

Modelação do Campo Sonoro

Susana Quaresma

1. Introdução

Pretende-se estudar o problema da propagação do som num compartimento fechado livre de obstáculos. Desenvolveu-se um programa de elementos finitos em linguagem *FORTRAN* para resolver problemas acústicos lineares [1] e utilizou-se ainda como ferramenta de trabalho o programa *ABAQUS* [2]. A diferença destes programas incide essencialmente sobre a formulação utilizada para obter a solução do problema. Utilizaram-se dois tipos de elementos finitos. O elemento acústico de campo único, disponível no programa *ABAQUS*, baseia-se numa aproximação polinomial do campo de pressão usando elementos isoparamétricos, garantindo-se tanto a condição de equilíbrio no domínio dos elementos como a continuidade do campo de pressões entre elementos. O segundo tipo de elemento, o elemento híbrido-Trefftz, baseia-se numa aproximação definida pela combinação das soluções analíticas da equação da onda. Todas as condições são satisfeitas no domínio do elemento mas não se garante a continuidade da pressão ou dos deslocamentos entre elementos.

Um dos problemas mais correntes da Acústica é a modelação da propagação do som provocado por uma fonte sonora numa sala fechada. Em termos práticos é também importante obter os espectros de resposta que caracterizam esses campos sonoros. É possível atribuir às paredes do compartimento diferentes propriedades (as condições de fronteira do problema), as quais afectam de maneira diferente as características do campo sonoro provocado por uma mesma fonte. As superfícies podem ser modeladas rígidas, livres ou com um determinado valor de impedância. No primeiro caso garante-se ser nula a componente da velocidade (ou do deslocamento) das partículas normal à superfície. No segundo admite-se que são livres as componentes do deslocamento das partículas mas imposta a pressão a que estão sujeitas. No terceiro caso assume-se que as características da superfície são tais que essa componente é proporcional à pressão das partículas e/ou à sua variação no tempo.

Foram seleccionados problemas de teste que permitissem validar a formulação de elementos finitos desenvolvida especificamente para este trabalho. Esses problemas foram resolvidos para uma grande gama frequências de excitação, entre 1 Hz e 500 Hz, e diferentes condições de fronteira e de carga. Todos esses testes foram realizados admitindo uma massa volumica $\rho = 1,188 \text{ Kg/m}^3$ e um módulo de compressibilidade volumétrica $K = 1,42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Para as paredes não rígidas admitiu-se uma impedância $Z = 81100 \text{ Kg/m}^2\text{s}$. Considerou-se ainda que a contribuição das forças de massa para o campo de pressão é desprezável face às acções que foram consideradas, designadamente pressões impostas e fontes sonoras.

2. Equações da Acústica Linear

É conveniente, para facilitar a interpretação das formulações de elementos finitos, formular as equações da Acústica por analogia com as equações que caracterizam os problemas de Mecânica dos Sólidos. Considera-se um volume genérico, V , e a fronteira que o limita, Γ , e definem-se as equações que caracterizam a propagação do som nesse domínio.

No domínio V asseguram-se as condições de equilíbrio acústico, as quais relacionam o gradiente da pressão (de compressão), p , com as forças de massa, \mathbf{b} , e com as forças de inércia e de amortecimento,

$$-\nabla p + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + \gamma \dot{\mathbf{u}}$$

em que ρ e γ definem a massa volúmica e o coeficiente de amortecimento, sendo $\ddot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{u}}$ os vectores de aceleração e de velocidade. A condição de compatibilidade define a expansão volumétrica, ε , em função do campo de deslocamentos, \mathbf{u} ,

$$\varepsilon = \nabla^T \mathbf{u}$$

e as relações constitutivas do fluido relacionam os campos de pressão e de expansão volumétrica através do módulo de compressibilidade volumétrica do fluido, K ,

$$-p = K \cdot \varepsilon$$

Sendo o estado de tensão caracterizado apenas pela componente de pressão, a condição de equilíbrio na fronteira limita-se a relacionar essa pressão com a pressão imposta:

$$p(x, t) = \bar{p}(x, t)$$

A condição de compatibilidade numa fronteira rígida impõe que uma partícula não pode atravessar a superfície mas permite que ela se desloque sobre essa superfície. Sendo \mathbf{n} o vector que define a normal exterior unitária a essa superfície, essa condição toma a forma:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{u} = \bar{w}$$

As propriedades das superfícies são frequentemente expressas na forma seguinte, em que k_1^{-1} é o coeficiente de proporcionalidade entre a pressão e o deslocamento normal à superfície e c_1^{-1} é o coeficiente de proporcionalidade entre a pressão e a velocidade normal à superfície:

$$(k_1^{-1} \dot{p} + c_1^{-1} p) = \mathbf{n}^T \mathbf{v}$$

Não é necessário definir as condições iniciais do problema por se admitir que o movimento é periódico no tempo.

3. Aproximação no Tempo

Existem vários métodos de integração no tempo que visam eliminar o tempo como variável explícita e substituir a resolução do problema dado pela solução de um conjunto de problemas que só dependem explicitamente do espaço. Como se pretende realizar uma análise periódica no domínio do tempo, optou-se por separar em variáveis no espaço e no tempo, sendo esta componente aproximada através de uma série de Fourier, obtendo-se as seguintes expressões

para as equações básicas da Acústica, em que ω_n representa a frequência associada ao n -ésimo modo acústico e $\bar{Z}_n^{-1} = c_1^{-1} + j\omega_n k_1^{-1}$ representa a admitância:

$$-\nabla p_n + \mathbf{b}_n + (\omega_n^2 \rho - j\omega_n \gamma) \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad emV \quad (1)$$

$$\varepsilon_n = \nabla^T \mathbf{u}_n \quad emV \quad (2)$$

$$-p_n = K \varepsilon_n \quad emV \quad (3)$$

$$p_n = \bar{p}_n \quad em\Gamma_p \quad (4)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{u}_n = \bar{w}_n \quad em\Gamma_u \quad (5)$$

$$p_n = j\omega_n \bar{Z}_n \mathbf{n}^T \mathbf{u}_n \quad em\Gamma_z \quad (6)$$

O problema é, portanto, resolvido no domínio da frequência, realizando-se uma análise espectral para resolver cada um destes problemas independentes. A inserção destas soluções na série de Fourier permite representar a solução do problema em qualquer instante do intervalo de tempo em análise (recorrendo-se, em geral, a uma técnica rápida de implementação dessas combinações, a Transformada Rápida de Fourier).

4. Métodos de Solução

Admitindo que o fluido é homogêneo, obtém-se a expressão da equação da onda combinando as equações (1) a (3), cujas variáveis dependem agora apenas do espaço:

$$\left(\nabla^2 + k_n^2\right) p_n + \nabla^T \mathbf{b}_n = 0 \quad emV \quad (7)$$

É esta equação, e as condições de fronteira (4) a (6), que é resolvida aproximadamente usando duas formulações distintas do Método dos Elementos Finitos, designadamente os elementos finitos convencionais e os elementos híbridos-Trefftz de pressão. Enquanto os primeiros requerem um grande refinamento da malha para melhorar a solução (refinamento-h), os segundos permitem usar uma malha grosseira e melhorar a qualidade da solução aumentando da ordem da aproximação dos campos de pressão (refinamento-p).

4.1 Elementos Finitos Convencionais

O conceito básico consiste na subdivisão do domínio em estudo em pequenas sub-regiões, os elementos finitos, que devem tomar formas simples. Em cada um dos elementos aproxima-se o campo de pressão usando funções de aproximação (nodais), ψ_j , construídas de modo a assegurar que as variáveis q_j representam a pressão nos nós dos elementos:

$$p = \mathbf{P} \mathbf{q} = \sum_{j=1}^N \psi_j q_j = \Psi_1 q_1 + \Psi_2 q_2 + \dots + \Psi_N q_N \quad emV^e \quad (8)$$

A utilização de elementos isoparamétricos permite impor de maneira forte as condições de equilíbrio no domínio (1) e na fronteira (4), assim como entre elementos. Para isso, define-se uma aproximação dependente do campo de deslocamentos com a forma,

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{q} \quad emV^e$$

$$\mathbf{U} = (\omega^2 \rho - j\omega\gamma)^{-1} \nabla \mathbf{P}$$

Existem várias técnicas para obter a equação resolvente do elemento convencional de pressão. Todas elas produzem a mesma expressão,

$$(\mathbf{D} + j\omega^{-1}\mathbf{A})\mathbf{q} = \bar{\mathbf{e}}_w + \bar{\mathbf{e}}_p + \mathbf{e}_i \quad (9)$$

em que \mathbf{A} é a matriz de impedância e a matriz dinâmica, \mathbf{D} , combina o efeito das matrizes de flexibilidade, \mathbf{F} , de massa, \mathbf{M} , e de amortecimento, \mathbf{C} :

$$\mathbf{D} = -\mathbf{F} + \omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C}$$

O termo independente define três parcelas da expansão volumétrica nodal equivalente, designadamente as devidas aos deslocamentos impostos, $\bar{\mathbf{e}}_w$, às pressões impostas, $\bar{\mathbf{e}}_p$, e aos deslocamentos nas fronteiras entre elementos, \mathbf{e}_i .

A assemblagem dos elementos para obter a equação resolvente da malha é feita de modo análogo à assemblagem dos elementos convencionais de deslocamento: atribui-se a mesma pressão nos nós partilhados por cada elemento e impõe-se ser aí nula a resultante da expansão volumétrica nodal equivalente.

4.2 Elementos Híbridos-Trefftz

O que distingue os elementos híbridos-Trefftz é tomar como base de aproximação do campo de pressão a solução formal da forma homogénea da equação da onda (7). Essa solução é escrita no sistema de coordenadas que melhor se adequa ao domínio em análise. No presente caso, os compartimentos são paralelepípedicos o que justifica a utilização de um sistema Cartesiano. Nesta situação, a solução geral da equação da onda (7) é definida por uma série de Fourier tripla, nas coordenadas, x , y , e z .

Devem ser usadas aproximações completas de Fourier quando o campo sonoro é periódico no espaço. Em problemas não periódicos usam-se meias-séries, de senos ou de cossenos. Os exemplos adiante apresentados são resolvidos com uma aproximação completa de cossenos, a qual toma seguinte expressão para a expansão no plano x - y ,

$$P_{mn} = \cos \left[k_{xmn} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L_x} \right) \right] \cdot \cos \left[k_{ymn} \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{L_y} \right) \right] \cdot e^{\left[\pm jk_{zmn} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{L_z} \right) \right]}$$

a qual é facilmente generalizável para os restantes pares de coordenadas, (x, z) e (y, z) .

São estas as funções que são usadas para construir a aproximação (8). Essa aproximação é corrigida para incluir um termo particular que modela a solução da fonte sonora em campo livre, p_0 , a qual está associada a uma função Dirac de velocidade:

$$p = \mathbf{P} \mathbf{q} + p_0 = \sum_{j=1}^N P_j(x, y, z) q_j + p_0(x, y, z) \quad \text{em } V^e$$

$$p_0 = jq_0 \frac{\rho \omega k}{4\pi} \cdot \frac{e^{jka}}{1 + jka} \cdot \frac{e^{-jkr}}{kr}$$

Como as funções de aproximação do campo de pressão deixam de ser nodais, os termos q_j do vector \mathbf{q} passam a representar as amplitudes generalizadas dos modos de pressão, $P_j(x, y, z)$. Por isso, torna-se impossível assegurar a continuidade, no sentido forte, do campo de pressão entre elementos e nas fronteiras onde existam pressões impostas.

Estas condições são impostas de maneira fraca, o que obriga a aproximar a componente normal do campo de deslocamento, na forma,

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \sum_{j=1}^N \mathbf{B}_{\alpha j} w_{\alpha j} \quad \text{em } \Gamma_\alpha^e, \text{ com } \alpha = p, z, i$$

nas fronteiras onde esses deslocamentos são desconhecidos, designadamente onde existam pressões impostas, onde existam superfícies com impedância e nas fronteiras entre elementos,

Tal como para os elementos convencionais, podem utilizar-se diferentes técnicas para deduzir a equação resolvente, a qual toma agora a seguinte expressão geral,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{A}_z & -\mathbf{A}_p & -\mathbf{A}_i \\ -\mathbf{A}_z^* & j\omega\mathbf{Z} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{A}_p^* & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{A}_i^* & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{w}_z \\ \mathbf{w}_p \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}_0 \\ \boldsymbol{\pi}_{z0} \\ \boldsymbol{\pi}_{p0} - \boldsymbol{\pi}_p \\ \boldsymbol{\pi}_{i0} - \boldsymbol{\pi}_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

em que as matrizes \mathbf{A}_α^* impõem as condições de continuidade (fraca) do campo de pressão e a matriz \mathbf{Z} é a matriz de impedância. O termo independente reúne a contribuição dos deslocamentos e pressões impostas, $\bar{\mathbf{e}}$ e $\boldsymbol{\pi}_p$, e da resultante das entre elementos, $\boldsymbol{\pi}_i$, as quais se impõem serem nulas quando se realiza a reunião dos elementos. Os termos \mathbf{e}_0 e $\boldsymbol{\pi}_{\alpha 0}$ definem a contribuição da fonte sonora, p_0 .

A forma explícita em que se escreve o sistema (10) pode sugerir a ideia que envolve um número de incógnitas muito superior ao presente no sistema resolvente (9) do elemento de pressão convencional. Tal não sucede, em geral. Para se atingir o mesmo nível de precisão da solução, o uso de funções de aproximação extraídas da equação da onda (no elemento Híbrido-Trefftz) permite usar um número de incógnitas substancialmente inferior ao que é necessário usar com funções de aproximação polinomiais (no elemento convencional).

5. Aplicações

Apresentam-se em seguida os resultados num número seleccionado do conjunto dos testes de validação realizados no âmbito da dissertação. Esses testes foram seleccionados para validar os elementos híbridos-Trefftz comparando os resultados obtidos com os determinados com o programa *ABAQUS* por um lado e com um programa de análise modal [3]. Todas as dimensões serão, daqui em diante definidas em metros (m).

5.1 Ensaio I

O primeiro ensaio compara os resultados obtidos com elementos finitos convencionais com os obtidos através dos elementos híbridos-Trefftz. Construiu-se o modelo de uma sala rectangular

em planta, com $2,70m \times 4,50m$ e $3m$ de altura. Aplicou-se no topo da sala uma pressão uniformemente distribuída e consideraram-se as paredes rígidas. Para obter resultados adequados usando o programa ABAQUS foi necessário usar uma malha bastante refinada, com 37171 elementos isoparamétricos de 10 nós. Com elementos híbridos-Trefftz obteve-se uma solução análoga com 1 elemento e uma ordem de aproximação de 7 no domínio e de 7 na fronteira e com 8 elementos e uma ordem de aproximação de 5 no domínio e de 5 na fronteira.

5.2 Ensaio III

Este ensaio é realizado no mesmo compartimento com paredes rígidas para provocar reflexão total. Analisa-se a variação da pressão quando a fonte sonora é colocada no ponto $(0,4;0,4;0,4)$ e analisa-se a variação ao longo de segmentos paralelos aos eixos x , y e z (segmentos 7, 2 e 6, respectivamente) e contendo a fonte.

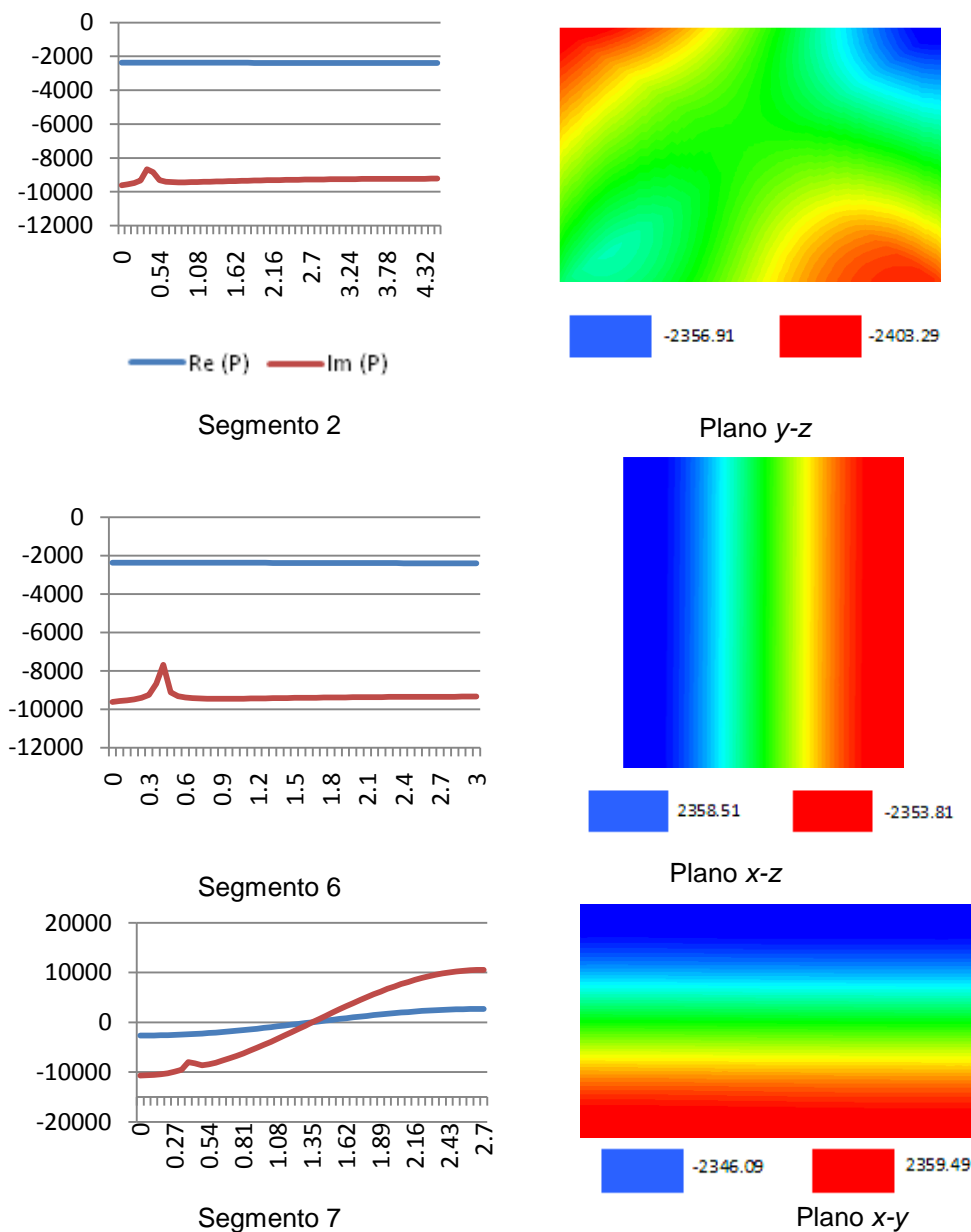


Figura 1: Variação da (parte real) da pressão ao longo de segmentos e secções escolhidas

O ensaio foi realizado para a frequência de 64 Hz, terceira frequência própria (modo de vibração em x) [3]. Observou-se a ocorrência de um pico no ponto de localização da fonte, inserido numa curva com andamento regular, em que é dominante o modo correspondente à frequência própria. Os resultados apresentam-se na figura 1. Observa-se que as maiores pressões positivas ocorrem junto ao canto oposto ao canto onde está localizada a fonte. Este efeito acontece devido à assimetria da reflexão das ondas geradas pela fonte.

Este teste foi ainda realizado para os outros dois tipos de condições de fronteira. Examinando os resultados do modelo em que a pressão nas paredes é nula, verifica-se que, por ausência de reflexão, a parte real da pressão é praticamente nula em todo o campo e a propagação é dominada pelo efeito da fonte sonora em campo livre. O mesmo teste foi realizado admitindo paredes com impedância. Recupera-se um comportamento semelhante ao obtido com paredes rígidas, com um forte efeito de reflexão, pois os valores adoptados na prática correspondem a superfícies com um coeficiente de absorção relativamente baixo.

5.3 Ensaio IV

O objectivo deste ensaio, realizado sobre o mesmo compartimento com paredes com impedância, foi realizar uma análise espectral e comparar os resultados obtidos por análise modal com os obtidos com o programa de elementos finitos. Analisaram-se os resultados obtidos no centro geométrico, com de coordenadas (1,35;2,25;1,5), e no ponto com coordenadas (0,40;4,10;2,60), os quais se apresentam na figura 2.

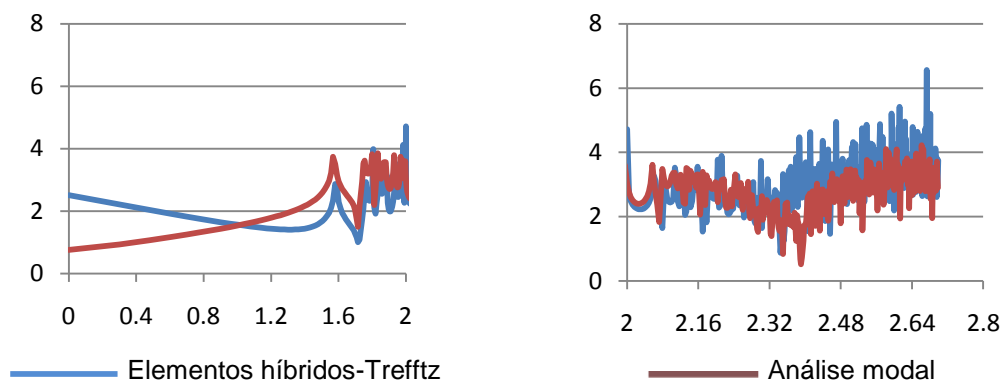


Figura 2: Análise espectral da magnitude da pressão no ponto (0,40;4,10;2,60) m

O programa de análise modal baseia-se numa combinação de modos de vibração obtidos admitindo paredes rígidas, sendo o efeito da impedância incorporado posteriormente. Para além disso, sabe-se também que a modelação da fonte sonora é diferente nos dois programas. Destas diferenças decorrem as discrepâncias de resultados visíveis na figura 2.

5.4 Ensaio V

Realizou-se este ensaio com o objectivo de analisar a imposição das condições de fronteira. Analisou-se o mesmo modelo e a sua resposta a uma frequência de excitação de 64 Hz com uma fonte sonora colocada no ponto com coordenadas (0,4;0,4;0,4) . Na figura 3 apresentam-se os campos de pressão obtidos para as condições de fronteira de pressão nula e paredes

rígidas para um corte no plano x - z .

Verificou-se que os resultados obtidos para o teste da pressão nula nas paredes não traduziram exactamente as condições impostas. Esperar-se-ia a modelação de um campo de pressões uniforme e nulo. No contorno do corte analisado observam-se flutuações muito localizadas da pressão. A base de aproximação não contém a solução exacta do problema, pelo que a formulação em que o elemento se baseia tenta obter a melhor combinação das funções de aproximação que permita a satisfazer (de maneira fraca) as condições de fronteira do problema. As perturbações que se observam na vizinhança dessas arestas são pequenas e ilustram o efeito de Gibbs típico das funções de Fourier, que compõem as bases de aproximação.

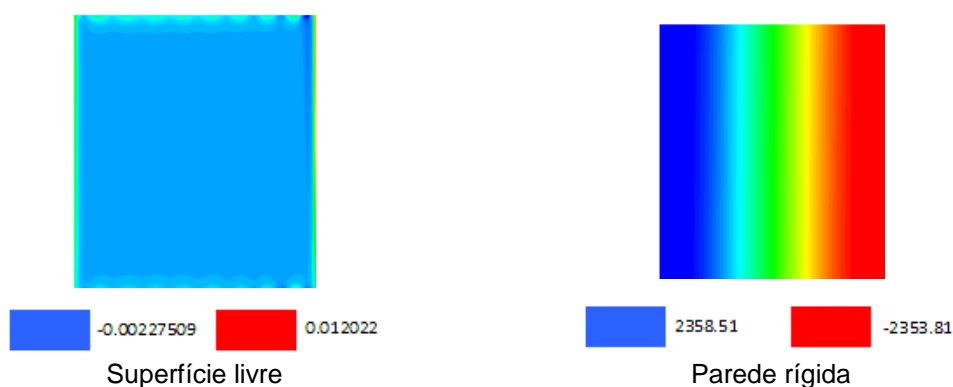


Figura 3: Campos sonoros para análise da modelação superfícies livres e paredes rígidas

Apesar da modelação das paredes rígidas parecer mais rigorosa, o efeito de Gibbs continua aí presente mas com valores desprezáveis face à intensidade do campo de pressão.

5.5 Ensaio VI

Este ensaio foi realizado para analisar uma série de resultados que permitem caracterizar o campo sonoro no interior do compartimento rectangular. Consideram-se as duas condições de fronteira extremas (superfícies com pressão nula e paredes rígidas) e duas posições da fonte sonora, designadamente no centro geométrico da sala, para verificar a simetria da solução, e num dos cantos, a posição relevante em termos práticos. Foram também analisadas duas das frequências próprias de vibração: segundo y (38 Hz) e segundo x (64 Hz).

No modelo de paredes rígidas, como seria de esperar, analisando cortes perpendiculares aos eixos coordenados, observa-se a propagação de uma onda sonora apenas com um ponto de inflexão e relativamente simétrica, na direcção correspondente ao modo de vibração analisado. A observação do modelo de paredes com impedância mostra que a influência da fonte sonora é mais forte, uma vez que é menor o efeito de reflexão. Mais uma vez, no modelo com pressão nula imposta nas paredes domina a solução de campo livre, à excepção do fenómeno de Gibbs no contorno.

Comparando os resultados para as duas posições da fonte sonora verificaram-se algumas diferenças significativas devido ao efeito de reflexão das ondas. A reflexão verificou-se simétrica quando a fonte é colocada no centro do compartimento e fortemente assimétrica

quando é colocada no canto. Para além desse efeito, a maior reflexão das ondas traduz-se também num menor pico de pressão quando a fonte está colocada no canto do compartimento.

5.6 Ensaio VII

Este ensaio teve como objectivo a realização de um teste que pudesse corresponder a uma situação mais realista. Construiu-se uma sala em L em planta, (figura 4), com altura de 2,70 m.

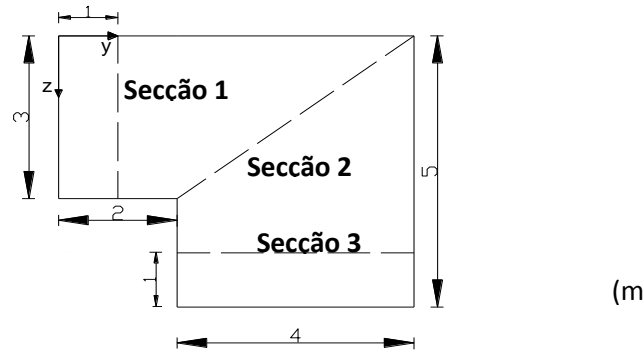


Figura 4: Representação do compartimento em L e identificação das secções estudadas

O ensaio foi realizado para as frequências de 38 Hz e de 64 Hz para que fosse possível comparar os resultados com os obtidos para a sala rectangular. A fonte sonora foi colocada a um dos cantos da sala. Os campos de pressões obtidos para a frequência de 64 Hz estão representados a figura 5.

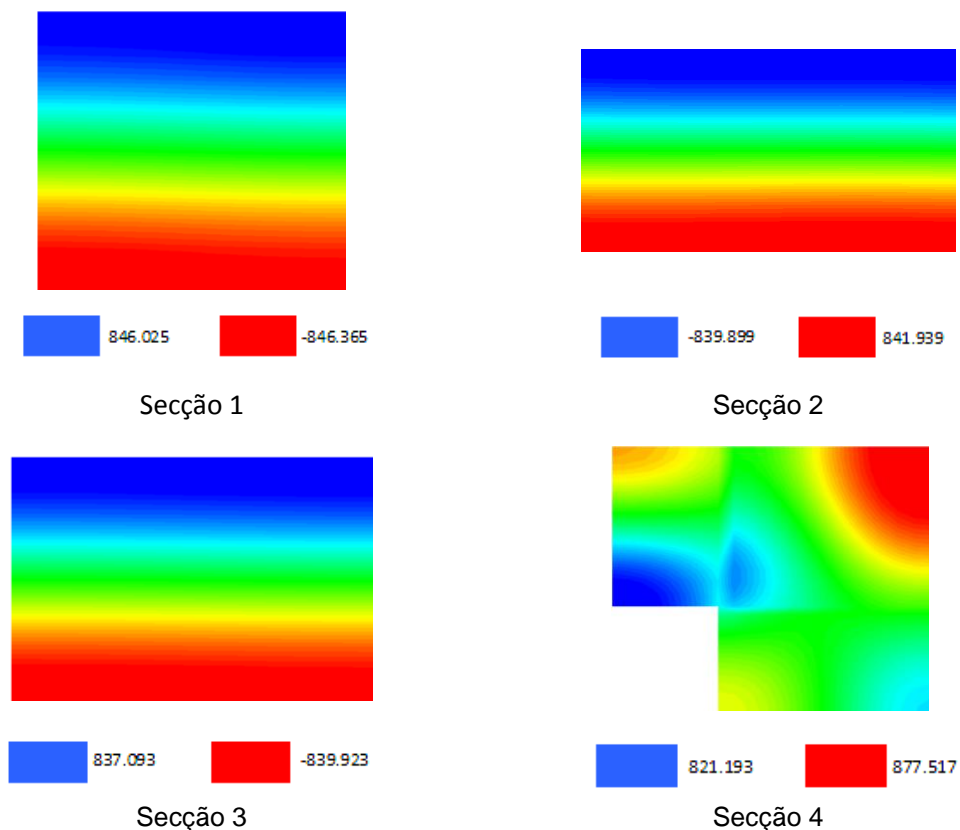


Figura 5: Parte real do campo de pressão (64 Hz, e paredes rígidas)

Foi possível observar-se com clareza o pico nos campos de pressão causado pela fonte sonora. Verifica-se, na reentrância da sala, uma descontinuidade de pressões decorrente da insuficiência da aproximação. A formulação não contém o modo singular que caracteriza o campo sonoro nessa zona, podendo ser melhorada a solução obtida aumentando os graus de aproximação nas fronteiras entre elementos ou inserindo a solução particular desta singularidade na base de aproximação.

6. Conclusão

Os resultados obtidos estão em conformidade com anteriores estudos e com os resultados dados pelo *software* comercial ABAQUS, sendo permitido validar o programa elaborado para se realizar este estudo.

O elemento convencional e o elemento híbrido-Trefftz modelam adequadamente o campo sonoro para uma grande gama de frequências de excitação. Para os elementos convencionais de pressão, a precisão é tanto maior quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, enquanto para os elementos híbridos-Trefftz é mais fácil melhorar a precisão aumentando a ordem das funções de aproximação.

Os resultados da análise espectral que são apresentados parecem estar de acordo com os obtidos por análise modal, atendendo a que os valores tomados como referência são obtidos de maneira algo diferente.

Todos esses ensaios mostram que o comportamento sonoro é fortemente influenciado pelas condições de fronteira e pela posição da fonte sonora. O exemplo da sala em L serviu para mostrar ser possível usar a modelação do campo sonoro com elementos híbridos para realizar aplicações já com alguma relevância prática.

Como desenvolvimento deste estudo seria útil tentar modelar a presença da fonte sonora no *software* ABAQUS. Seria ainda interessante fazer uma modelação no domínio do tempo.

Bibliografia

- [1]. Freitas, J.A.T e A.L.R.B.N. Sousa. *Implementation of Hybrid-Trefftz Elements for 3D Acoustics. Rel. Int.*, DECivil, ISTUTL, Lisboa,2009.
- [2]. Hibbit, Karlsson & Sorensen, INC. *ABAQUS/Standard User Manual. Version 6.8, 2008.*
- [3]. Sousa, A.L.R.B.N. *Low Frequency Impact Sound Transmission In Dwelling*, Tese de Douturamento Universidade de Liverpool, 2005.