentos de Análise Funcional 1*, Secção de Folhas AEIST, 1995
- C.J.S.Alves: *Introdução a Métodos Numéricos para Problemas Elípticos*, Secção de Folhas AEIST, 2000
- S.C.Brenner, L.R.Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Method*, Springer-Verlag, 1994
- C.Johnson: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Studentlitteratur, 1987
- A.Quarteroni, A.Valli: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1994
- V.Thomé: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*, Springer-Verlag, 1997
- C.Dawson, J.Proft: *Discontinuous and Coupled/Discontinuous Galerkin Methods for the Shallow Water equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 191, pp. 4721-4746, 2002
- D.N.Arnold, F.Brezzi, B.Cockburn, D.Marini: *Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B.Cockburn, G.E.Karniadakis e C.-W.Shu (eds.), pp. 89-101, Springer-Verlag, 2000
- D.N.Arnold, F.Brezzi, B.Cockburn, D.Marini: *Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems*, SIAM J. Numer. Anal., vol.39, 5, pp. 1749-1779, 2002
- F.Brezzi, M.Manzani, D.Marini, P.Pietra, A.Russo: *Discontinuous Finite Elements for Diffusion Problems*
- B.Cockburn, G.E.Karniadakis, C.-W.Shu: *The Development of Discontinuous Galerkin Methods*, Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications, B.Cockburn, G.E. Karniadakis e C.-W.Shu (eds.), pp. 3-50, Springer-Verlag, 2000
- L.P.Franca, G.Hauke, A. Masud: *Stabilized Finite Element Methods*, Finite Element Methods: 1970s and Beyond, L.P.Franca (ed.), 2003