



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Modelos Híbridos-Mistos de Tensão para a análise fisicamente não linear de estruturas tridimensionais de betão

Carla Susana Ribeiro Garrido

Dissertação para obtenção do Grau Mestre em
Engenharia Civil

Júri

Presidente:	Professor Pedro Guilherme Sampaio Viola Parreira
Orientador:	Professor Luís Manuel Soares dos Santos Castro
Co-orientador:	Professor Eduardo Manuel Baptista Ribeiro Pereira
Vogal:	Professora Maria Cristina de Oliveira Matos Silva

Outubro de 2009

Resumo

A presente dissertação tem por finalidade o desenvolvimento de uma formulação não convencional de elementos finitos conjugada com dois modelos de dano contínuos que permita a correcta e eficaz modelação do comportamento mecânico de estruturas de betão simples.

Neste trabalho são considerados dois modelos de dano contínuo isotrópicos e elásticos, no sentido em que desprezam as deformações permanentes, aos quais se associou um método de regularização conhecido por modelo integral não local. Os modelos desenvolvidos consideram como válida a hipótese da linearidade geométrica.

Foi estudado e implementado um modelo híbrido-misto de tensão no qual se aproxima, em simultâneo e de forma independente, o campo de tensões efectivas e o campo de deslocamentos no domínio de cada elemento. O equilíbrio entre elementos é imposto de forma ponderada através da definição do campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática. Como funções de aproximação utilizam-se polinómios ortonormais de Legendre, os quais se mostram numericamente estáveis e permitem a obtenção de processos de refinamento tipo- h e $-p$ eficientes e robustos.

A adequabilidade destes modelos é avaliada através de um teste de referência. Apresenta-se um conjunto de exemplos com estruturas tridimensionais com vista a testar o desempenho e a competitividade destes modelos. Apesar da sua eficácia na modelação da fendilhação do material, o custo computacional associado a estes modelos prova que é necessário aperfeiçoar as técnicas na área da mecânica computacional.

Palavras-chave

Elementos Finitos

Formulação Híbrida Mista de Tensão

Mecânica do Dano Contínuo

Polinómios de Legendre

Estruturas Tridimensionais de Betão

Abstract

The present work aims to develop a non conventional finite element formulation using continuum damage models for an accurate and efficient modeling of the mechanical behavior of plain concrete structures.

Two isotropic and elastic continuum damage models are presented and it is adopted a regularization method known as non-local integral model. The geometric linearity hypothesis is considered.

It is studied and implemented a hybrid-mixed stress model, which approximates, simultaneously and independently, the effective stress and displacement fields in each element. The equilibrium between elements is enforced on average through the definition of an independent approximation for the displacement field along the static boundary. Orthonormal Legendre polynomials are used as approximation functions, which are proved to be numerically stable and allows for the implementation of robust and efficient h - and p - adaptive refinement procedures.

The suitability of these models is assessed through one benchmark test. The set of examples with three-dimensional structures is presented to test the performance and the competitiveness of these models. Although its effectiveness to modeling the cracking of the material, its computational costs shows that the improvement of the techniques in the computational mechanic field must be done.

Keywords

Finite Elements

Hybrid-Mixed Stress Formulation

Continuum Damage Mechanics

Legendre Polynomials

Concrete Three-dimensional Structures

Agradecimentos

Os trabalhos foram desenvolvidos com o apoio da FCT e do FEDER através da bolsa de iniciação à investigação no âmbito do projecto PTDC/ECM/71519/2006.

O apoio e o incentivo dos professores, amigos e familiares que me acompanharam ao longo de todas as fases da dissertação foram essenciais para a concretização dos objectivos a que me propus inicialmente. Por isso, gostaria de agradecer:

Ao meu orientador, o Professor Luís Castro, pela compreensão e dedicação ao longo destes últimos meses, por me ouvir pacientemente, pelas sugestões e críticas consistentes e pelo entusiasmo contagiante pelo trabalho de investigação. Agradeço-lhe todo o apoio na realização deste trabalho, facultando-me as ferramentas necessárias para explorar o mundo dos elementos híbridos-mistos e da mecânica de dano, e a ajuda no domínio da programação. De referir, ainda, o empenho e disponibilidade no esclarecimento de dúvidas, tanto na realização da dissertação, como ao longo de todo o curso.

Ao meu co-orientador, Professor Eduardo Pereira, pela introdução aos elementos finitos não convencionais na fase inicial do trabalho e pelo tempo disponibilizado na explicação do funcionamento do programa ADINA. Agradeço-lhe também o rigor das opiniões na organização do documento da tese.

Ao Professor Moitinho de Almeida, pela iniciação ao funcionamento do programa Matlab e pela sua boa disposição e disponibilidade nas questões computacionais.

A todos os meus amigos, pelo interesse e compreensão que manifestaram durante a realização deste trabalho. De modo especial, gostaria de agradecer ao João Martins e à Carolina Franco. Ao João, pela partilha de experiências boas e menos boas e por ter sido um colega de gabinete sempre bem disposto. À Carolina, por todos os momentos de descontração proporcionados ao longo da dissertação e de todo o curso, pelas suas opiniões sinceras e por ser a companheira que tem sido.

Finalmente, à minha família pelo apoio, incentivo e força que sempre manifestaram ao longo da minha vida académica e, principalmente, nesta fase final. Agradeço aos meus pais por acreditarem em mim e pelo apoio às minhas decisões. Ao meu irmãozito Rafa, pelos momentos de convívio e risada partilhados e por tolerar o meu mau humor nas fases mais difíceis. Ao Bruno, por compreender os meus momentos de ausência e pelo carinho e paciência demonstrados ao longo de todo o meu percurso.

Índice

CAPÍTULO 1	1
Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objectivos	2
1.3 Organização	2
CAPÍTULO 2	5
Formulação do Problema	5
2.1 Considerações Gerais	5
2.2 Equações Fundamentais	6
2.2.1 Condições de Equilíbrio	7
2.2.2 Condições de Compatibilidade	7
2.2.3 Relação Constitutiva	8
2.3 Princípios Energéticos Variacionais	9
2.4 Comportamento do Betão	10
2.5 Modelos Constitutivos em Estruturas de Betão Simples	13
2.5.1 Classificação dos Modelos Constitutivos	13
2.5.2 Mecânica do Dano e da Fractura	15
CAPÍTULO 3	17
Modelo de Dano	17
3.1 Considerações Iniciais	17
3.2 Aspectos Fenomenológicos	18
3.4 Modelos de Dano	21
3.4.1 Modelo de Dano Isotrópico Uniaxial	22
3.4.2 Modelo de Dano Isotrópico Multiaxial	24
3.5 Modelos de Dano Local Adoptados	25
3.5.1 Modelo com Uma Variável de Dano [Comi e Perego, 2001]	25
3.5.2 Modelo de Dano de [Mazars, 1984]	27
3.6 Localização das Deformações	29
3.7 Método de Regularização Adoptado	31
3.8 Transição de um modelo contínuo não local para um modelo discreto	33

CAPÍTULO 4	35
Elementos Finitos Híbridos - Mistos	35
4.1 Considerações Iniciais	35
4.2 Formulações Não Convencionais de Elementos Finitos.....	35
4.3 Formulações Não Convencionais Adoptadas	38
4.4 Modelos Híbridos Mistos de Tensão (Tensões efectivas)	39
4.4.1 Definição das Aproximações.....	39
4.4.2 Sistema Governativo de um Elemento Finito HMT.....	40
 CAPÍTULO 5	 47
Implementação do Modelo	47
5.1 Considerações Iniciais	47
5.2 Funções de Aproximação.....	48
5.3 Definição das Aproximações.....	49
5.4 Cálculo dos Operadores Estruturais	51
5.5 Algoritmo de Implementação.....	55
 CAPÍTULO 6	 57
Aplicações Numéricas	59
6.1 Considerações iniciais.....	59
6.2 Validação Numérica - Teste de [Hassanzadeh, 1991].....	61
6.3 Exemplos de estudo.....	71
6.3.1 Exemplo 1 - Cubo (com carga de vão)	72
6.3.2 Exemplo 2 – Viga de betão	75
6.3.3 Exemplo 3 - Cubo (com assentamento de apoio)	79
6.3.4 Exemplo 4 – Estrutura em L.....	87
 CAPÍTULO 7	 95
Conclusões e Desenvolvimentos Futuros.....	95
7.1 Conclusões.....	95
7.2 Desenvolvimentos Futuros.....	96
 REFERÊNCIAS.....	 99
 ANEXO A – Integração Analítica dos Operadores Estruturais	 107
ANEXO B – Elementos Mestre para a Implementação do Modelo HMT	111
ANEXO C – Integração Numérica – Regras de Quadratura	113

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Formulação do problema.	6
Figura 2.2 – Domínio e fronteira de um sólido genérico.	6
Figura 2.3 – Gráficos tensão-deformação: comportamento uniaxial do betão à tracção e compressão em ensaios monotónicos e cíclicos (adaptado de [da Silva, 2002; Oliveira, 2002]).....	11
Figura 2.4 – Descrição qualitativa do comportamento macroscópico unidimensional do betão à tracção (adaptado de [Silva, 2006]).	12
Figura 2.5 – Processo de transição entre dano e fractura [Proença, 2008].	15
Figura 3.1 – Volume representativo de um sólido com dano.....	18
Figura 3.2 – Representação esquemática de um modelo uniaxial com equivalência de deformações (adaptado de [Rabotnov, 1968]).	19
Figura 3.3 – Hipótese de deformação equivalente (adaptado de [Proença, 2008]).	20
Figura 3.4 – Evolução da variável interna de dano no regime de amolecimento.	23
Figura 3.5 – Localização das deformações: resposta de um modelo local (adaptado de [Alfaiate 1992; Silva, 2006]).....	29
Figura 3.6 – Resposta qualitativa do modelo de elementos finitos com um modelo de dano local: resposta não objectiva (adaptado de [Alfaiate, 1992; Silva, 2006]).	30
Figura 4.1 – Estrutura tridimensional discretizada com dois elementos (HMT).....	44
Figura 5.1 – Mudança de coordenadas.....	51
Figura 6.1 – Curvas ($\sigma - \varepsilon$) num ensaio uniaxial de tracção para os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e [Mazars, 1984].....	60
Figura 6.2 – Curva ($\sigma - \varepsilon$) num ensaio uniaxial de compressão para o modelo de dano de [Mazars, 1984].....	60

Figura 6.3 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: definição da geometria do problema.	61
Figura 6.4 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: malhas de elementos finitos adoptadas.	61
Figura 6.5 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: curvas reacção R (N) – deslocamento imposto \bar{u} (mm) [Silva, 2006].....	62
Figura 6.6 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões em regime elástico linear para $u_z = 0.001\text{mm}$ obtida nos testes numéricos A e C (plano $x=35\text{mm}$).	64
Figura 6.7 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões efectivas para $u_z = 0.02\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste A (plano $x=35\text{mm}$).	66
Figura 6.8 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste A (configuração deformada no plano $x=35\text{mm}$ com um factor de escala de 100).....	67
Figura 6.9 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões efectivas para $u_z = 0.04\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (plano $x=35\text{mm}$).	68
Figura 6.10 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (configuração deformada no plano $x=35\text{mm}$ com um factor de escala de 100).....	69
Figura 6.11 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: curvas reacção R (N) – deslocamento imposto \bar{u} (mm) obtidas nos testes numéricos A e B para os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e [Mazars, 1984].....	71
Figura 6.12 – Exemplo 1: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.	72
Figura 6.13 – Exemplo 1: distribuição de tensões em regime linear para $t_\gamma = 1\text{MPa}$ e distribuição de tensões efectivas em regime não linear $t_\gamma = 2\text{MPa}$ segundo o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] (plano $x=0.5\text{m}$).	73
Figura 6.14 – Exemplo 1: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 100). ...	75
Figura 6.15 – Exemplo 2: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.	76
Figura 6.16 – Exemplo 2: distribuição de tensões em regime linear para $t_\gamma = 0.25\text{MPa}$ (plano $x=1.0\text{m}$).	76

Figura 6.17 – Exemplo 2: distribuição de tensões efectivas em regime não linear para $t_y = 0.75\text{MPa}$ segundo o modelo de dano de [Mazars, 1984] (plano $x=1.0\text{m}$).	77
Figura 6.18 – Exemplo 2: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (configuração deformada no plano $x=1.0\text{m}$ com um factor de escala de 100). ...	78
Figura 6.19 – Exemplo 2: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.	79
Figura 6.20 – Exemplo 3: distribuição de tensões em regime linear para $u_y = 0.06\text{mm}$ (plano $x=0.5\text{m}$).	80
Figura 6.21 – Exemplo 3: distribuição de tensões em regime não linear para $u_y = 0.20\text{mm}$ e $l = 0.10\text{m}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=0.5\text{m}$). ..	82
Figura 6.22 – Exemplo 3: distribuição do dano no início da fendilhação segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico.	83
Figura 6.23 – Exemplo 3: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] em função do comprimento característico (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 1000).	85
Figura 6.24 – Exemplo 3: evolução do dano segundo o modelo de [Mazars, 1984] em função do comprimento característico (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 1000).	86
Figura 6.25 – Exemplo 4: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.	87
Figura 6.26 – Exemplo 4: distribuição de tensões em regime linear para $u_z = 0.50\text{mm}$ obtida nos testes numéricos B e C (plano $x=0.5\text{m}$).	89
Figura 6.27 – Exemplo 4: distribuição de tensões efectivas em regime não linear para $u_z = 1.00\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (plano $x=0.5\text{m}$).	91
Figura 6.28 – Exemplo 4: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] obtida nos testes numéricos A, B e C (configuração deformada com um factor de escala de 100).	93
Figura 6.29 – Exemplo 4: evolução do dano segundo o modelo de [Mazars, 1984] obtida nos testes numéricos A, B e C (configuração deformada com um factor de escala de 100).	94
Figura B.1 – Numeração dos nós dos elementos mestre de 8 e 16 nós.	111

Lista de Tabelas

Tabela 3.1– Resumo das equações constitutivas de um modelo de dano isotrópico.	24
Tabela 5.1– Dimensões das matrizes de aproximação de um elemento finito tridimensional cúbico com um grau máximo de aproximação n_{s_v} , n_{u_v} e n_{u_γ} para o respectivo campo associado nas direcções ξ , η e ζ	51
Tabela 5.2– Dimensões dos operadores estruturais de um modelo HMT no caso de problemas tridimensionais.	55
Tabela 6.1– Teste de [Hassanzadeh, 1991]: dimensões dos elementos finitos das malhas A e B.	62
Tabela 6.2– Teste de [Hassanzadeh, 1991]: testes numéricos.	63
Tabela 6.3– Parâmetros do material adoptados nos exemplos de estudo.	71
Tabela 6.4 – Exemplo 1: quadro resumo das tensões efectivas para $t_\gamma= 2\text{MPa}$ obtidas nos modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=0.5\text{m}$).	74
Tabela 6.5 – Exemplo 2: quadro resumo das tensões efectivas para $t_\gamma= 0.75\text{MPa}$ obtidas segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=1.0\text{m}$).	78
Tabela 6.6 – Exemplo 3: quadro resumo das tensões efectivas relevantes para $u_y= 0.20\text{m}$ obtidas segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico (plano $x=0.5\text{m}$).	81
Tabela 6.7 – Exemplo 3: quadro resumo dos valores de u_y correspondentes ao início da fendilhação segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico (plano $x=0.5\text{m}$).	84
Tabela 6.8 – Exemplo 4: testes numéricos de refinamento tipo- p	88
Tabela 6.9 – Exemplo 4: quadro resumo dos valores máximos e mínimos de tensões efectivas para $u_z=1.00\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtidos nos testes A, B e C (plano $x=0.5\text{m}$).	90

Notação

Apresenta-se uma lista de símbolos resumida. Qualquer símbolo não identificado nesta lista encontra-se definido na zona do texto onde é referido.

E	Módulo de elasticidade do material elástico linear
ν	Coefficiente de Poisson do material elástico linear
G	Módulo de distorção do material elástico linear
k_0	Módulo de compressibilidade volumétrica do material elástico linear
σ	Tensor das tensões ou vector que lista as componentes independentes do tensor
$\tilde{\sigma}$	Tensor das tensões efectivas ou vector que lista as componentes independentes do tensor
ε	Tensor das deformações ou vector que lista as componentes independentes do tensor
$\tilde{\varepsilon}$	Tensor das deformações efectivas ou vector que lista as componentes independentes do tensor
u	Vector dos deslocamentos
d, d_n	Variável escalar de dano
Ω	Tensor de dano ou matriz que lista as componentes independentes do tensor
K	Tensor constitutivo de rigidez do material elástico linear ou matriz que lista as componentes independentes do tensor
\tilde{K}	Tensor constitutivo de rigidez do material elástico não linear ou matriz que lista as componentes independentes do tensor
F	Tensor constitutivo de flexibilidade do material elástico linear ou matriz que lista as componentes independentes do tensor
\tilde{F}	Tensor constitutivo de flexibilidade do material elástico não linear ou matriz que lista as componentes independentes do tensor
ψ	Energia livre de Helmholtz ou densidade de energia livre de Helmholtz
f	Potencial de dissipação ou superfície de activação
g	Lei de evolução do dano
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
χ	Força termodinâmica
Y	Taxa de energia de deformação elástica
l	Comprimento característico

λ_c	Comprimento característico não local
\bar{A}	Valor não local da grandeza A
V	Domínio (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
Γ	Fronteira (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
Γ_u	Fronteira cinemática (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
Γ_σ	Fronteira estática (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
\mathbf{b}	Vector das cargas exteriores aplicadas no domínio V
\mathbf{t}_γ	Vector das forças na fronteira
\mathbf{D}	Operador diferencial de equilíbrio
\mathbf{D}^*	Operador diferencial de compatibilidade
\mathbf{N}	Matriz das normais exteriores
\mathbf{S}_v	Matriz das funções de aproximação de $\tilde{\sigma}$ em V
\mathbf{U}_v	Matriz das funções de aproximação de \mathbf{u} em V
\mathbf{U}_γ	Matriz das funções de aproximação de \mathbf{u} em Γ_σ
\mathbf{X}	Vector das tensões generalizadas em V
$\tilde{\mathbf{X}}$	Vector das tensões efectivas generalizadas em V
\mathbf{q}_v	Vector dos deslocamentos generalizados em V
\mathbf{q}_γ	Vector dos deslocamentos generalizados em Γ_σ
\mathbb{F}	Operador de flexibilidade generalizado em regime elástico linear
\mathbf{A}_v	Operador de compatibilidade em V
\mathbf{A}_γ	Operador de compatibilidade em Γ_σ
\mathbf{e}	Vector das deformações generalizadas
\mathbf{Q}_v	Vector das forças generalizadas em V
\mathbf{Q}_γ	Vector das forças generalizadas em Γ_σ
$\bar{\mathbf{e}}$	Vector das deformações generalizadas associadas aos deslocamentos impostos em Γ_u
n_{S_v}	Grau máximo das funções de aproximação de $\tilde{\sigma}$ em V
n_{U_v}	Grau máximo das funções de aproximação de \mathbf{u} em V
n_{U_γ}	Grau máximo das funções de aproximação de \mathbf{u} em Γ_σ

Abreviaturas

EF	Elementos Finitos
HMT	Híbrido-Misto de Tensão
MDC	Mecânica do Dano Contínuo
MEF	Método de Elementos Finitos
MF	Mecânica da Fractura
ZPF	Zona em Processo de Fractura

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Motivação

Nos últimos anos, o crescente conhecimento e desenvolvimento de meios na área da mecânica computacional tem permitido a utilização de modelos numéricos mais elaborados na análise de estruturas de Engenharia Civil. Muitos dos problemas estruturais têm sido resolvidos através do Método dos Elementos Finitos e, geralmente, com recurso à formulação clássica de elementos finitos de deslocamento. O sucesso deste modelo deve-se essencialmente à sua simplicidade e ao facto da sua formulação ser menos exigente e mais intuitiva que as formulações alternativas. Contudo, este método apresenta algumas limitações decorrentes da consideração de aproximações compatíveis mas não equilibradas, da necessidade de se efectuar geração de malhas muito refinadas e da dificuldade associada à implementação de modelos para a análise de fenómenos de fendilhação.

Para contornar estas limitações, desenvolveram-se novas formulações de elementos finitos híbridas e mistas, geralmente designadas por formulações não convencionais de elementos finitos. [Freitas et al., 1999a] desenvolveram modelos não convencionais de elementos finitos que se distinguem pela aproximação de diferentes campos estáticos e/ou cinemáticos, pelas características das funções utilizadas e pela imposição de diferentes condições (imposição local ou ponderada). Consoante as condições impostas no domínio de cada elemento, as formulações não convencionais híbridas classificam-se como híbrida-mista, híbrida ou híbrida-Trefftz. Estas podem estar associadas a modelos de tensão ou de deslocamento, dependendo do tratamento das condições no domínio e da forma de ligação entre elementos finitos.

Este tipo de formulações tem sido utilizado na análise de estruturas de betão simples considerando modelos clássicos de elasticidade e plasticidade. No entanto, o comportamento do material fendilhado não é correctamente modelado com recurso a este tipo de relações constitutivas. A natureza do dano que se manifesta nos materiais *quasi-frágeis*, como no caso do betão, está intimamente associada com a formação, evolução e coalescência de microfissuras. Assim, os modelos constitutivos fisicamente não lineares traduzem uma descrição mais realística do comportamento estrutural de elementos de betão.

Os modelos da Mecânica do Dano Contínuo permitem analisar a evolução das propriedades mecânicas do material contínuo numa zona localizada da estrutura onde se registam elevadas deformações. Com a adopção deste tipo de modelos constitutivos é possível descrever as propriedades dos materiais *quasi-frágeis* verificadas experimentalmente, como por exemplo, o comportamento global com amolecimento, a degradação da rigidez elástica, a anisotropia e o aparecimento de deformações plásticas [Silva, 2006].

1.2 Objectivos

O presente trabalho pretende estender a formulação híbrida-mista de tensão à análise fisicamente não linear de estruturas tridimensionais de betão simples. A concretização deste objectivo principal conduziu à realização das seguintes tarefas:

- Modelação do comportamento não linear do betão resultante dos fenómenos de fendilhação através da introdução de dois modelos constitutivos de dano, nomeadamente o modelo com uma variável de dano apresentado por [Comi e Perego, 2001] e o modelo de dano de [Mazars, 1984];
- Desenvolvimento de uma formulação HMT para a análise de estruturas tridimensionais onde a usual aproximação do campo de tensões é substituída pela aproximação do campo de tensões efectivas, de acordo com o trabalho de [Silva, 2006];
- Utilização de um modelo integral não local com o objectivo de resolver os problemas de localização de deformações e dependência da malha;
- Desenvolvimento de um algoritmo incremental e iterativo recorrendo a uma variante do Método de Newton-Raphson, onde a habitual matriz tangente é substituída pela matriz secante.

Apesar de algumas das etapas referidas anteriormente já terem sido implementadas em outros trabalhos, ainda não tinha sido desenvolvido um modelo HMT que contemplasse todos os requisitos apresentados no grupo de investigação onde este trabalho se insere.

1.3 Organização

O trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos e 3 anexos, entre os quais se insere este primeiro capítulo de introdução.

O segundo capítulo introduz as teorias e formulações que estão na génese deste trabalho, definindo-se as relações fundamentais, bem como as hipóteses e notações adoptadas. Neste capítulo descreve-se ainda o comportamento do betão que se pretende modelar e apresentam-se alguns modelos constitutivos, de modo a justificar a adopção de modelos de dano contínuo.

No terceiro capítulo apresentam-se os modelos de dano inseridos na Mecânica de Dano Contínuo, descrevendo-se em detalhe os modelos de dano adoptados. Nesta sequência, referem-se os problemas associados a um modelo de dano local e introduz-se o método de regularização utilizado, o modelo integral não local.

No quarto capítulo expõem-se as principais vantagens e desvantagens das formulações não convencionais de elementos finitos, estabelecendo-se comparações com a formulação clássica, e

justifica-se a adopção pela formulação híbrida-mista de tensão com aproximação do campo de tensões efectivas. Posteriormente, apresenta-se detalhadamente a construção do sistema governativo associado ao modelo HMT adoptado.

O quinto capítulo descreve a implementação numérica do modelo referido no capítulo anterior. Apresentam-se as funções de aproximação e a forma como são definidas as aproximações de cada campo. Definem-se também as expressões utilizadas na definição da transformação de coordenadas e as equações utilizadas no cálculo dos operadores estruturais presentes no sistema governativo não linear. Por último, descreve-se o algoritmo incremental e iterativo associado à implementação do modelo adoptado no trabalho.

No sexto capítulo apresenta-se um exemplo de referência para o qual se conhecem resultados experimentais e numéricos, com o objectivo de validar os modelos numéricos desenvolvidos. Realiza-se também um conjunto de testes com estruturas tridimensionais com o intuito de ilustrar a aplicação e potencialidades dos modelos adoptados para a modelação do fenómeno de fendilhação.

O sétimo capítulo é dedicado às conclusões e aos desenvolvimentos futuros.

Os aspectos de carácter particular ou pormenor encontram-se apresentados nos anexos que complementam o presente trabalho.

CAPÍTULO 2

Formulação do Problema

2.1 Considerações Gerais

Actualmente, o betão continua a desempenhar um importante papel na construção de estruturas de Engenharia Civil. Face à sua ampla utilização, têm sido realizados inúmeros estudos e testes que pretendem completar o conhecimento sobre o comportamento deste material estrutural. Contudo, persistem, ainda hoje, algumas dúvidas nesse domínio que condicionam a escolha do modelo constitutivo a adoptar. De um modo geral, os modelos desenvolvidos no âmbito da análise estrutural pretendem obter uma descrição o mais exacta possível dos estados de deformação e de tensão das estruturas quando sujeitas a um conjunto de acções. Assim sendo, apresentam-se neste capítulo as grandezas físicas e as equações envolvidas na determinação do comportamento das estruturas de betão.

A resposta não linear das estruturas de betão surge em consequência de um conjunto de processos irreversíveis que ocorrem ao nível da sua microestrutura, alguns associados a microfendas e microdefeitos que constituem o *dano* inicial. À medida que o processo de carga evolui, a existência de dano conduz ao aparecimento e desenvolvimento de microfissuras que influenciam as propriedades mecânicas do betão, nomeadamente a resistência e a rigidez.

Na maioria dos materiais granulares, o comportamento não linear pode ser simulado através de modelos de dano. No caso particular do betão, a mecânica do dano permite formular modelos constitutivos representativos da fissuração responsável pela não linearidade da resposta do material.

Neste capítulo são apresentadas as equações fundamentais do comportamento mecânico de corpos tridimensionais e os princípios energéticos que estabelecem a convergência das soluções aproximadas para a solução do problema. De seguida, descreve-se o comportamento mecânico do betão e expõem-se alguns modelos constitutivos para a análise de estruturas de betão simples.

Ao longo deste trabalho consideraram-se as seguintes hipóteses:

- Isotropia – o material apresenta o mesmo comportamento mecânico em todas as direcções;
- Linearidade geométrica – os deslocamentos sofridos pela estrutura são pequenos face à menor dimensão da estrutura, permitindo estabelecer as equações de equilíbrio na configuração indeformada da estrutura;
- Não linearidade física – o material apresenta um comportamento não linear. Consequentemente, não existe uma relação linear entre tensões aplicadas e deformações sofridas;
- O carregamento é monotónico, não havendo inversão do sentido de aplicação da carga;

- A velocidade de aplicação da carga é suficientemente baixa, podendo desprezar-se os seus efeitos dinâmicos;
- A temperatura não interfere nas características mecânicas do material.

2.2 Equações Fundamentais

A análise estrutural pressupõe a definição das variáveis deslocamentos, deformações, forças e esforços e o seu relacionamento através de três equações fundamentais: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade e relação constitutiva (ver Figura (2.1)).

Neste capítulo apenas são referidos os conceitos básicos da Teoria da Elasticidade relevantes para o desenvolvimento do trabalho. A sua descrição detalhada pode ser encontrada, por exemplo, em [Timoshenko e Goodier, 1970; Arantes e Oliveira, 1999].

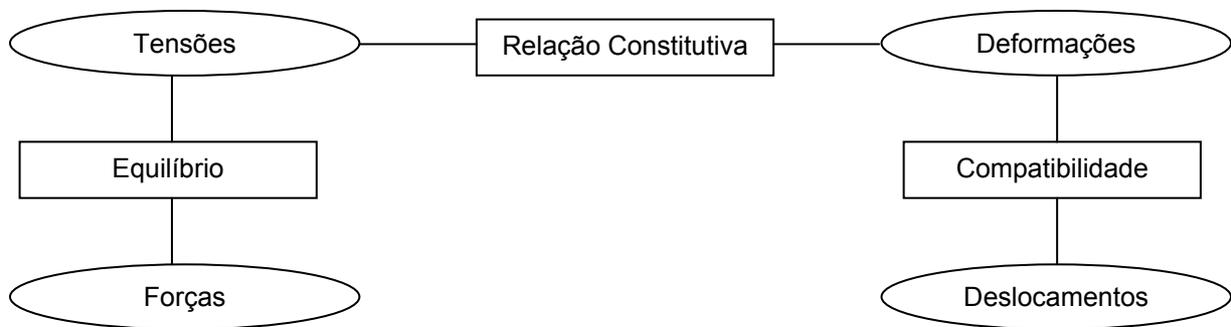


Figura 2.1 – Formulação do problema.

Considere-se, de forma genérica, um corpo definido pelo seu domínio V e limitado pela fronteira Γ . Define-se o vector \mathbf{b} como o vector que reúne as componentes das forças exteriores aplicadas no domínio. A fronteira estática Γ_σ caracteriza-se como a região onde são conhecidas as forças exteriores aplicadas, com componentes listadas no vector \mathbf{t}_γ . A fronteira cinemática Γ_u define-se como a região onde são prescritas as componentes do campo de deslocamentos, reunidas no vector $\bar{\mathbf{u}}$. A fronteira Γ é dada por $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$.

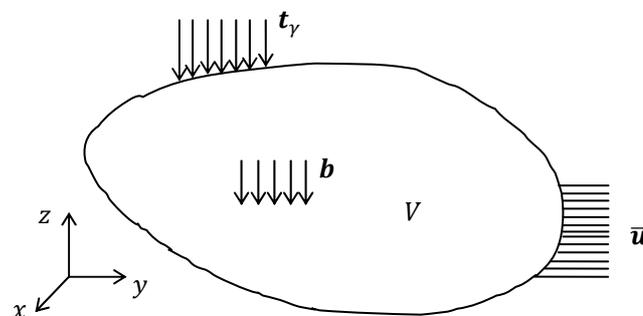


Figura 2.2 – Domínio e fronteira de um sólido genérico.

As equações fundamentais da Mecânica dos Meios Contínuos são apresentadas inicialmente num formato matricial genérico de modo a facilitar a sua aplicação a qualquer tipo de estrutura. De seguida, procede-se à sua particularização para o caso de problemas tridimensionais.

2.2.1 Condições de Equilíbrio

As equações de equilíbrio no domínio V e na fronteira estática Γ_σ podem ser escritas da seguinte forma [Timoshenko e Goodier, 1970]:

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } V, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{D} representa o operador diferencial de equilíbrio e \mathbf{N} a matriz que lista as componentes do vector unitário normal à fronteira estática, Γ_σ . O vector $\boldsymbol{\sigma}$ reúne as componentes independentes do tensor das tensões e o vector \mathbf{b} as componentes das forças de massa.

Para um problema tridimensional, estes operadores correspondem a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{t}_\gamma = \begin{Bmatrix} t_{x\gamma} \\ t_{y\gamma} \\ t_{z\gamma} \end{Bmatrix}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & n_z & 0 \\ 0 & n_y & 0 & n_x & 0 & n_z \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_x & n_y \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

A componente σ_{ij} do tensor das tensões representa a tensão aplicada segundo a direcção i numa faceta perpendicular à direcção j .

2.2.2 Condições de Compatibilidade

Assumindo a validade da hipótese da linearidade geométrica, as condições de compatibilidade podem ser escritas da seguinte forma [Timoshenko e Goodier, 1970]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^* \mathbf{u} \quad \text{em } V, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (2.6)$$

Os vectores $\boldsymbol{\varepsilon}$ e \mathbf{u} listam as componentes independentes do tensor das deformações e do campo de deslocamentos, respectivamente. Para um problema tridimensional, estes vectores são definidos por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{Bmatrix}. \quad (2.7)$$

A matriz \mathbf{D}^* corresponde ao operador diferencial de compatibilidade, em que \mathbf{D} e \mathbf{D}^* são adjuntos, ou seja:

$$D_{ij}^* = (-1)^{n+1} D_{ji}, \quad (2.8)$$

sendo n a ordem do operador diferencial. No caso presente de operadores de 1ª ordem, tem-se $D_{ij}^* = D_{ji}$ e o operador diferencial de compatibilidade é definido por:

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A componente ε_{ii} do tensor das deformações representa a extensão linear de uma fibra infinitesimal inicialmente alinhada segundo o eixo i . A distorção γ_{ij} representa a variação do ângulo formado por duas fibras infinitesimais inicialmente dispostas segundo as direcções i e j . O valor total da distorção relaciona-se com as componentes do tensor das deformações através:

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}. \quad (2.10)$$

2.2.3 Relação Constitutiva

Assumindo um comportamento elástico e não linear para o betão, o vector das componentes do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e o vector das componentes do tensor das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ relacionam-se da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{K}} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

onde o operador $\tilde{\mathbf{K}}$ representa o tensor constitutivo de rigidez do material com comportamento não linear. No caso de comportamento elástico linear do material, o tensor $\tilde{\mathbf{K}}$ coincide com o tensor constitutivo de rigidez do material elástico linear, \mathbf{K} .

A equação anterior, escrita no formato de rigidez, pode ser reescrita no formato de flexibilidade:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{F}} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.12)$$

em que o operador $\tilde{\mathbf{F}}$ representa o tensor constitutivo de flexibilidade do material com comportamento não linear. No caso de comportamento elástico linear do material, o tensor $\tilde{\mathbf{F}}$ coincide com o tensor constitutivo de flexibilidade do material elástico linear, \mathbf{F} .

Os termos dos operadores \mathbf{K} e \mathbf{F} podem ser escritos em função dos parâmetros que definem o comportamento elástico do material, nomeadamente, o módulo de elasticidade, E , e o coeficiente de Poisson, ν . Atendendo às hipóteses de isotropia e linearidade geométrica referidas na Secção (2.1), as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{F} são simétricas e positivas definidas, podendo ser escritas da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1+\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1+\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1+\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}; \quad (2.13)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2.3 Princípios Energéticos Variacionais

O princípio da energia potencial complementar [Washizu, 1975] estabelece que *do conjunto de todas os campos de tensões estaticamente admissíveis, aquele que minimiza o funcional Π_c é a solução exacta do problema*. Entenda-se por campo de tensões estaticamente admissível o campo de tensões que respeita as condições traduzidas pelas equações (2.1) e (2.2).

Admitindo um comportamento elástico linear, este princípio variacional de energia, sujeito às restrições (2.1) e (2.2), expressa-se matematicamente através da minimização da seguinte função objectivo:

$$\Pi_c(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})^T \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma_u. \quad (2.15)$$

A energia potencial complementar, Π_c , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Pi_c = U_* - W_*, \quad (2.16)$$

onde U_* corresponde à energia complementar de deformação e W_* ao trabalho associado aos deslocamentos impostos. Estas duas parcelas são definidas através das igualdades:

$$U_* = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (2.17)$$

$$W_* = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (2.18)$$

Relaxando as condições de equilíbrio (2.1) e (2.2), estas podem ser introduzidas, através do método dos multiplicadores de Lagrange, no funcional da energia potencial complementar do seguinte modo:

$$\Pi_g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u + \int_V \boldsymbol{\lambda}_1^T (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) dV + \int_{\Gamma_\sigma} \boldsymbol{\lambda}_2^T (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma, \quad (2.19)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}_1$ e $\boldsymbol{\lambda}_2$ representam os vectores dos multiplicadores de Lagrange. Assim, obtém-se um funcional variacional generalizado, dependente de três campos, cuja estacionaridade corresponde à solução exacta do problema.

Recorrendo ao cálculo variacional, pode demonstrar-se que os multiplicadores correspondem fisicamente aos campos de deslocamentos, no domínio e na fronteira [Washizu, 1975].

2.4 Comportamento do Betão

O betão é um material compósito constituído, de um modo geral, por agregados, água e pasta de cimento. A zona de transição entre os agregados e a pasta de cimento caracteriza-se por uma maior fraqueza devido à presença de um grande número de poros e microfissuras resultantes da retracção ou da exsudação e ainda pela orientação acentuada dos cristais devida a efeitos de parede [Oliveira, 2002]. Ao contrário da pasta de cimento endurecida e dos agregados, o betão apresenta curvas tensão-deformação acentuadamente não lineares. Este comportamento deve-se essencialmente à existência de escorregamentos dos agregados e à ocorrência de mecanismos de propagação de fissuras.

A heterogeneidade dos materiais utilizados na constituição do betão, particularmente as suas dimensões, a sua natureza e geometria e o seu rearranjo, condiciona o seu comportamento mecânico. No entanto, a análise das curvas tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$) resultantes de ensaios experimentais à tracção e compressão (Figura (2.3)) permite agrupar as seguintes características comuns [da Silva, 2002; Oliveira, 2002; Silva, 2006]:

- A tensão de pico à compressão é cerca de 10 a 15 vezes superior à tensão de pico à tracção em consequência da menor resistência a tensões de tracção da zona de ligação entre os agregados e a pasta de cimento;

- Em ensaios uniaxiais monotónicos, o betão apresenta um comportamento não linear a partir de valores de tensão de, respectivamente, $0.3\sigma_c^{máx}$ e $0.85\sigma_t^{máx}$ para compressão e tracção, com dano interno progressivo e irreversível até se atingir a tensão de pico;
- Num ensaio de compressão, verifica-se a existência de um ramo de endurecimento, podendo existir diferenças notórias entre o limiar linear e a tensão de pico. Num ensaio de tracção, o ramo de endurecimento após o limiar linear é praticamente inexistente;
- Em ambos os ensaios, ocorre uma diminuição da tensão resistente e da rigidez do material após o limiar elástico;
- Quando submetido a acções cíclicas com cargas superiores aos limites lineares, o betão apresenta um comportamento histerético nos ramos de carga/descarga, verificando-se uma diminuição da rigidez inicial e o aparecimento de deformações permanentes.

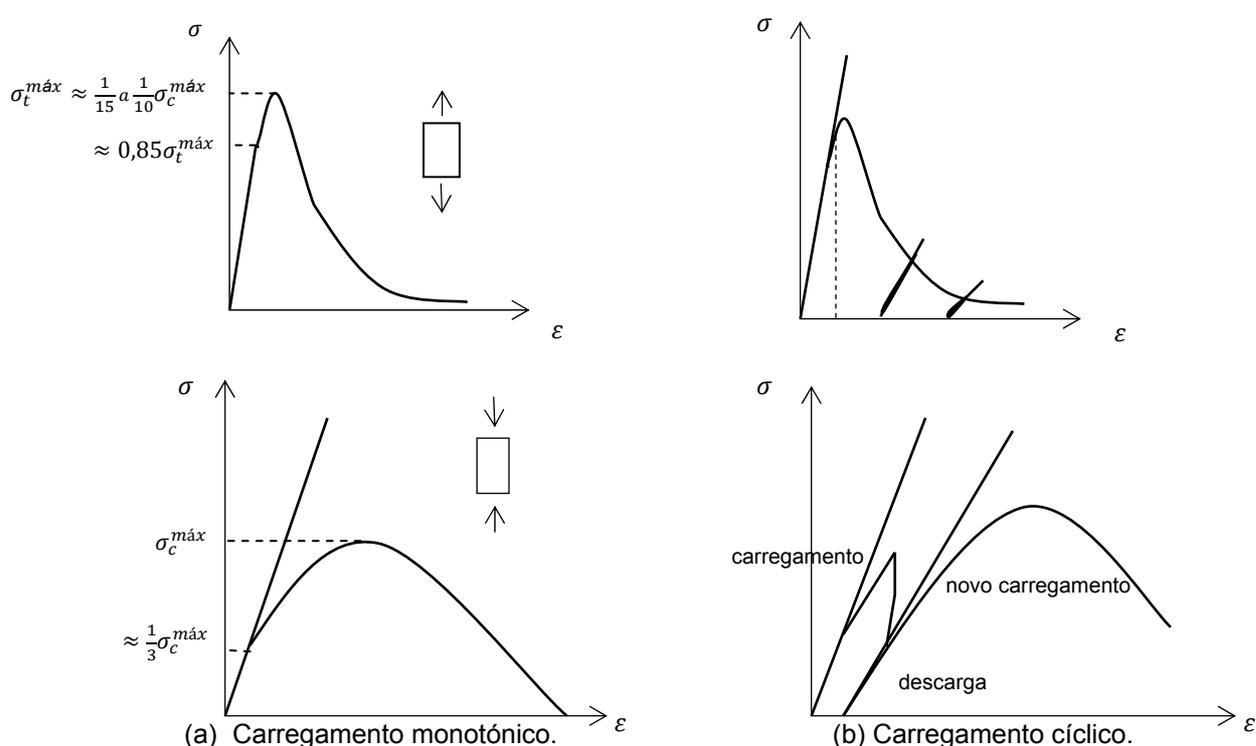


Figura 2.3 – Gráficos tensão-deformação: comportamento uniaxial do betão à tracção e compressão em ensaios monotónicos e cíclicos (adaptado de [da Silva, 2002; Oliveira, 2002]).

O comportamento não linear dos sólidos de betão, observado macroscopicamente, consiste na manifestação dos fenómenos de fendilhação à tracção. A heterogeneidade do betão favorece a concentração de microtensões e conseqüentemente a microfissuração precoce face à resistência máxima à tracção. Nos casos em que a resposta global do material se mantém dentro dos limites do regime elástico, o dano inicial pode evoluir em conseqüência das roturas na interface entre componentes. A evolução do dano depende das condições ambientais e da existência de solicitações mecânicas consistindo, essencialmente, na propagação, crescimento e agrupamento de microfendas e/ou inclusões. Em determinado momento do processo, a danificação conduz à formação e ao

crescimento de microfissuras localizadas que se traduzem em parcelas adicionais de deformações permanentes. A zona do material em carga onde se observa evolução e agrupamento de fendas designa-se por Zona em Processo de Fractura (ZPF).

Macroscopicamente, verifica-se a existência de zonas localizadas de grandes deformações, pelo que a rotura global surge em consequência de uma rotura localizada. A não uniformidade das deformações não permite construir uma única curva ($\sigma - \varepsilon$), tornando-se, portanto, mais correcto analisar a curva carga-deslocamento ($P - u$) que será única [Silva, 2006] (ver Figura (2.4)).

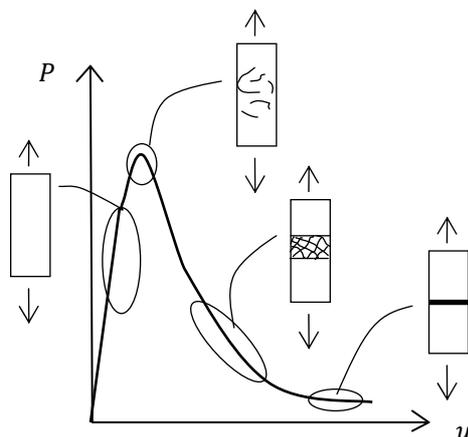


Figura 2.4 – Descrição qualitativa do comportamento macroscópico unidimensional do betão à tracção (adaptado de [Silva, 2006]).

Num ensaio uniaxial de tracção verificam-se os seguintes estágios no comportamento do betão [Silva, 2006]:

- i) Comportamento elástico linear no início do carregamento;
- ii) Aparecimento de microfissuração difusa à medida que se atinge a força máxima de tracção, sendo o endurecimento praticamente inexistente;
- iii) A partir de determinado nível de carga, verifica-se a localização do desenvolvimento da fendilhação e conseqüentemente a diminuição da rigidez e da tensão resistente da estrutura;
- iv) Num último estágio de carregamento, verifica-se a transição de um estado de fissuração distribuída para uma fenda discreta. A ocorrência da fissuração discreta pode ser considerada como o resultado de um processo de localização, numa banda progressivamente mais restrita, da evolução das deformações até à formação da descontinuidade.

Em resultado da localização da fissuração nas estruturas de betão simples, a resposta do material depende das dimensões e tipologia da estrutura, nomeadamente em termos de ductilidade e de tensão resistente. Esta propriedade característica dos materiais *quasi-frágeis* designa-se geralmente por “size effect”, a qual é desenvolvida, por exemplo, em [Mazars et al, 1991; Alfaiate, 1992; Silva, 2006].

2.5 Modelos Constitutivos em Estruturas de Betão Simples

Nesta secção descrevem-se apenas os modelos constitutivos mais comuns na análise de estruturas de betão simples, apresentando-se, de forma breve, as suas principais características com o objectivo de justificar a opção por modelos de dano contínuo. Uma descrição mais detalhada poderá ser encontrada, por exemplo, em [Alfaiate, 1992; Jirásek, 2004; Silva, 2006].

Referem-se também os aspectos mais relevantes da Mecânica da Fractura (MF) e da Mecânica de Dano Contínuo (MDC) que permitem justificar a adopção de modelos constitutivos baseados na MDC. A evolução dos dois tipos de modelos e a sua caracterização é descrita pormenorizadamente em [Elices e Planas, 1989; Alfaiate, 1992; Bazant e Planas, 1998; Jirásek e Bazant, 2002; Jirásek, 2004].

2.5.1 Classificação dos Modelos Constitutivos

Neste trabalho apresentam-se três grupos de modelos constitutivos – modelos contínuos, modelos discretos e modelos mistos – de acordo com a classificação proposta por [Jirásek, 2004]. O modelo constitutivo adoptado corresponde a um modelo contínuo e, assim sendo, apresenta-se uma caracterização mais detalhada deste modelo face aos restantes.

Modelos contínuos

O comportamento não linear do material é descrito através de curvas tensão-deformação recorrendo a modelos constitutivos baseados na Mecânica dos Meios Contínuos. Assim, a tensão pode ser obtida em função da deformação e de variáveis internas ou a deformação em função da tensão e de variáveis internas.

Nos modelos elásticos lineares, dos quais se refere explicitamente a lei de Hooke, a modelação do comportamento linear e isotrópico do material é possível através da consideração de dois parâmetros independentes. Estes, ao contrário dos modelos elásticos não lineares baseados na generalização da lei anterior, não permitem modelar fenómenos irreversíveis.

Nos modelos de plasticidade, as deformações são decompostas numa parcela elástica e numa parcela irreversível, mantendo a rigidez elástica inicial inalterada na descarga. No âmbito da Teoria da Plasticidade, admite-se que as deformações elásticas estão relacionadas com alterações das distâncias intermoleculares, não originando dissipação de energia, enquanto as deformações irreversíveis estão associadas à quebra e à alteração de ligações intermoleculares (microfissuração) e, portanto, relacionadas com fenómenos dissipativos. As deformações irreversíveis são separadas, ainda, em deformações plásticas e inelásticas, as quais ocorrem essencialmente nos metais e no betão, respectivamente [Oliveira, 2002]. As deformações inelásticas encontram-se associadas a fenómenos característicos do comportamento do betão à compressão que ocorrem ao nível da microestrutura, nomeadamente o escorregamento relativo entre cristais e a diminuição de coesão em planos de clivagem. A Teoria da Plasticidade surge associada a um comportamento dúctil em que se

admite o escorregamento plástico. Contudo, face à difícil modelação da diminuição da rigidez aquando da evolução da microfissuração, estes modelos tornam-se menos adequados para modelar o comportamento do betão à tracção.

Para simular o comportamento do material fendilhado recorre-se a modelos de fendilhação. Neste contexto, apresentam-se duas formulações alternativas, associadas regra geral aos modelos convencionais de elementos finitos [Bazant e Planas, 1998]:

- Os *modelos de fenda discreta*, associados ao conceito de fractura, admitem que o dano devido à fissuração distribuída se concentra numa linha ou superfície. A fenda é modelada através da separação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes conduzindo a uma superfície de descontinuidade na malha de elementos finitos considerada na análise. A progressão de uma fenda traduz-se pela introdução de novos pontos nodais em ambos os bordos da superfície de fenda em propagação, o que obriga a recorrer a algoritmos de alteração de malhas. Deste modo, estes modelos tornam-se onerosos, sobretudo em análises tridimensionais e nos casos em que existem muitas fendas.
- Os *modelos de fenda distribuída* permitem a transição suave da fase sem fenda para a fase fendilhada sem alteração da malha de elementos finitos, tornando-se adequados nos casos em que existem zonas com forte fendilhação. A fendilhação é modelada através da modificação das relações constitutivas definidas para o material, mantendo o comportamento à compressão em regime linear. A parcela inelástica das deformações é directamente relacionada com as tensões transmitidas ao longo de uma fenda. Quando a tensão principal numa dada direcção excede a tensão de resistência máxima à tracção uniaxial, admite-se a formação de uma fenda na direcção perpendicular. Desta forma, o modelo inicialmente isotrópico passa a ser ortotrópico.

A evolução dos fenómenos que se desenvolvem entre um estado inicial, caracterizado pela integridade do material, e um estado final relativo à formação de uma fissura macroscópica não pode ser considerada mensurável de forma directa. Contudo, tem sido frequente recorrer a modelos de dano (ver Capítulo 3) para descrever a redução progressiva das propriedades mecânicas do betão, como por exemplo o módulo de elasticidade. Neste âmbito, apresentam-se as seguintes formulações:

- Os *modelos de dano contínuo* pretendem simular a fendilhação e a degradação das propriedades mecânicas, nomeadamente a rigidez inicial do material. Considera-se que a deformação total corresponde à deformação elástica e admite-se um comportamento frágil do material.
- Os *modelos de dano com plasticidade* assumem que o betão fendilhado evidencia deformações permanentes ou irreversíveis, assim como redução da rigidez inicial.

Modelos discretos

Estes modelos caracterizam-se pela ocorrência de deslocamentos e rotações finitas de corpos discretos modelados, por exemplo, com elementos de barra rígidos ou deformáveis. Na análise de estruturas através deste método, admite-se a existência de contactos pontuais entre elementos discretos e consideram-se apenas as ligações internas e as forças transmitidas na interface [Silva, 2006].

Modelos mistos

Ao contrário do modelo anterior, o meio entre elementos não é desprezado. A fractura localizada é modelada através da relaxação local da continuidade do campo de deslocamentos. A utilização de modelos mistos implica o recurso a modelos constitutivos diferentes na simulação da zona sem descontinuidade e na zona com descontinuidade [Silva, 2006].

2.5.2 Mecânica do Dano e da Fractura

Nesta secção pretende-se referir as principais características dos Modelos de Dano Contínuo que justificam a sua escolha para a modelação do desenvolvimento da fissuração e da evolução das estruturas para o estado de rotura. A evolução das propriedades mecânicas em estruturas de betão e o desenvolvimento da fendilhação são modelados através de modelos de dano sem plasticidade, modelos constitutivos relativamente simples.

Os modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo ou na Mecânica da Fractura permitem considerar a energia dissipada na fendilhação e modelar correctamente o amolecimento global. Ao contrário dos modelos clássicos, os modelos da MDC e MF são adequados para a caracterização do comportamento de estruturas de betão simples em que o problema de “size effect” é significativo. De modo representativo, a transição entre dano e fractura é descrita do seguinte modo (Figura (2.5)):

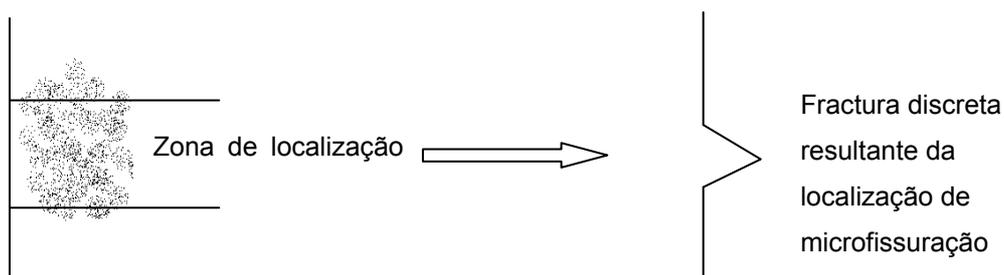


Figura 2.5 – Processo de transição entre dano e fractura [Proença, 2008].

Na Mecânica do Dano Contínuo, a resistência de uma estrutura sujeita a um determinado carregamento é determinada analisando o desenvolvimento da microfissuração, para a qual se

admite uma distribuição contínua. A MDC analisa a evolução das propriedades mecânicas do material desde o estado inicial de fendilhação do material, permitindo antever a localização das deformações.

A Mecânica da Fractura admite o conhecimento da localização da fendilhação, pelo que a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da propagação de fissuras pré-definidas.

Deste modo, a opção pela MF depende do conhecimento *a priori* da localização e direcção das fendas macroscópicas cuja evolução conduz ao colapso da estrutura. A MDC é mais adequada para modelar a rotura de estruturas resultante de um espalhamento e/ou concentração de (micro)fendas. Para além disso, a MDC permite considerar um comportamento não linear para o betão à compressão.

CAPÍTULO 3

Modelo de Dano

3.1 Considerações Iniciais

O estudo da rotura macroscópica foi iniciado por Leonardo da Vinci no início do século XVI com a caracterização da rotura dos materiais através de variáveis mecânicas. Contudo, só na década de 50 do século XX é que surgiu a preocupação de modelar a deterioração progressiva dos materiais que precede a rotura macroscópica.

O conceito físico de dano é introduzido apenas na sequência de um trabalho pioneiro desenvolvido por [Kachanov, 1958], no qual a rotura por fluência de metais sob carregamentos uniaxiais é justificada pela existência de defeitos no material. Nesse contexto, e admitindo um meio equivalente ao real mas contínuo, [Kachanov, 1958] define uma grandeza escalar d que mede o estado local de deterioração ou dano. Para um material íntegro tem-se $d=0$, enquanto se atinge $d=1$ num estado de total perda de integridade da estrutura interna do material. Posteriormente, [Rabotnov, 1968] propõe a redução da rigidez inicial do material em função da variável de dano e introduz a definição de tensão efectiva. Mais recentemente, [Lemaitre e Chaboche, 1988] formalizaram a Mecânica do Dano Contínuo com base nos fundamentos da termodinâmica dos processos irreversíveis.

A descrição pormenorizada da evolução da microfissuração nas estruturas de grandes dimensões é uma tarefa com pouco sentido face à variabilidade dos pormenores da distribuição das microfissuras de uns ensaios para os outros. Para além disso, uma reprodução detalhada dos microdefeitos conduz a um enorme esforço computacional. Assim, a introdução de variáveis internas (variáveis de dano) que permitam caracterizar a evolução do dano em termos médios será um procedimento mais razoável, na medida em que corresponde a uma descrição cuja precisão é adequada aos problemas correntes de Engenharia Civil. O sucesso deste tipo de abordagem é confirmado pelas várias aplicações do modelo de [Kachanov, 1986] a problemas unidimensionais.

A existência de dano no material está associada à evolução da microfissuração. Apesar de o dano não ser directamente mensurável, é possível quantificar as variáveis de dano de forma indirecta. A Mecânica do Dano Contínuo procura descrever o processo de danificação do material ao nível macroscópico através do registo da diminuição da rigidez elástica inicial do material.

Neste trabalho, o comportamento fisicamente não linear do betão é aproximado através de dois modelos de dano escalar isotrópicos, nos quais o tensor de rigidez danificado resulta do tensor de rigidez elástico inicial multiplicado por um coeficiente proporcional a uma variável escalar de dano.

A hipótese de isotropia é facilmente aceitável no estudo de fenómenos de rotura por compressão ao se assumir que, na iminência de uma rotura por compressão num determinado ponto material, este fica isotropicamente danificado. No caso de roturas por tracção, essa hipótese poderá ser considerada razoável se uma fenda for considerada como o lugar geométrico de pontos danificados

isotropicamente numa malha suficientemente refinada [Oliveira, 2002]. Consequentemente, a microfissuração apresenta uma distribuição uniforme, não existindo, portanto, uma direcção preferencial de formação e desenvolvimento das microfendas.

3.2 Aspectos Fenomenológicos

Considere-se um elemento de volume representativo de um sólido com defeitos na sua microestrutura. Admita-se que as suas dimensões são tais que se possa admitir a homogeneidade dos defeitos e, simultaneamente, a inexistência de gradientes elevados de grandezas locais para que possa ser associado a um ponto material (Figura (3.1)).

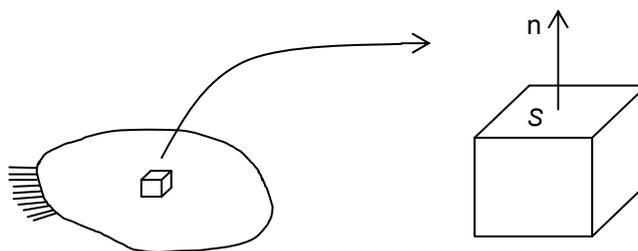


Figura 3.1 – Volume representativo de um sólido com dano.

Seja S a área total de uma secção genérica de normal \vec{n} no interior do elemento e \tilde{S} a área íntegra contida em S . Por definição, a variável de dano local d_n associada ao plano de normal \vec{n} é definida pela relação [Lemaitre e Chaboche, 1988]:

$$d_n = \frac{S - \tilde{S}}{S}. \quad (3.1)$$

A variável de dano assume valores entre zero e a unidade, sendo que $d_n = 0$ corresponde à situação de material completamente íntegro e $d_n = 1$ a um estado de total deterioração, à semelhança do estabelecido por [Kachanov, 1958]. É possível verificar a partir da Equação (3.1) que a variável de dano local é uma quantidade não decrescente, em resultado da área íntegra \tilde{S} ter sempre tendência a diminuir ou a manter-se constante. Desta forma, o desenvolvimento do dano é modelado como um processo irreversível, estando de acordo com o comportamento observado experimentalmente nos materiais que exibem ramo de amolecimento.

O dano no elemento de volume é representado por uma variável tensorial d_n que depende do ponto e da orientação considerada. O modelo é considerado isotrópico quando a variável de dano é independente da direcção \vec{n} , ou seja, quando os defeitos e vazios do material estão uniformemente distribuídos em todas as direcções. Caso exista uma direcção preferencial para as microfissuras, o modelo designa-se por anisotrópico em consequência da resposta do material não ser a mesma em todas as direcções.

Num problema unidimensional, a relação constitutiva do meio contínuo decorre da modelação do meio como um arranjo de fibras paralelas à direcção de carga com deformação imposta constante [Rabotnov, 1968] (ver Figura (3.2)).

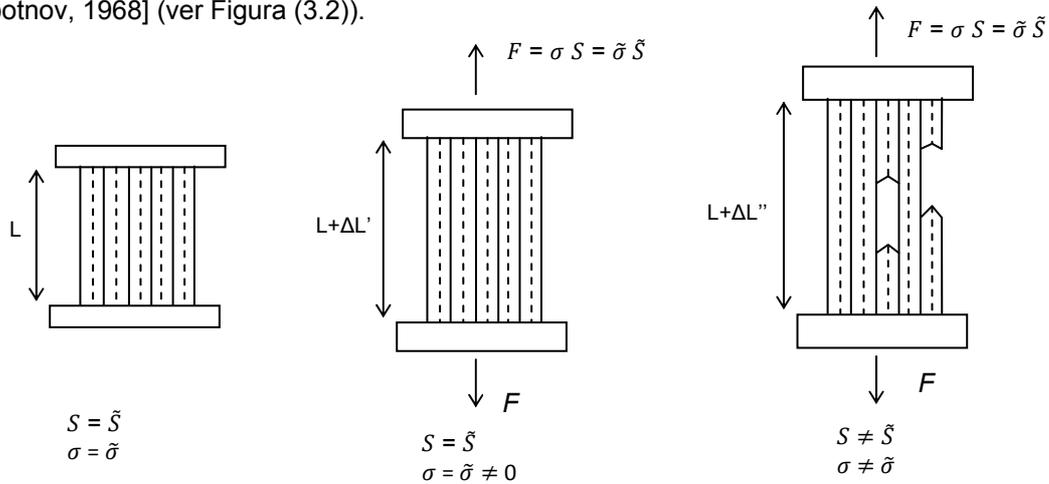


Figura 3.2 – Representação esquemática de um modelo uniaxial com equivalência de deformações (adaptado de [Rabotnov, 1968]).

Considere-se que cada fibra apresenta um comportamento elástico perfeitamente frágil, isto é, admite-se que a tensão se dissipa totalmente no instante em que se atinge a deformação resistente máxima. As fibras têm todas a mesma rigidez inicial E , mas deformações resistentes máximas ligeiramente diferentes. A tensão inicial normal no material é definida em função da força aplicada F através:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \quad (3.2)$$

Com o decorrer do processo de danificação, o rompimento progressivo das fibras menos resistentes traduz-se na variação da área resistente de S para \tilde{S} . Observando a Figura (3.2), verifica-se que quando o material está intacto $S = \tilde{S} \Rightarrow \sigma = \tilde{\sigma}$, enquanto se o material estiver totalmente danificado (fase final) $\tilde{S} \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\sigma} \rightarrow \infty$. Surge então o conceito de tensão efectiva $\tilde{\sigma}$, definida como:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \Leftrightarrow \tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}}. \quad (3.3)$$

Introduzindo a variável de dano (Equação (3.1)) na Equação (3.3), a tensão efectiva $\tilde{\sigma}$ é definida em função tensão σ e da variável de dano d de um problema unidimensional:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d}. \quad (3.4)$$

No âmbito dos meios contínuos, o axioma constitutivo da acção local admite que a resposta constitutiva num ponto não depende do que ocorre nos elementos vizinhos. Estendendo-se este axioma ao meio com dano, resulta que a resposta constitutiva para um ponto na parte íntegra não é afectada pelo dano, sendo importante considerar a tensão e deformação efectivas. Estabelece-se, portanto, o princípio geral de equivalência da resposta constitutiva [Lemaitre e Chaboche, 1988] enunciado como: *A lei constitutiva do meio danificado é obtida da lei constitutiva do meio íntegro onde*

o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensões efectivas e o tensor linear de deformações pelo tensor de deformações efectivas. Para um problema uniaxial e admitindo que o meio íntegro tem uma resposta elástica linear, o princípio enunciado traduz-se na seguinte relação:

$$\tilde{\sigma} = E \tilde{\varepsilon}. \quad (3.5)$$

A relação constitutiva pode envolver a equivalência de energia ou a equivalência de tensão ou ainda a equivalência de deformação, adoptando-se, normalmente, a última em modelos de dano isotrópico. O princípio de equivalência de deformação proposto por [Lemaitre e Chaboche, 1988] estabelece que a deformação do meio íntegro onde actua a tensão efectiva é a mesma do meio danificado, ou seja, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. O princípio de equivalência de deformação pode ser enunciado do seguinte modo: *O estado de deformação de um material com dano é obtido da lei do comportamento do material íntegro onde o tensor de tensões é substituído pelo tensor de tensões efectivas*. No caso de um problema uniaxial, e admitindo um comportamento elástico linear até à rotura, o princípio da equivalência de deformação resulta na relação constitutiva da parte íntegra do meio danificado:

$$\tilde{\sigma} = E \varepsilon. \quad (3.6)$$

O princípio da equivalência de deformações pode ser interpretado do seguinte modo:

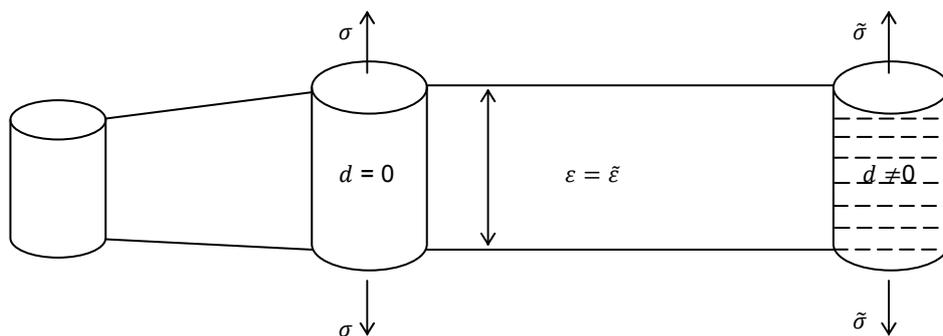


Figura 3.3 – Hipótese de deformação equivalente (adaptado de [Proença, 2008]).

A relação constitutiva do meio contínuo com dano obtém-se pela introdução da relação entre a tensão efectiva e a variável de dano (Equação (3.4)) na lei de Hooke aplicada à parte íntegra do meio danificado (Equação (3.6)):

$$\sigma = (1 - d) E \varepsilon. \quad (3.7)$$

A equação anterior, obtida no pressuposto da igualdade das deformações das fibras danificadas e das deformações das restantes fibras do material ao longo de todo o processo, assume que o estado de deformação de um material com dano é obtido a partir da lei do comportamento do material íntegro onde o tensor das tensões é substituído pelo tensor das tensões efectivas.

Nos problemas tridimensionais, a variável de dano pode ter um carácter tensorial e os tensores das tensões e das tensões efectivas podem relacionar-se de seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}, \quad (3.8)$$

onde α_{ijklm} é um tensor adimensional de 4ª ordem dado por:

$$\alpha_{ijklm} = I_{ijklm} - D_{ijklm}. \quad (3.9)$$

Os operadores I e D representam o tensor identidade e o tensor de dano de 4ª ordem, respectivamente. Admitindo que o tensor de dano é isotrópico, a expressão (3.8) simplifica-se e o tensor α passa a ser definido como:

$$\alpha_{ijklm} = (1 - d)I_{ijklm}, \quad (3.10)$$

permitindo recuperar as expressões (3.4) e (3.6), generalizando-as para o caso tridimensional. Esta simplificação dá origem aos modelos de dano isotrópico que se caracterizam pela natureza escalar e não tensorial da variável de dano.

3.3 Modelos de Dano

A Mecânica do Dano Contínuo descreve a evolução dos fenómenos que ocorrem num dado material sujeito a um determinado carregamento desde o estado íntegro até à formação de fissuras macroscópicas. Esta evolução pode ser descrita adequadamente utilizando vários tipos de variáveis de dano. Actualmente, existem diversos tipos de modelos de dano que podem ser classificados quanto ao tipo de variáveis adoptadas e quanto ao tipo de leis de evolução para essas grandezas.

Quanto ao tipo de leis de evolução das variáveis de dano, os modelos de dano podem classificar-se como [Lemaitre e Chaboche, 1988]:

- i) Modelos de dano elástico – as leis dependem apenas da extensão elástica;
- ii) Modelos de dano plástico dúctil – as leis dependem da extensão plástica;
- iii) Modelos de dano de fluência – as leis dependem do tempo;
- iv) Modelos de dano de fadiga – as leis dependem do número de ciclos de carga;
- v) Modelos de dano devido a expansões - as leis dependem da quantidade de gel produzido durante o processo expansivo.

A escolha do tipo de leis de evolução das variáveis de dano deve considerar o tipo de material e de acções que se pretendem modelar. Segundo [Mazars, 1984], é perfeitamente adequado adoptar leis de evolução do dano que dependam apenas da extensão elástica para a análise do comportamento instantâneo de estruturas de betão sujeitas a carregamentos monotónicos.

Quanto ao tipo de variáveis de dano adoptadas, os modelos de dano podem designar-se como modelos de dano escalar ou modelos de dano vectorial ou tensorial.

Os modelos de dano escalar a adoptar podem ser:

- Modelos tipo Kachanov [Kachanov, 1958] de uma variável escalar [Comi e Perego, 2001] ou de duas variáveis dependentes [Mazars, 1984];

- Modelos de duas variáveis independentes [Lemaitre e Chaboche, 1988] que consideram uma variável de dano d_s associada à parcela de corte da energia elástica e outra d_H associada à parcela hidrostática da energia elástica;
- Modelos de duas variáveis independentes [Faria, 1994; da Silva, 2002] que consideram uma variável de dano d^+ associada à tracção (parcela positiva do tensor das tensões) e outra d^- associada à compressão (parcela negativa do tensor das tensões).

Os modelos de dano vectorial ou tensorial a considerar são do tipo [Ju e Valanis, 1992; Oliveira, 2002]:

- Modelos de dano vectorial onde é usada uma variável de dano vectorial $\vec{d} = d\vec{n}$, sendo o escalar d a densidade de fissuras numa secção recta definida pela normal \vec{n} ;
- Modelos de dano tensorial em que a variável de dano é descrita por intermédio de tensores de 2ª ordem d_{ij} . Estes modelos foram concebidos para materiais com determinados conjuntos de fissuras planas em que a definição do tensor de dano é baseada na geometria do sistema de fendas;
- Modelos baseados em tensores de 4ª ordem onde se admite, com base em considerações mecânicas, que o tensor de dano d_{ijkl} representa a degradação do tensor de elasticidade inicial D_{ijkl} , definindo-se $d_{ijkl} = \frac{D_{ijmn} - \tilde{D}_{ijmn}}{D_{mnkl}}$, em que \tilde{D}_{ijmn} representa o tensor de elasticidade com dano [Ju, 1989; Lemaitre e Desmorat, 2005].

Os modelos de dano podem ser classificados ainda como isotrópicos ou anisotrópicos. Face ao exposto na Secção (3.1), neste trabalho adoptam-se modelos de dano isotrópico. Assim sendo, apenas se descrevem estes tipos de modelos, para o caso de solicitações uniaxiais e para o caso de solicitações multiaxiais. Uma descrição dos modelos de dano anisotrópico pode ser encontrada, por exemplo, em [Lemaitre, 1992; Jirásek, 2004; Lemaitre e Desmorat, 2005; Silva, 2006].

3.3.1 Modelo de Dano Isotrópico Uniaxial

Nesta secção considera-se um modelo de dano uniaxial semelhante ao representado na Figura (3.2), no qual a relação constitutiva secante local entre a tensão normal e a deformação associada corresponde à Equação (3.7). A função matemática para a *lei de evolução de dano* g pode ser obtida directamente a partir dos resultados experimentais, desde que o modelo seja consistente com as bases da termodinâmica dos processos irreversíveis [Kachanov, 1986; Lemaitre, 1992; Lemaitre e Desmorat, 2005].

Numa fase inicial, a resposta do material é elástica linear. Quando a energia elástica armazenada atinge um determinado valor crítico, a variável de dano assume valores não nulos de forma a traduzir a perda de integridade do material. Analise-se a evolução da variável de dano esquematizada no gráfico da Figura (3.4).

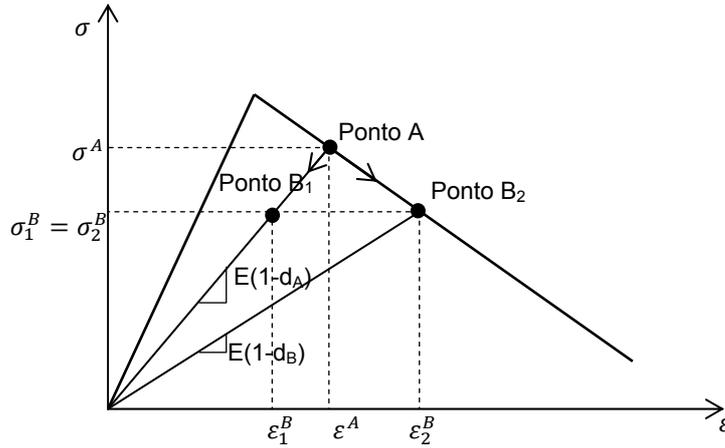


Figura 3.4 – Evolução da variável interna de dano no regime de amolecimento.

É possível a ocorrência de duas situações na passagem do Ponto A para o Ponto B: ou o material entra em descarga (Ponto A → Ponto B₁) ou mantém-se em carga (Ponto A → Ponto B₂), verificando-se a igualdade do valor de tensão para as posições B₁ ou B₂. Deste modo, a nova posição no gráfico tensão-deformação é determinada pela relação entre o novo valor de deformação e a deformação do Ponto A. Assim, a evolução da variável de dano deve ser calculada em função da deformação podendo, à partida, escrever-se:

$$d = g(\varepsilon). \quad (3.11)$$

Contudo, facilmente se verifica que a expressão anterior não impede a diminuição do valor da variável de dano e no caso de descarga total o valor do dano anula-se. Atendendo à definição de dano, a função g deve depender, para além da deformação actuante no material, de uma grandeza k que traduz a influência da máxima deformação a que o material já esteve sujeito. Assim, para o caso unidimensional, define-se uma nova lei de evolução:

$$d = g(k), \quad \text{com } k(t) = \max \{ \max [\varepsilon(\tau)], k_0 \}, \quad \tau \leq t, \quad (3.12)$$

onde k_0 está associado à deformação máxima para a qual o material não apresenta dano.

Ao contrário da expressão (3.11), a lei de evolução na expressão (3.12) permite manter a rigidez e a resistência máxima do material com dano reduzidas em situações de descarga resultando, portanto, uma modelação mais correcta do comportamento pretendido.

No caso unidimensional, as posições B₁ ou B₂ são identificadas através da comparação da deformação actuante ε com a grandeza k de modo a avaliar a variabilidade da variável de dano. A comparação é realizada através do *potencial de dissipação* f , sendo:

$$f(\varepsilon, k) = \varepsilon - k. \quad (3.13)$$

Nesta sequência, definem-se as *condições de carga e descarga de Kuhn-Tucker* como:

$$f \leq 0, \quad \dot{k} \geq 0, \quad \dot{k} f = 0. \quad (3.14)$$

A definição da grandeza k na Equação (3.12) é substituída pelas duas primeiras condições de Kuhn-Tucker que definem k como uma grandeza não decrescente e sempre superior ou igual à deformação actuante ε . A terceira condição Kuhn-Tucker expressa que apenas ocorre evolução da grandeza k se o potencial de dissipação for nulo, ou de modo equivalente, quando a deformação ε e a grandeza k são iguais.

3.3.2 Modelo de Dano Isotrópico Multiaxial

As relações constitutivas nos casos multiaxiais baseiam-se na hipótese de isotropia que se traduz matematicamente pela preservação das direcções principais do tensor de rigidez inicial. A danificação com preservação da isotropia pode ser admitida como um caso particular, válido se a microfissuração apresentar uma orientação difusa. Neste contexto, e admitindo o princípio de equivalência de deformações, a relação constitutiva secante no caso multiaxial é obtida directamente a partir da generalização da Equação (3.7). A expressão generalizada relaciona os tensores de segunda ordem de tensão e de deformação através de um tensor constitutivo de rigidez elástico secante de quarta ordem com dano, $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{K}} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.15)$$

O tensor constitutivo de rigidez do material com dano $\tilde{\mathbf{K}}$ é obtido a partir do tensor constitutivo do material sem dano \mathbf{K} de uma das seguintes formas [Proença, 2000]:

- i) Afectando igualmente todas as componentes do tensor constitutivo por uma única variável escalar de dano, $\tilde{\mathbf{K}} = (1 - d) \mathbf{K}$;
- ii) Considerando duas variáveis escalares de dano independentes que afectam as componentes do tensor constitutivo \mathbf{K} . As alterações introduzidas no tensor constitutivo \mathbf{K} dependem do tipo de modelo de dano considerado (ver Secção (3.3)).

Para simplificar a expressão da lei secante tensão-deformação e a relação entre os tensores $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, assume-se $\tilde{\mathbf{K}} = (1 - d) \mathbf{K}$. Assim, as equações constitutivas de um modelo de dano isotrópico são:

$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}$	Lei secante tensão - deformação
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d}$	Relação tensão efectiva – tensão
$d = g(k)$	Lei de evolução do dano
$f(\varepsilon, k) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) - k$	Potencial de dissipação
$f \leq 0, \quad \dot{k} \geq 0, \quad \dot{k}f = 0$	Condições de carga/descarga

Tabela 3.1– Resumo das equações constitutivas de um modelo de dano isotrópico.

No modelo de dano uniaxial, a grandeza k corresponde ao valor máximo entre a deformação limite em regime elástico linear e a deformação máxima a que o material já esteve sujeito. No modelo de dano multiaxial, torna-se necessário definir uma *deformação equivalente* $\tilde{\varepsilon}$ que depende directamente do tensor de deformações, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon})$.

A deformação equivalente pode ser definida de forma simples através [Lemaitre, 1992]:

$$\tilde{\varepsilon} = Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Considerando o princípio da equivalência de deformações, a variável Y corresponde à taxa de energia de deformação elástica, ou seja, à variação de energia livre ψ na sequência do aumento da variável de dano d , a deformação e temperatura constantes [Lemaitre, 1992].

Normalizando a Equação (3.16), obtém-se a seguinte definição para a deformação equivalente:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}}{E}}. \quad (3.17)$$

Contudo, as duas definições apresentadas para a deformação equivalente conduzem a um comportamento do material igual à tracção e compressão. Para contornar esta situação, é necessário adoptar outras formulações que traduzam de forma mais correcta o comportamento realista do betão. Os modelos de dano local adoptados ao longo deste trabalho são apresentados de forma sucinta na secção que se segue.

3.4 Modelos de Dano Local Adoptados

3.4.1 Modelo com Uma Variável de Dano [Comi e Perego, 2001]

O modelo de dano com apenas uma variável escalar de dano d apresentado por [Comi e Perego, 2001] baseia-se na densidade de energia livre de Helmholtz definida como:

$$\psi = \frac{1}{2} (1 - d) \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon} + \psi_{in}(\xi), \quad \text{com } d \in [0,1]. \quad (3.18)$$

A função $\psi_{in}(\xi)$ corresponde à densidade de energia inelástica, expressa em função de uma variável interna escalar de origem cinemática, ξ .

Para a expressão (3.18), [Comi e Perego, 2001] apresentam as seguintes equações de estado:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.19)$$

$$Y = -\frac{\partial \psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.20)$$

$$\chi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \psi'_{in}(\xi) = k \ln^n \left(\frac{c}{1 - \xi} \right). \quad (3.21)$$

As variáveis de estado são a deformação elástica ε , a variável de dano d e a variável interna ξ . As respectivas variáveis associadas são a tensão σ (Equação (3.19)), a taxa de energia de deformação elástica Y (Equação (3.20)) e a força termodinâmica χ (Equação (3.21)). Os parâmetros n , k e c dependem do material.

O potencial de dissipação é definido como:

$$f(Y - \chi) = Y - \chi = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{K} : \varepsilon - \chi \leq 0. \quad (3.22)$$

Assim, a deformação equivalente torna-se igual à taxa de energia de deformação elástica Y .

As leis de evolução das variáveis internas obtêm-se a partir do potencial de dissipação anterior:

$$\dot{d} = \frac{\partial f}{\partial Y} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}, \quad (3.23)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}, \quad (3.24)$$

onde γ representa um escalar positivo. Analisando as equações (3.23) e (3.24), verifica-se que, para este modelo constitutivo, o valor da variável de dano d coincide com o valor da variável interna ξ e com o escalar positivo γ .

As condições de Kuhn-Tucker de carga-descarga são:

$$f \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0. \quad (3.25)$$

O potencial de dissipação pode ser reescrito em função da tensão efectiva (Tabela (3.1)) e da matriz de flexibilidade elástica do material íntegro, \mathbf{F} , como:

$$f(Y - \chi) = Y - \chi = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \mathbf{F} : \tilde{\sigma} - \chi. \quad (3.26)$$

No caso unidimensional, verifica-se um comportamento elástico linear até um determinado limite de deformação $\varepsilon_0 = \sqrt{k \ln(c)^n \frac{2}{E}}$, a partir do qual o material apresenta dano e entra em regime não linear [Silva, 2006].

Analisando a Equação (3.22), constata-se que neste modelo de dano as extensões de tracção e de compressão provocam o mesmo tipo de dano, resultando, portanto, um comportamento do betão semelhante para solicitações de tracção e de compressão. Para contornar esta limitação pouco realista, considera-se neste trabalho que apenas existe dano se $\text{tr} \varepsilon \geq 0$. Apesar de não traduzir o comportamento real do material, este modelo constitutivo mostra-se adequado para o estudo de estruturas sujeitas essencialmente a esforços de tracção [Silva, 2006]. De referir ainda que, a existência de um ramo de endurecimento antes do ramo de amolecimento na curva $\sigma - \varepsilon$ depende dos parâmetros do material.

3.4.2 Modelo de Dano de [Mazars, 1984]

O modelo de dano originalmente desenvolvido por [Mazars, 1984] modela o comportamento fisicamente não linear do betão através da introdução de uma variável escalar de dano d , e admite que o aparecimento e a evolução de dano resultam apenas da existência de extensões positivas. Deste modo, considera-se apenas a parte positiva das componentes principais do tensor das deformações no cálculo da deformação equivalente, podendo adoptar-se a expressão:

$$\bar{\varepsilon} = \|\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\| = \sqrt{\langle \varepsilon_I \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_{II} \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_{III} \rangle_+^2} = \sqrt{\sum_{i=I}^{i=III} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2}, \quad (3.27)$$

onde ε_i representa a deformação principal na direcção i e

$$\langle (\cdot) \rangle_+ = \frac{1}{2} [(\cdot) + |(\cdot)|], \quad (3.28)$$

$$\langle (\cdot) \rangle_- = \frac{1}{2} [(\cdot) - |(\cdot)|]. \quad (3.29)$$

Assim, a i -ésima componente positiva do tensor de deformações principais é dada por:

$$\langle (\varepsilon_i) \rangle_+ = \frac{1}{2} [(\varepsilon_i) + |(\varepsilon_i)|]. \quad (3.30)$$

Segundo este modelo constitutivo, o material apresenta um comportamento elástico linear enquanto a deformação equivalente não atingir um determinado valor de referência ε_{d0} . Quando se atinge a deformação ε_{d0} , o material começa a apresentar dano e entra em regime não linear. No caso unidimensional, o valor do parâmetro ε_{d0} é determinado em função do valor da resistência máxima em ensaios de tracção uniaxial, f_t , dada por:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_t}{E}. \quad (3.31)$$

O potencial de dissipação é definido como:

$$f(\bar{\varepsilon}, d) = \bar{\varepsilon} - \chi(d) \leq 0, \quad \text{com } \chi(0) = \varepsilon_{d0}. \quad (3.32)$$

Admitindo a irreversibilidade do processo de dano, a lei de evolução da variável d é traduzida por:

$$\dot{d} = 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0, \quad (3.33)$$

$$\dot{d} = \mathbf{F}(\bar{\varepsilon}) \langle \dot{\bar{\varepsilon}} \rangle_+ \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0, \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{F}(\bar{\varepsilon})$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente, de modo que $\dot{d} \geq 0$ para qualquer $\dot{\bar{\varepsilon}} \geq 0$.

Para casos de tracção e compressão uniaxiais, definem-se duas variáveis escalares independentes, d_t e d_c , que representam o dano de tracção e compressão, respectivamente. As leis de evolução destas duas variáveis são dadas por:

$$\dot{d}_t = \mathbf{F}_t(\bar{\varepsilon}) \langle \dot{\bar{\varepsilon}} \rangle_+, \quad (3.35)$$

$$\dot{d}_c = \mathbf{F}_c(\bar{\varepsilon}) \langle \dot{\bar{\varepsilon}} \rangle_+, \quad (3.36)$$

onde:

$$\mathbf{F}_t(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_t B_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{F}_c(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{A_c B_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.38)$$

Os parâmetros A_t , B_t , ε_{d0} , A_c e B_c são parâmetros característicos do material, podendo-se determinar os três primeiros em ensaios de tracção uniaxial com deformação controlada e os dois últimos em ensaios de compressão uniaxial com deformação controlada. No caso de um ensaio uniaxial de tracção, os parâmetros A_t e B_t influenciam, respectivamente, a inclinação inicial do troço não linear e o valor da assíptota horizontal, e o sinal da inclinação inicial do troço não linear e o valor de pico do diagrama $(\sigma - \varepsilon)$; o parâmetro ε_{d0} influencia o início e a inclinação inicial do troço não linear (“softening”), assim como o valor assíptótico de σ . No caso de um ensaio uniaxial de compressão, a influência dos parâmetros A_c e B_c é análoga à dos parâmetros A_t e B_t , respectivamente. [Mazars, 1984] propôs os seguintes limites de variação para esses parâmetros com base em resultados experimentais: $0.7 \leq A_t \leq 1$; $10^4 \leq B_t \leq 10^5$; $10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4}$; $1 \leq A_c \leq 1.5$; $10^3 \leq B_c \leq 2 \times 10^3$.

Integrando as expressões (3.35) e (3.36), obtém-se:

$$d_t(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.39)$$

$$d_c(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.40)$$

Para além dos casos mais simples de solicitações apresentados, a variável de dano pode ser definida como uma combinação linear de d_t e d_c de modo a traduzir estados de tensão mais complexos. A variável de dano correspondente é definida como:

$$d = \alpha_t d_t + \alpha_c d_c, \quad (3.41)$$

verificando-se sempre $\alpha_t + \alpha_c = 1$. A Equação (3.41) respeita as características dos casos uniaxiais. Os coeficientes α_t e α_c assumem o valor unitário em tracção uniaxial e em compressão uniaxial, respectivamente.

Segundo [Perego, 1990], estes coeficientes são determinados do seguinte modo:

$$\alpha_t = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}, \quad (3.42)$$

$$\alpha_c = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}, \quad (3.43)$$

onde:

$$\varepsilon_T = \frac{1 + \nu}{E} \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_+ \mathbf{I}; \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_C = \frac{1 + \nu}{E} \langle \tilde{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- \mathbf{I}; \quad (3.45)$$

sendo \mathbf{I} o tensor identidade e $\langle \tilde{\sigma} \rangle_+$ e $\langle \tilde{\sigma} \rangle_-$ representam, respectivamente, as partes positiva e negativa do tensor das tensões efectivas principais calculado em função das deformações actuais aplicando a relação elástica isotrópica.

No modelo de dano escalar isotrópico desenvolvido por [Mazars, 1984], o tensor de rigidez danificado resulta da afectação das componentes do tensor de rigidez elástico inicial pela variável de dano d . Deste modo, a relação constitutiva na forma secante expressa-se como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{K} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.46)$$

3.5 Localização das Deformações

Nos materiais *quasi*-frágeis como o betão verifica-se a localização da evolução das deformações numa banda restrita do material (ver Secção (2.4)). Numa abordagem de fenda distribuída, o comportamento constitutivo macroscópico do material nas regiões microfissuradas pode ser representado pela relação tensão-deformação. Contudo, quando para deformação crescente num meio homogéneo com deformação homogénea é atingida a tensão máxima, existe a possibilidade de se obter, espontaneamente e sem alteração do estado de tensão, uma deformação não homogénea em que as deformações associadas ao amolecimento se concentram numa determinada região (banda) enquanto fora desta banda todo o material descarrega elasticamente.

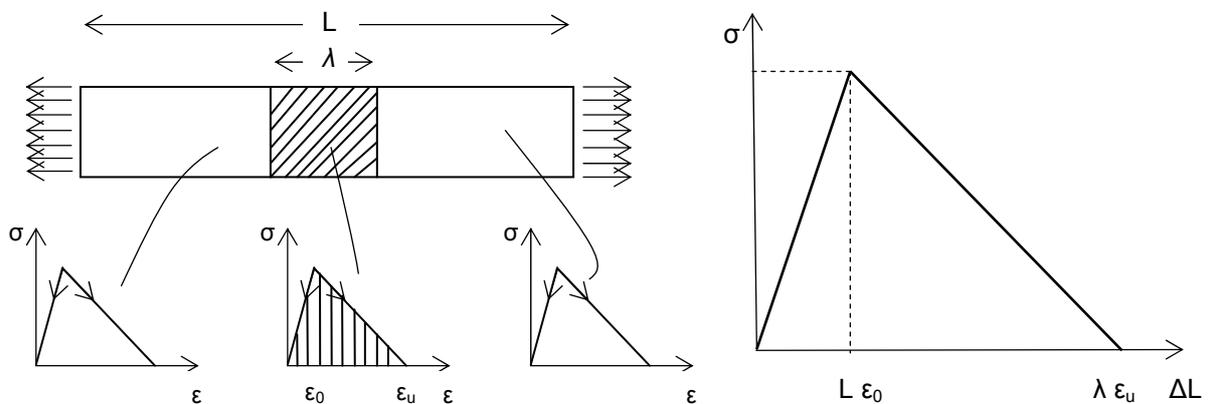


Figura 3.5 – Localização das deformações: resposta de um modelo local (adaptado de [Alfaiate 1992; Silva, 2006]).

O comportamento descrito anteriormente encontra-se ilustrado na Figura (3.5), a qual representa uma barra de comprimento L de secção constante sujeita a um carregamento uniforme de tração. A heterogeneidade do material, resultante da existência de vazios e microdefeitos na sua microestrutura, permite considerar a existência de uma zona da barra mais fragilizada, com comprimento λ . O material responde de forma elástica linear até ao limite de deformação ε_0 , a partir do qual entra num ramo de amolecimento com uma relação tensão-deformação linear. Considerando que a deformação ε_0 é atingida primeiro na zona fragilizada, o campo de deformações deixa de ser homogéneo e a zona fragilizada entra em regime de amolecimento, enquanto a restante estrutura

descarrega elasticamente. Para um modelo constitutivo local, a resposta global da estrutura pode ser representada pelo gráfico tensão-deformação apresentado na Figura (3.5), no qual o ramo de amolecimento depende directamente do comprimento da zona fragilizada, λ .

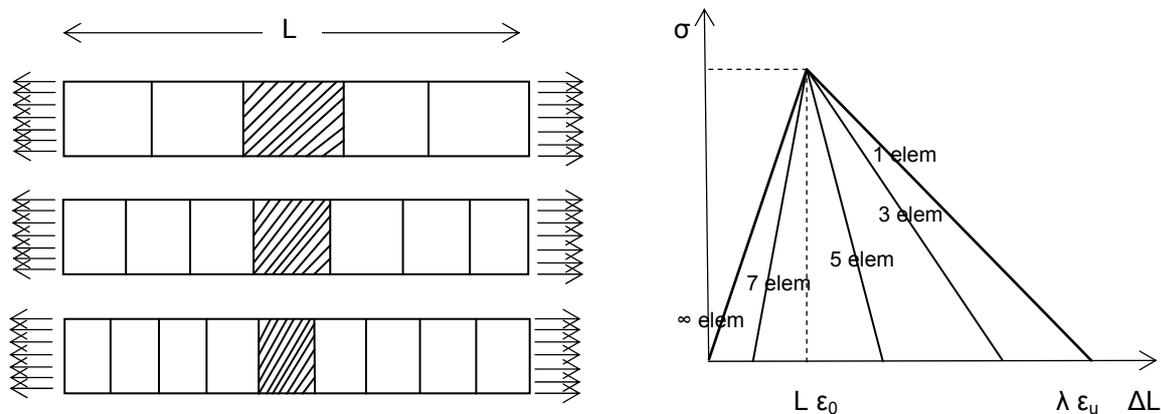


Figura 3.6 – Resposta qualitativa do modelo de elementos finitos com um modelo de dano local: resposta não objectiva (adaptado de [Alfaiate, 1992; Silva, 2006]).

Considere-se um modelo de elementos finitos convencionais com elementos de deformação constante em que a largura da zona de localização das deformações corresponde à largura do elemento finito mais danificado. Analisando o problema com um modelo de elementos finitos (Figura (3.6)), constata-se que a resposta não é objectiva, ou seja, depende significativamente da discretização considerada na análise. Devido à localização da dissipação de energia numa banda de largura indeterminada, a consideração de soluções com bandas de amolecimento de largura infinitamente pequena mostraria que a formação de uma fenda poderia ser atingida com dissipação de energia tendente para zero, o que é absurdo do ponto de vista do comportamento físico do material estrutural [Mazars et al, 1991; Alfaiate, 1992; Silva, 2006].

A formulação de elementos finitos baseada num modelo constitutivo local é incapaz de traduzir o real comportamento do betão dado que, na situação limite de refinamento, a resposta do modelo é obtida com energia dissipada nula. O modelo de dano local baseia-se na hipótese de continuidade do material até uma escala infinitamente pequena, hipótese nem sempre aplicável ao nível da microestrutura onde ocorrem fenómenos irreversíveis.

A localização da deformação em zonas de volume nulo verificada nos modelos com amolecimento e os problemas de dano local podem ser ultrapassados através de duas abordagens distintas.

Uma primeira abordagem consiste na *regularização baseada na energia de fractura*, que relaciona a energia de fractura com a “área de influência” de cada ponto de integração da formulação de elementos finitos. Contudo, esta metodologia não permite regularizar o problema matemático e conduz a uma forte dependência entre a distribuição de dano e a malha de elementos finitos adoptada [Silva, 2006]. Este tipo de abordagem é adequado para a análise de estruturas de grandes dimensões [Faria, 1994].

Alternativamente, é possível considerar uma *regularização baseada no conceito de meio contínuo não local* através da introdução de uma variável não local cujo valor num ponto é obtido por uma ponderação numa determinada vizinhança do ponto considerado. Este tipo de abordagem traduz-se na implementação de delimitadores da localização no modelo constitutivo [Mazars et al, 1991; Bazant e Jirásek, 1994]. Em consequência desta alteração, é possível considerar os seguintes métodos de regularização:

- i) Teorias micro-polares do contínuo [de Borst, 1991];
- ii) Teorias não locais [Pijaudier-Cabot e Bazant, 1987];
- iii) Modelos de gradiente explícito [Comi e Perego, 1996] ou modelos de gradiente implícito [Peerlings et al., 1996];
- iv) Modelos com dependência da velocidade de deformação (“rate-effects”) [Needleman, 1988].

Estes modelos de regularização consistem na introdução de um comprimento característico interno que está relacionado com a largura da zona onde na realidade se desenvolve o processo de fissuração. Pretendem, deste modo, recuperar a objectividade da resposta, limitando a localização da deformação a uma zona com uma determinada largura mínima considerada como uma propriedade do material e conduzindo a resultados que não dependem da discretização adoptada na análise.

3.6 Método de Regularização Adoptado

Neste trabalho, utiliza-se um modelo conhecido por modelo integral não local, para o qual se apresentam, sucintamente, as seguintes características [Silva, 2006]:

- Não obriga a considerar graus de liberdade adicionais;
- Os pesos da função de ponderação devem ser calculados uma única vez no início do processo de cálculo. É necessário proceder à actualização dos pesos da função de ponderação caso se altere a malha de elementos finitos, situação que se pode revelar computacionalmente dispendiosa para malhas adaptativas, mas contornada nos elementos finitos não convencionais quando se utilizam técnicas de refinamento tipo- p ;
- A matriz de rigidez tangente é, geralmente, não simétrica e a sua construção não é imediata.

Os modelos de dano não local devem respeitar a dissipação de tensões observada no modelo local e têm de coincidir com o modelo local enquanto o material se mantém em regime elástico linear ou se encontra em descarga.

No caso particular do modelo integral não local, a ponderação espacial é conseguida através de um comprimento característico l . Alguns autores consideram que este parâmetro contém informação sobre a microestrutura do material, sendo caracterizado por outros como um “limitador da localização”. No entanto, a correcta formulação de um modelo não local deve-se à introdução do parâmetro l que permite deduzir um *comprimento característico não local* λ_c , o qual pode ser

relacionado com a largura da Zona em Processo de Fractura em cada instante da evolução do dano no material. Num modelo de dano contínuo regularizado, o comprimento λ_c corresponde a uma largura finita independente da discretização que diminui com a evolução do dano de modo a simular o processo de fractura [Bazant, 1992].

Nos modelos do tipo integral não local, a relação constitutiva num determinado ponto depende de valores de grandezas em pontos vizinhos [Bazant, 1992]. Assim, é introduzida uma variável não local, \bar{A} , na relação constitutiva secante ou no potencial de dissipação f . A variável não local \bar{A} é obtida através de uma ponderação do tipo [Mazars et al, 1991; Bazant, 1992; Pijaudier-Cabot et al., 1994]:

$$\bar{A}(x) = \int_V W(x, s) A(s) ds, \quad (3.47)$$

onde $W(x, s)$ é a função de ponderação e V o domínio da estrutura.

Neste trabalho considera-se a função de Gauss normalizada definida como:

$$W(x, s) = \frac{1}{W_0(x)} \exp\left(-\frac{\|x - s\|^2}{2l^2}\right), \quad (3.48)$$

$$\text{com} \quad W_0(x) = \int_V \exp\left(-\frac{\|x - s\|^2}{2l^2}\right) ds. \quad (3.49)$$

Para o modelo não local ser capaz de reproduzir um campo uniforme, é necessário efectuar uma normalização adequada através da consideração da função $W_0(x)$. O comprimento característico l é constante e controla a “abertura” da função de ponderação não local.

A escolha das variáveis não locais que substituem algumas das variáveis locais não é imediata. Se a ponderação não local for realizada de modo errado podem surgir problemas e o modelo pode não representar a realidade física do problema.

No modelo de [Mazars, 1984], a regularização através do método do integral não local é implementada com base no valor da deformação equivalente $\bar{\varepsilon}$, enquanto no modelo de dano com uma variável de dano apresentado por [Comi e Perego, 2001] a regularização é implementada com base no valor da taxa de energia de deformação \bar{Y} .

No caso de um problema unidimensional de uma barra de comprimento infinito com um estado inicial homogéneo e considerando o modelo de dano local descrito na Secção (3.4.1) associado a um modelo integral com a variável não local \bar{Y} , obtém-se a seguinte relação entre o comprimento característico não local λ_c e a variável de dano d [Comi et al., 2002]:

$$\lambda_c = \sqrt{2} \pi l \left[-\ln\left(\frac{n}{2 \ln\left(\frac{c}{1-d}\right)}\right) \right]^{-0.5}. \quad (3.50)$$

O comprimento característico não local λ_c é uma função decrescente do dano e quando $d \rightarrow 1$, a variável λ_c é finita não nula.

3.7 Transição de um modelo contínuo não local para um modelo discreto

A descrição do processo de danificação em estruturas construídas com materiais *quasi-frágeis* como o betão deve englobar os vários tipos de comportamento do material verificados desde o início da microfissuração até à formação de uma microfenda. Assim sendo, o modelo numérico deve considerar uma primeira fase inelástica de microfissuração difusa, seguida por uma fase caracterizada pela localização de deformações e, por último, uma terceira fase de iniciação e propagação da fenda.

Nesse contexto, um modelo contínuo local pode efectivamente reproduzir a fendilhação difusa no material até uma fase avançada de degradação do material, a partir da qual deve ser adoptado um modelo discreto de modo a reproduzir a descontinuidade no campo de deslocamentos. [Comi et al., 2002] sugerem a seguinte metodologia caracterizada por três etapas distintas:

- i) Análise com um modelo de dano contínuo não local até ao instante em que o comprimento característico não local atinge um determinado valor crítico (Equação (3.50));
- ii) Transição para um modelo discreto com a introdução de uma descontinuidade no campo de deslocamentos. Nesta fase, é necessário estimar a largura da faixa de localização e a partir da qual é possível obter uma estimativa do valor de dano crítico. Assim sendo, quando o valor de dano excede o seu valor crítico é introduzido um modelo discreto de fenda coesiva na direcção da faixa;
- iii) Simulação da propagação da(s) fenda(s) discreta(s).

No trabalho de [Comi et al., 2002] é apresentada uma definição para o valor de dano crítico, d_{cr} , a qual tem implícita as mesmas hipóteses referentes à definição (3.50). Para além disso, o valor de d_{cr} depende da malha de elementos finitos adoptada e do comprimento característico do material l .

Neste trabalho, considera-se um modelo de dano contínuo não local em todo o processo de análise, não se adoptando a metodologia descrita anteriormente por várias razões. Por um lado, seria necessário introduzir um modelo de fenda discreta a partir de um determinado estado de degradação em que se verifica a descontinuidade do campo de deslocamentos, o que pressupõe o conhecimento da direcção da fenda. Por outro lado, essa introdução ocorre apenas quando o dano no material atinge um valor crítico. Contudo, a determinação desse valor sugerida, por exemplo, em [Comi et al., 2002] tem subjacente as hipóteses referidas anteriormente, as quais não se encontram no domínio de aplicação deste trabalho.

CAPÍTULO 4

Elementos Finitos Híbridos - Mistos

4.1 Considerações Iniciais

O Método dos Elementos Finitos (MEF), em particular a formulação clássica baseada na aproximação dos deslocamentos, tem sido a ferramenta numérica dominante na análise de estruturas comuns na área de Engenharia Civil. A grande utilização destes modelos deve-se, essencialmente, à sua simplicidade conceptual na formulação do problema, a qual possibilita a identificação do significado físico das grandezas intervenientes, e à sua robusta fundamentação teórica que permite estabelecer as condições para a existência e a convergência das soluções numéricas aproximadas.

A aplicação de modelos de elementos finitos, na sua formulação tradicional, permite a obtenção de soluções compatíveis, sendo verificadas *a priori* todas as condições de admissibilidade cinemática. O campo de tensões/esforços é obtido a partir do campo de deslocamentos através da relação de compatibilidade e da relação constitutiva, não se verificando (localmente) as condições de equilíbrio. Este facto faz com que, de acordo com o Teorema Estático da Análise Plástica de Estruturas, as soluções obtidas sejam contra a segurança do ponto de vista do dimensionamento de estruturas [Almeida, 1991; Silva, 2006]. Verifica-se ainda que o erro associado à determinação dos campos estáticos é superior ao erro associado aos campos cinemáticos. A obtenção de soluções com um grau de precisão conveniente requer a geração de malhas com um número significativo de elementos (refinamento tipo-*h*). No entanto, a adopção de um refinamento baseado no aumento do grau das funções de aproximação (refinamento tipo-*p*) é dificultada neste tipo de formulação.

Com vista a contornar algumas destas limitações, em meados dos anos 60 surgem os modelos finitos híbridos e mistos com os trabalhos pioneiros de [Pian, 1964]. Mais recentemente, [Freitas et al., 1999a] desenvolveram formulações híbridas e mistas de elementos finitos. Nos modelos híbridos definem-se aproximações independentes no domínio e na fronteira do elemento, enquanto nos modelos mistos se define mais do que uma aproximação independente no domínio de cada elemento [Brezzi e Fortin, 1991; Zienkiewicz e Taylor, 1991a]. Ao longo deste trabalho atribui-se a este tipo de formulações a designação de não convencionais.

Apesar de este tipo de formulações apresentar algumas vantagens quando comparado com o modelo clássico de elementos finitos, ainda não conseguiu atingir o mesmo nível de divulgação e de utilização generalizadas.

4.2 Formulações Não Convencionais de Elementos Finitos

Na década de 90 surgem as chamadas formulações não convencionais de elementos finitos [Freitas, 1989] com o intuito de contornar algumas das restrições associadas à utilização das formulações

clássicas de elementos finitos, referidas na Secção (4.1). As formulações não convencionais apresentam as seguintes características [Freitas, 1989, Pereira, 1993a; Castro, 1996]:

- A formulação é desenvolvida com base nos princípios fundamentais da Mecânica (Secção (2.2));
- As funções de aproximação podem ser hierárquicas e a sua escolha não está condicionada pelo conceito de interpolação nodal. Os nós apenas são utilizados para a definição da geometria do problema;
- As variáveis generalizadas do modelo discreto são definidas de modo a serem energeticamente consistentes, sendo obtidas igualando o trabalho realizado por grandezas duais no modelo discreto e contínuo;
- Os teoremas de Programação Matemática permitem recuperar os teoremas energéticos, possibilitando o estabelecimento de condições para a existência e unicidade das soluções.

Com base nestes pressupostos, [Freitas et al., 1999a] desenvolveram três tipos de formulações: híbrida-Trefftz, híbrida e híbrida-mista, que se distinguem pelas condições impostas *a priori* às funções de aproximação no domínio. Nos modelos híbridos-Trefftz, as funções de aproximação no domínio verificam localmente e em simultâneo as condições de equilíbrio, compatibilidade e as relações constitutivas [Freitas e Wang, 1998; Freitas et al., 1999b; Cismasiu, 2000; Silva, 2006]. Nos modelos híbridos, as funções de aproximação no domínio verificam o equilíbrio ou a compatibilidade [Almeida, 1991; Pereira, 1993b; Silva, 2006]. Nos modelos híbridos-mistos não são impostas quaisquer restrições e todas as equações fundamentais no domínio são impostas ponderadamente [Pereira, 1993a; Castro, 1996; da Silva, 2002; Mendes, 2002; Silva 2006]. Neste trabalho recorre-se à formulação híbrida-mista no desenvolvimento de modelos para a análise fisicamente não linear de estruturas de betão.

Para as formulações descritas anteriormente podem ser desenvolvidos modelos de tensão e de deslocamento. A distinção entre estes modelos reside na forma como são tratadas as condições de equilíbrio e de compatibilidade no domínio e ainda da forma como é assegurada a ligação entre elementos adjacentes. Nos modelos de tensão define-se uma aproximação independente para o campo de deslocamentos ao longo da fronteira estática, a qual engloba nestes casos as fronteiras entre elementos. A equação que resulta da imposição ponderada das condições de compatibilidade no domínio é integrada por partes e as condições de equilíbrio na fronteira estática são impostas de forma ponderada. Nos modelos de deslocamento define-se uma aproximação para o campo de tensões aplicadas ao longo da fronteira cinemática, que neste caso engloba as fronteiras entre elementos. A equação que resulta da imposição ponderada das condições de equilíbrio no domínio é integrada por partes e as condições de fronteira cinemática são impostas ponderadamente.

A integração por partes de uma equação fundamental no domínio conduz a uma imposição mais fraca dessa equação. De modo inverso ao que ocorre nos modelos de deslocamento, nos modelos de tensão a imposição da compatibilidade é mais fraca que a do equilíbrio no domínio, pelo que é possível obter soluções *quasi*-equilibradas localmente [Almeida, 1991; Silva, 2006].

As principais vantagens decorrentes da utilização de formulações não convencionais de elementos finitos são:

- Grande flexibilidade na escolha das funções de aproximação, sendo suficiente a utilização de um sistema completo de funções para a modelação do campo de tensões e/ou deslocamentos [Silva e Castro, 2003]. Como a escolha das funções de aproximação não é condicionada nem pela necessidade de se verificar localmente nenhuma das condições fundamentais do problema nem pela adopção do conceito de interpolação nodal, torna-se possível utilizar uma variada gama de funções de aproximação cujas propriedades e características hierárquicas potenciam o desenvolvimento de modelos robustos e eficazes;
- É possível trabalhar com macroelementos e adoptar preferencialmente o refinamento tipo- p em detrimento do refinamento tipo- h . Deste modo, a estrutura de dados resulta bem simplificada e os processos de remalhagem tornam-se desnecessários durante a análise incremental;
- Possibilidade de obter soluções analíticas para as integrações envolvidas na definição dos coeficientes de todos os operadores estruturais (para análises em regime elástico linear), com ganhos de precisão e de eficácia numérica;
- Definição independente das aproximações dos diferentes campos, o que possibilita a adopção de aproximações com diferentes graus;
- Este tipo de formulações é pouco sensível à distorção da malha de elementos finitos [Castro, 1996; Cismasiu, 2000];
- Obtenção de soluções *quasi*-equilibradas. A escolha apropriada dos graus das funções de aproximação pode conduzir à obtenção de soluções localmente equilibradas no domínio e/ou fronteira e, conseqüentemente, do lado da segurança do ponto de vista do dimensionamento de estruturas [Almeida, 1991; Silva, 2006].

No entanto, algumas limitações próprias dos modelos não convencionais justificam o relativo insucesso destes modelos e a sua aplicabilidade quase exclusiva em análises académicas e de investigação. Destacam-se as seguintes desvantagens:

- As formulações são conceptualmente mais complicadas, nomeadamente no que respeita ao tipo de discretização e aproximação usadas;
- A remoção do conceito de interpolação nodal conduz à perda do significado físico imediato de todas as grandezas discretas, as quais passam a ser simplesmente pesos das funções de aproximação [Freitas et al, 1999a];
- A possibilidade de se atingir um número muito elevado de graus de liberdade, nomeadamente na formulação híbrida-mista, requer a utilização de algoritmos especialmente desenvolvidos para o armazenamento e manipulação de sistemas de equações esparsos. Como os sistemas são esparsos [Freitas et al., 1999a], é possível economizar a memória dispendida e armazenar apenas os coeficientes não nulos [Castro, 1996];

- Uma escolha menos correcta dos graus das várias aproximações pode levar ao aparecimento de dependências no sistema de equações (designadas habitualmente por modos espúrios) que é necessário detectar e tratar de forma conveniente [Freitas et al, 1999a];
- O modelo misto não assegura nem o equilíbrio nem a compatibilidade, obrigando a uma utilização “consciente” do modelo de elementos finitos;
- A matriz do sistema governativo não é positiva definida, independentemente do comportamento do material. Contudo, é possível resolver o sistema de equações e só existem singularidades caso existam dependências.

De forma geral, o sistema governativo de cada elemento é deduzido através da combinação das formas discretas das condições de equilíbrio, compatibilidade e relação constitutiva e o modelo global é obtido a partir dos sistemas governativos elementares sem somar as contribuições elementares [Castro, 1996; Silva, 2006]. A ligação entre elementos é conseguida através da partilha da aproximação na fronteira interelementar.

4.3 Formulações Não Convencionais Adoptadas

Neste trabalho adopta-se uma formulação híbrida-mista de tensão (HMT) que, como referido anteriormente, privilegia a qualidade do campo estático. Nesta formulação são aproximados os campos de tensões e de deslocamentos no domínio de cada elemento e o campo de deslocamentos na fronteira estática. O especial interesse nos modelos HMT deve-se à possibilidade de se conseguirem obter campos estáticos *quasi*-equilibrados, à grande flexibilidade existente na escolha das funções de aproximação e ainda por permitirem o desenvolvimento de modelos estáveis, robustos e com uma taxa de convergência que permite considerá-los como competitivos quando comparados com os modelos de elementos finitos tradicionais.

Uma escolha criteriosa dos graus máximos de aproximação dos diferentes campos permite garantir localmente o equilíbrio [Castro 1996]. O equilíbrio ponderado no domínio de cada elemento pode ser imposto de forma mais forte aumentando o grau máximo da aproximação do campo de deslocamentos no domínio, U_v . De igual modo, o equilíbrio na fronteira interelementar pode ser reforçado com o aumento do grau máximo da aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática, U_γ . Assim sendo, é possível impor de forma forte o equilíbrio na estrutura e, no limite, verificar localmente o equilíbrio. Contudo, o grau máximo das aproximações dos deslocamentos deve ser inferior ao grau máximo da aproximação do campo de tensões S_v , para minimizar o aparecimento de modos espúrios [Silva, 2006]. Como o grau de aproximação do campo de tensões é superior ao das restantes aproximações e a equação de compatibilidade ponderada no domínio é integrada por partes, na formulação HMT o campo de tensões é aproximado com maior qualidade.

Neste trabalho pretende-se estudar a evolução da variável de dano a partir dos três campos aproximados.

Numa primeira escolha, esse estudo seria baseado no campo aproximado com maior qualidade, o campo de tensões. Contudo, em [Silva, 2006] verifica-se que a evolução do dano no material não é identificada apenas com o conhecimento da evolução do campo de tensões porque quando o material se encontra em amolecimento não é possível identificar se este está em carga ou em descarga. Um modo alternativo de analisar a evolução da variável de dano consiste em passar a trabalhar o campo de deslocamentos aproximado [Silva, 2006]. No entanto, a imposição de forma fraca das condições de compatibilidade conduz a uma insuficiente precisão do campo de deslocamentos quando a evolução da deformação se encontra localizada numa zona da estrutura. Uma solução possível seria o refinamento local da aproximação, estratégia que não explora as potencialidades da formulação HMT. Uma outra hipótese testada por [Silva e Castro, 2004] corresponde a incorporar uma aproximação independente no domínio para uma grandeza directamente relacionada com o incremento de dano, a qual não permitiu obter resultados satisfatórios devido à dependência entre a distribuição de dano e a base de funções adoptadas na aproximação dos incrementos de dano.

Uma alternativa competitiva para a modelação do comportamento de fendilhação do betão com modelos de dano consiste em substituir a aproximação do campo de tensões σ por uma aproximação do campo de tensões efectivas $\tilde{\sigma}$ (Equação (3.3)). Um modelo de dano baseado na hipótese de equivalência de deformações conduz à dependência do campo de tensões num ponto do valor da variável interna de dano e do valor do campo de deformações nesse ponto (Equação (3.7)), enquanto o campo de tensões efectivas apenas depende do campo de deformações (Equação (3.6)). Portanto, uma formulação desenvolvida a partir de tensões efectivas permite definir univocamente a lei de evolução de dano.

Nesta nova formulação, apenas o campo de tensões efectivas é aproximado com polinómios, verificando-se pela Equação (3.4) que o campo de tensões não possui um andamento polinomial. Apesar de o equilíbrio no domínio na presença de dano ser imposto de forma menos forte comparativamente à formulação inicial, a qualidade do campo estático nas duas formulações é análoga [Silva, 2006].

Na exposição que se segue, define-se o domínio de cada elemento por V limitado pela fronteira Γ , a qual se subdivide na fronteira estática Γ_σ e na fronteira cinemática Γ_u , de forma semelhante ao ilustrado na Figura (2.2).

4.4 Modelos Híbridos Mistos de Tensão (Tensões efectivas)

4.4.1 Definição das Aproximações

Nos modelos híbridos mistos de tensão aproximam-se simultânea e independentemente os campos de tensões e de deslocamentos no domínio de cada elemento finito. Tratando-se de um modelo de tensão, a fronteira interelementar é tratada como uma fronteira estática, Γ_σ , onde a condição de equilíbrio é imposta ponderadamente, assim como nas fronteiras não restringidas cinematicamente. A

necessidade de aproximar os campos de deslocamentos no domínio e na fronteira resulta na imposição ponderada do equilíbrio no domínio e na fronteira. Numa formulação baseada na aproximação do campo de tensões efectivas, as aproximações podem ser expressas através das igualdades:

$$\tilde{\sigma} = S_v \tilde{X} \quad \text{em } V, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = U_v \mathbf{q}_v \quad \text{em } V, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = U_\gamma \mathbf{q}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (4.3)$$

O vector $\tilde{\sigma}$ reúne as componentes independentes do tensor das tensões efectivas e o vector \mathbf{u} as componentes do campo de deslocamentos a aproximar. As matrizes S_v , U_v e U_γ agrupam, respectivamente, as funções de aproximação das tensões efectivas no domínio, dos deslocamentos no domínio e dos deslocamentos na fronteira. Os vectores \tilde{X} , \mathbf{q}_v e \mathbf{q}_γ listam os pesos das funções de aproximação associadas e correspondem aos vectores que reúnem as tensões efectivas generalizadas, os deslocamentos no domínio generalizados e os deslocamentos na fronteira generalizados, respectivamente.

Impondo, à partida, igual energia de dissipação no modelo contínuo e no modelo discreto, é possível escrever:

$$\int_V \tilde{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \tilde{X}^T \mathbf{e}; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{e} = \int_V S_v^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dV; \quad (4.5)$$

em que o vector \mathbf{e} lista as componentes das deformações generalizadas.

Por sua vez, a igualdade entre o trabalho realizado pelo modelo contínuo e o trabalho realizado pelo modelo discreto permite definir as forças generalizadas no domínio, \mathbf{Q}_v , e as forças generalizadas na fronteira estática, \mathbf{Q}_γ , através das seguintes igualdades:

$$\mathbf{Q}_v = \int_V U_v^T \mathbf{b} \, dV, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} U_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma \, d\Gamma_\sigma. \quad (4.7)$$

4.4.2 Sistema Governativo de um Elemento Finito HMT

O sistema governativo num elemento com dano é obtido impondo ponderadamente, na forma de resíduos pesados, as condições fundamentais do problema. Assim, a cada instante do processo é necessário reescrever as relações fundamentais em função das grandezas conhecidas. O campo de tensões em cada ponto, $\boldsymbol{\sigma}$, é determinado em função do campo de tensões efectivas aproximado, $\tilde{\sigma}$, e do dano:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega}) \tilde{\sigma}, \quad (4.8)$$

em que Ω é a representação matricial do tensor de dano de quarta ordem e \mathbf{I} representa a matriz identidade.

Apesar de se verificar a validade da expressão $\sigma = (1 - d) \tilde{\sigma}$ para os casos comuns de modelos de dano isotrópico, o mesmo não acontece em alguns modelos. Pretendendo-se uma formulação geral, a relação tensão-tensão efectiva será trabalhada no formato apresentado na Equação (4.8).

i) Imposição ponderada do equilíbrio no domínio

Da imposição ponderada do equilíbrio no domínio do elemento finito obtém-se:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}\sigma + \mathbf{b}) dV = 0. \quad (4.9)$$

Atendendo que o campo de tensões σ é determinado de acordo com a expressão (4.8), resulta que:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T \{ \mathbf{D}[(\mathbf{I} - \Omega)\tilde{\sigma}] + \mathbf{b} \} dV = 0. \quad (4.10)$$

Substituindo a aproximação do campo de tensões efectivas (4.1) na equação anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{U}_v^T \{ \mathbf{D}[(\mathbf{I} - \Omega)\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{X}}] + \mathbf{b} \} dV &= 0 \\ \int_V \mathbf{U}_v^T \{ \mathbf{D}[(\mathbf{I} - \Omega)\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{X}}] \} dV + \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV &= 0 \\ \int_V \mathbf{U}_v^T \{ \mathbf{D}[(\mathbf{I} - \Omega)\mathbf{S}_v] \} dV \tilde{\mathbf{X}} &= - \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV \\ \int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}\mathbf{S}_v) dV \tilde{\mathbf{X}} - \int_V \mathbf{U}_v^T [\mathbf{D}(\Omega\mathbf{S}_v)] dV \tilde{\mathbf{X}} &= - \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os operadores \mathbf{A}_v e \mathbf{M}_v são definidos como:

$$\mathbf{A}_v = \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_v dV, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{M}_v = \int_V \mathbf{U}_v^T [\mathbf{D}(\Omega\mathbf{S}_v)] dV. \quad (4.13)$$

Atendendo às definições (4.6), (4.12) e (4.13), a Equação (4.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(\mathbf{A}_v^T - \mathbf{M}_v)\tilde{\mathbf{X}} = -\mathbf{Q}_v. \quad (4.14)$$

Nos casos comuns de modelos de dano isotrópico em que a relação $\sigma = (1 - d) \tilde{\sigma}$ é válida, a integração por partes da Equação (4.13) permite definir o operador \mathbf{M}_v como:

$$\mathbf{M}_v = - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T d \mathbf{S}_v dV + \int_{\Gamma} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T d \mathbf{S}_v d\Gamma. \quad (4.15)$$

ii) Imposição ponderada do equilíbrio na fronteira estática

A imposição ponderada do equilíbrio na fronteira estática do elemento finito conduz a:

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma = 0. \quad (4.16)$$

Atendendo que o campo de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é determinado de acordo com a expressão (4.8), resulta que:

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \{ \mathbf{N}[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})\tilde{\boldsymbol{\sigma}}] - \mathbf{t}_\gamma \} d\Gamma_\sigma = 0. \quad (4.17)$$

Substituindo a aproximação do campo de tensões efectivas (Equação (4.1)) na expressão anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \{ \mathbf{N}[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{X}}] - \mathbf{t}_\gamma \} d\Gamma_\sigma = 0 \\ & \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \{ \mathbf{N}[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{X}}] \} d\Gamma_\sigma - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma = 0 \\ & \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \{ \mathbf{N}[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Omega})\mathbf{S}_v] \} \tilde{\mathbf{X}} d\Gamma_\sigma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma \\ & \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}\mathbf{S}_v) d\Gamma_\sigma \tilde{\mathbf{X}} - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T [\mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}_v)] d\Gamma_\sigma \tilde{\mathbf{X}} = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Os operadores \mathbf{A}_γ e \mathbf{M}_γ são definidos como:

$$\mathbf{A}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}\mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_\gamma d\Gamma_\sigma, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{M}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T [\mathbf{N}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}_v)] d\Gamma_\sigma. \quad (4.20)$$

Considerando as definições (4.7), (4.19) e (4.20), a Equação (4.18) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(-\mathbf{A}_\gamma^T + \mathbf{M}_\gamma) \tilde{\mathbf{X}} = -\mathbf{Q}_\gamma. \quad (4.21)$$

Nos casos comuns de modelos de dano isotrópico em que a relação $\boldsymbol{\sigma} = (1 - d)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ é válida, é possível definir o operador \mathbf{M}_γ como:

$$\mathbf{M}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N} d\mathbf{S}_v) d\Gamma_\sigma. \quad (4.22)$$

iii) Imposição ponderada da relação constitutiva

Da imposição ponderada da relação constitutiva no domínio do elemento finito obtém-se:

$$\int_V \mathbf{S}_v^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) dV = 0. \quad (4.23)$$

Substituindo a aproximação do campo de tensões efectivas (Equação (4.1)) na expressão anterior, obtém-se:

$$\int_V \mathbf{S}_v^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}\mathbf{S}_v\tilde{\mathbf{X}}) dV = 0$$

$$\int_V \mathbf{S}_v^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{S}_v^T \mathbf{F} \mathbf{S}_v \tilde{\mathbf{X}} dV = 0$$

$$\int_V \mathbf{S}_v^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{S}_v^T \mathbf{F} \mathbf{S}_v dV \tilde{\mathbf{X}}. \quad (4.24)$$

O operador de flexibilidade generalizado \mathbb{F} é definido como:

$$\mathbb{F} = \int_V \mathbf{S}_v^T \mathbf{F} \mathbf{S}_v dV. \quad (4.25)$$

Atendendo às definições (4.5) e (4.25), a Equação (4.24) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\mathbf{e} = \mathbb{F} \tilde{\mathbf{X}}. \quad (4.26)$$

iv) Imposição ponderada da compatibilidade

Da imposição ponderada da compatibilidade no elemento finito obtém-se:

$$\int_V \mathbf{S}_v^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0 \quad (4.27)$$

$$\int_V \mathbf{S}_v^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{S}_v^T \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV. \quad (4.28)$$

Atendendo à definição (4.5), o desenvolvimento de (4.28) leva a:

$$\mathbf{e} = \int_V \mathbf{S}_v^T \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV. \quad (4.29)$$

Integrando por partes o segundo termo da Equação (4.29), para incluir a condição de Dirichlet, resulta:

$$\mathbf{e} = - \int_V (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^T \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^T \mathbf{u} d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (4.30)$$

Substituindo a aproximação do campo de deslocamentos no domínio (4.2) e na fronteira estática (4.3) na Equação (4.30) obtém-se:

$$\mathbf{e} = - \int_V (\mathbf{D} \mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_v dV \mathbf{q}_v + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_\gamma d\Gamma_\sigma \mathbf{q}_\gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (4.31)$$

O vector das deformações generalizadas associadas aos deslocamentos impostos na fronteira cinemática, $\bar{\mathbf{e}}$, pode ser definido como:

$$\bar{\mathbf{e}} = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N} \mathbf{S}_v)^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (4.32)$$

A Equação (4.31) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\mathbf{e} = -\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}. \quad (4.33)$$

Conjugando a condição de compatibilidade no modelo discreto (4.33) com a relação constitutiva expressa na Equação (4.26) obtém-se:

$$\mathbb{F} \tilde{\mathbf{X}} = -\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}. \quad (4.34)$$

v) **Sistema governativo**

A partir das equações (4.14), (4.21) e (4.34), o sistema governativo do elemento finito híbrido-misto de tensão pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^T - \mathbf{M}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^T + \mathbf{M}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ -\mathbf{Q}_v \\ -\mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Note-se que na presença de dano a matriz do sistema governativo não é simétrica.

No entanto, na ausência de dano verifica-se que $\mathbf{M}_v = \mathbf{0}$ e $\mathbf{M}_\gamma = \mathbf{0}$ e a matriz do sistema governativo passa a ser simétrica devido à preservação da dualidade estática-cinemática e da reciprocidade nas condições de elasticidade no modelo discreto. Neste caso, o sistema governativo do elemento finito híbrido-misto pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ -\mathbf{Q}_v \\ -\mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Numa estrutura constituída por vários elementos, a ligação entre elementos adjacentes é efectuada através da partilha da aproximação do campo de deslocamentos na fronteira interelementar. Assim, à excepção dos operadores \mathbf{A}_γ e \mathbf{M}_γ , existe independência entre todas as matrizes estruturais, quer ao nível de cada elemento, quer ao nível do sistema governativo global.

Neste contexto, exemplifica-se a construção do sistema governativo global de uma estrutura tridimensional discretizada com dois elementos finitos, conforme ilustrado na Figura (4.1).

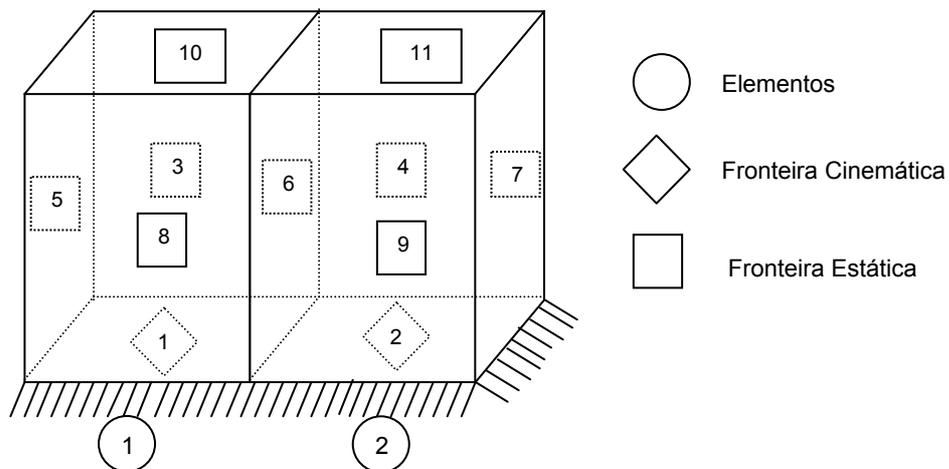


Figura 4.1 – Estrutura tridimensional discretizada com dois elementos (HMT).

$$\begin{bmatrix}
\mathbb{F}^{(1)} & \cdot & A_v^{(1)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,3)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,5)} & -A_\gamma^{(1,6)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,8)} & \cdot & -A_\gamma^{(1,10)} & \cdot \\
\cdot & \mathbb{F}^{(2)} & \cdot & A_v^{(2)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,4)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,6)} & -A_\gamma^{(2,7)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,9)} & \cdot & -A_\gamma^{(2,11)} \\
\hline
(A_v^T - M_v)^{(1)} & \cdot \\
\cdot & (A_v^T - M_v)^{(2)} & \cdot \\
\hline
(-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(1,3)} & \cdot \\
\cdot & (-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(2,4)} & \cdot \\
(-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(1,5)} & \cdot \\
(-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(1,6)} & (-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(2,6)} & \cdot \\
\cdot & (-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(2,7)} & \cdot \\
(-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(1,8)} & \cdot \\
\cdot & (-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(2,9)} & \cdot \\
(-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(1,10)} & \cdot \\
\cdot & (-A_\gamma^T + M_\gamma)^{(2,11)} & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{X}^{(1)} \\
\bar{X}^{(2)} \\
q_v^{(1)} \\
q_v^{(2)} \\
q_\gamma^{(3)} \\
q_\gamma^{(4)} \\
q_\gamma^{(5)} \\
q_\gamma^{(6)} \\
q_\gamma^{(7)} \\
q_\gamma^{(8)} \\
q_\gamma^{(9)} \\
q_\gamma^{(10)} \\
q_\gamma^{(11)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\bar{e}^{(1)} \\
\bar{e}^{(2)} \\
-Q_v^{(1)} \\
-Q_v^{(2)} \\
-Q_\gamma^{(3)} \\
-Q_\gamma^{(4)} \\
-Q_\gamma^{(5)} \\
-Q_\gamma^{(6)} \\
-Q_\gamma^{(7)} \\
-Q_\gamma^{(8)} \\
-Q_\gamma^{(9)} \\
-Q_\gamma^{(10)} \\
-Q_\gamma^{(11)}
\end{bmatrix}$$

(4.37)

A Equação (4.37) representa o sistema governativo global para a estrutura apresentada na Figura (4.1), onde $\mathbb{F}^{(i)}$ corresponde à matriz de flexibilidade generalizada do elemento i , $A_v^{(i)}$ e $(A_v^T - M_v)^{(i)}$ representam os operadores associados ao elemento i e $A_\gamma^{(i,j)}$ e $(-A_\gamma^T - M_\gamma)^{(i,j)}$ os operadores associados ao elemento i e à fronteira estática j .

Numa formulação baseada na aproximação do campo de tensões efectivas, o mau condicionamento apenas é relevante quando existe um elemento finito com a variável de dano $d \approx 1$ em todo o domínio do elemento [Silva, 2006].

CAPÍTULO 5

Implementação do Modelo

5.1 Considerações Iniciais

A implementação dos modelos finitos não convencionais, em particular do modelo híbrido misto de tensão, pode ser estruturada em duas etapas e na seguinte ordem:

- i) Escolha e análise das funções de aproximação para cada campo;
- ii) Cálculo dos operadores estruturais intervenientes no sistema governativo e análise da sua evolução ao longo da análise fisicamente não linear.

A utilização de modelos híbridos-mistos permite uma grande liberdade na escolha das funções de aproximação. Como nestes modelos não é necessário verificar *a priori* nenhuma das condições fundamentais do problema, as aproximações dos campos estáticos e cinemáticos podem ser efectuadas com recurso a qualquer sistema completo de funções. Assim sendo, é possível implementar e testar uma variada gama de funções de modo a explorar as suas propriedades na obtenção de modelos numéricos competitivos. Em trabalhos anteriores foram desenvolvidos modelos baseados na utilização de funções trigonométricas [Freitas, 1989; Pereira, 1993a, Leal, 2007], polinómios ortonormais de Legendre [Pereira, 1993a; da Silva, 2002; Silva, 2006; Leal 2007], séries de Walsh [Castro, 1996; Freitas e Castro 1992; Leal, 2007] e sistemas de wavelets [Castro 1996; Castro e Barbosa, 2006; Leal, 2007]. Ao longo deste trabalho, as aproximações são efectuadas utilizando séries completas de polinómios ortonormais de Legendre.

Nas formulações híbridas-mistas existe a possibilidade de enriquecer independentemente cada um dos campos aproximados. Nos casos de estudo apresentados neste trabalho procede-se a uma escolha empírica do espaço de funções e graus de aproximação com base em experiências de trabalhos anteriores que conduzem a soluções estáveis [da Silva, 2002; Mendes, 2002; Silva, 2006].

O cálculo dos operadores estruturais pressupõe a definição da geometria da estrutura. Neste trabalho, a geometria da estrutura é definida recorrendo a elementos mestre definidos no espaço (ξ, η, ζ) em que $\xi, \eta, \zeta \in [-1.0, 1.0]$, de forma análoga ao efectuado nos elementos isoparamétricos da tradicional formulação de deslocamento [Zienkiewicz e Taylor, 1991a].

Com o desenvolvimento do dano, o sistema governativo deixa de ser linear e a sua resolução conduz à adopção de um processo incremental e iterativo. Este procedimento traduz-se na aplicação da acção exterior na estrutura em vários incrementos/passos de carga e em cada incremento de carga utiliza-se um método iterativo para resolver as equações não lineares do problema. O método iterativo utilizado corresponde a uma versão modificada do método de Newton-Raphson [Zienkiewicz e Taylor, 1991b] no qual se despreza uma parcela da matriz tangente do sistema governativo, uma vez que a sua determinação exacta implicaria um elevado esforço computacional [Silva, 2006]. Assim

sendo, opta-se por utilizar a matriz secante na determinação dos incrementos das variáveis generalizadas em cada uma das etapas do processo iterativo.

Este capítulo inicia-se com a caracterização das funções de aproximação utilizadas e com a definição das aproximações para cada um dos campos estáticos e cinemáticos. Apresentam-se, de seguida, as técnicas utilizadas no cálculo dos operadores intervenientes no sistema governativo (sistema de equações (4.35)) e discute-se a mudança de referencial necessária à definição de elementos com geometria genérica. Por último, apresenta-se o método incremental e iterativo adoptado na resolução do sistema governativo global não linear.

5.2 Funções de Aproximação

Os polinómios de Legendre $P_n(x)$, em que n representa o grau do polinómio, correspondem à solução da equação diferencial:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n + 1)P_n(x) = 0. \quad (5.1)$$

Os polinómios $P_n(x)$ podem ser gerados com recurso à fórmula de Rodriguez [Spiegel e Abellanas, 1990]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (5.2)$$

Existem diversas fórmulas de recorrência que podem ser utilizadas para a obtenção dos polinómios de Legendre [Pereira, 1993a]. Neste trabalho, opta-se pela fórmula recursiva de Bonnet:

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad (5.3)$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$.

De forma a verificar a condição de ortonormalidade expressa pela Equação (5.4),

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = 1, \quad (5.4)$$

a fórmula recursiva de Bonnet é escalada por λ_n (Equação (5.5)),

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{2n + 1}{2}}, \quad (5.5)$$

obtendo-se o formato alternativo apresentado na Equação (5.6).

$$\frac{n + 1}{\lambda_{n+1}} P_{n+1}(x) = \frac{2n + 1}{\lambda_n} x P_n(x) - \frac{n}{\lambda_{n-1}} P_{n-1}(x), \quad (5.6)$$

com $P_0(x) = \lambda_0$ e $P_1(x) = \lambda_1 x$.

A utilização dos polinómios de Legendre possibilita o cálculo analítico dos operadores lineares do sistema governativo, o que permite otimizar os tempos de processamento e garantir uma elevada precisão nos cálculos [Pereira e Freitas, 2000]. A propriedade de ortonormalidade destes polinómios conduz a sistemas governativos de elevada esparsidade, permitindo minimizar o número de

coeficientes não nulos existentes no sistema governativo. As expressões analíticas necessárias para o cálculo dos operadores estruturais encontram-se listadas no Anexo A.

5.3 Definição das Aproximações

A generalização dos polinómios de Legendre para a dimensão espacial das fronteiras (caso bidimensional) e do domínio dos elementos (caso tridimensional) resulta do produto cartesiano dos polinómios de Legendre nas diferentes direcções. As funções de aproximação são definidas num sistema de eixos coordenados local do elemento definidos no espaço (ξ, η, ζ) .

No caso bidimensional, as funções de aproximação são do tipo $P_i(\xi) \times P_j(\eta)$, em que $\xi, \eta \in [-1.0, 1.0]$ e o número de funções de aproximação para cada componente independente é dado por $(1+n_\xi)(1+n_\eta)$, onde n_ξ e n_η representam o grau máximo da aproximação segundo ξ e η , respectivamente. No caso tridimensional, as funções são do tipo $P_i(\xi) \times P_j(\eta) \times P_k(\zeta)$, em que $\xi, \eta, \zeta \in [-1.0, 1.0]$, e o número de funções de aproximação para cada componente é dado por $(1+n_\xi)(1+n_\eta)(1+n_\zeta)$, onde n_ξ, n_η e n_ζ representam o grau máximo da aproximação segundo ξ, η e ζ , respectivamente. O número de linhas das matrizes que armazenam as funções de aproximação coincide com o número de componentes independentes a aproximar.

Nos modelos híbridos-mistos apenas se definem aproximações com séries completas de polinómios. Então, considerando α grandezas a aproximar por funções com um grau máximo n (neste caso considera-se o mesmo grau para definir as aproximações ao longo de cada uma das direcções), a dimensão das matrizes de aproximação num problema tridimensional é dada por:

$$[\alpha, \alpha(1+n)^3]. \quad (5.7)$$

O conjunto completo dos polinómios de grau não superior a n é formado pelos arranjos completos do produto de todos os polinómios de grau menor ou igual a n . O número de arranjos possíveis é igual a $(1+n)^K$, sendo K a dimensão do problema em análise.

Considere-se, por exemplo, um problema tridimensional ($K=3$) e o conjunto completo de polinómios de grau não superior a 1. Neste caso, o conjunto completo dos polinómios é o seguinte:

$$\{ P_0(\xi)P_0(\eta)P_0(\zeta), P_1(\xi)P_0(\eta)P_0(\zeta), P_0(\xi)P_1(\eta)P_0(\zeta), P_0(\xi)P_0(\eta)P_1(\zeta), \\ P_1(\xi)P_1(\eta)P_0(\zeta), P_0(\xi)P_1(\eta)P_1(\zeta), P_1(\xi)P_0(\eta)P_1(\zeta), P_1(\xi)P_1(\eta)P_1(\zeta) \}.$$

Conforme o apresentado na Secção (4.4.1), as matrizes de aproximação associadas ao campo de tensões efectivas, ao campo de deslocamentos no domínio e ao campo de deslocamentos na fronteira a definir são S_v , U_v e U_γ , respectivamente.

As matrizes que reúnem as funções de aproximação encontram-se organizadas da forma como foram implementadas, ou seja, agrupam-se primeiro todas as funções associadas a cada grandeza aproximada. Apesar de existirem outras formas de organização, a adopção deste formato permite

uma distribuição eficiente dos coeficientes não nulos, nomeadamente através da optimização da proximidade à diagonal principal, conduzindo à minimização das operações a efectuar quando se utilizam técnicas apropriadas para a resolução do sistema de equações [Mendes e Castro, 2006].

A aproximação para o campo de tensões no domínio (Equação (4.1)) é definida através de:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} -A - & -0 - & -0 - & -0 - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -A - & -0 - & -0 - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -A - & -0 - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -0 - & -A - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -0 - & -0 - & -A - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -0 - & -0 - & -0 - & -A - \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{xx}} \\ \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{yy}} \\ \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{zz}} \\ \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{xy}} \\ \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{xz}} \\ \tilde{X}_{ijk}^{\sigma_{yz}} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

onde $A = [P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta)]$, com $0 \leq i, j, k \leq n_{s_v}$ e em que n_{s_v} representa o grau máximo de aproximação do campo de tensões no domínio.

A aproximação para o campo de deslocamentos no domínio (Equação (4.2)) é definida através de:

$$[u] = \begin{bmatrix} -P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta) - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta) - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta) - \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{v_{ijk}}^{u_x} \\ q_{v_{ijk}}^{u_y} \\ q_{v_{ijk}}^{u_z} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

com $0 \leq i, j, k \leq n_{U_v}$, em que n_{U_v} representa o grau máximo de aproximação do campo de deslocamentos no domínio.

A aproximação para o campo de deslocamentos ao longo de cada superfície pertencente à fronteira estática (Equação (4.3)) caracterizada por um sistema de eixos local (ζ, τ) é dada por:

$$[u] = \begin{bmatrix} -P_i(\zeta)P_j(\tau) - & -0 - & -0 - \\ -0 - & -P_i(\zeta)P_j(\tau) - & -0 - \\ -0 - & -0 - & -P_i(\zeta)P_j(\tau) - \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{v_{ij}}^{u_x} \\ q_{v_{ij}}^{u_y} \\ q_{v_{ij}}^{u_z} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

com $0 \leq i, j \leq n_{U_v}$, em que n_{U_v} representa o grau máximo de aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática.

Utilizando funções de aproximação com polinómios completos, admitindo um total de β componentes de deslocamentos livres em todas as superfícies que constituem a fronteira estática e considerando que n_{s_v} , n_{U_v} e n_{U_v} representam o grau máximo da respectiva aproximação, as matrizes definidas anteriormente apresentam as seguintes dimensões:

Matriz	n.º linhas	n.º colunas
S_v	6	$6(1 + n_{S_v})^3$
U_v	3	$3(1 + n_{U_v})^3$
U_γ	β	$\beta(1 + n_{U_\gamma})^2$

Tabela 5.1– Dimensões das matrizes de aproximação de um elemento finito tridimensional cúbico com um grau máximo de aproximação n_{S_v} , n_{U_v} e n_{U_γ} para o respectivo campo associado nas direcções ξ , η e ζ .

5.4 Cálculo dos Operadores Estruturais

Apesar de os elementos da estrutura se encontrarem definidos num sistema de eixos cartesianos global (x_1, x_2, x_3) , na implementação numérica do modelo HMT as funções de aproximação são definidas no sistema de eixos do referencial local dos elementos (ξ, η, ζ) . Este procedimento possibilita a obtenção das expressões analíticas para as integrações envolvidas no cálculo dos operadores matriciais tirando partido das propriedades de ortonormalidade dos polinómios de Legendre.

Neste trabalho, as estruturas analisadas são modeladas por elementos paralelepípedicos, cujo jacobiano de transformação de coordenadas é constante, e consideram-se elementos mestre de oito nós. No entanto, o cálculo dos operados estruturais é apresentado de forma genérica nesta Secção.

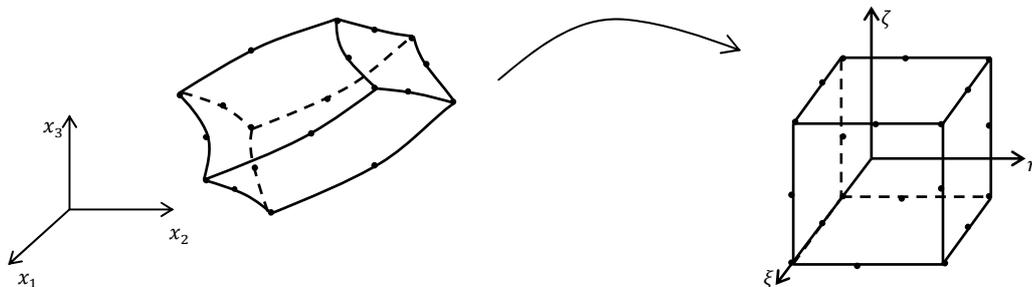


Figura 5.1 – Mudança de coordenadas

Tal como se encontra representado na Figura (5.1), a utilização destes elementos requer o estabelecimento de uma relação entre o referencial local (ξ, η, ζ) e o referencial global (x_1, x_2, x_3) . Esta mudança de coordenadas pode ser expressa na seguinte forma:

$$x_k = \sum_{i=1}^N \varphi_i X_{i,k}, \quad (5.11)$$

com $k = 1, 2, 3$ e onde φ_i são as funções de forma dos elementos isoparamétricos [Zienkiewicz e Taylor, 1991a], $X_{i,k}$ são as coordenadas globais no nó i na direcção do eixo x_k e N é o número de nós

do elemento mestre. Os modelos apresentados neste trabalho foram implementados com elementos mestre de 8 nós.

Como as funções φ_i são polinómios, a expressão de transformação de coordenadas (5.11) pode ser desenvolvida na sua forma polinomial:

$$x_k = \sum \alpha_k^{lmn} \xi^l \eta^m \zeta^n . \quad (5.12)$$

No Anexo B apresenta-se o valor dos coeficientes α_k^{lmn} para os elementos de 8 e 16 nós. Estes coeficientes são determinados a partir da definição das $3N$ coordenadas globais dos nós e resolvendo o sistema de $3N$ equações resultantes da introdução destas coordenadas na Equação (5.12).

Para as matrizes estruturais que resultam de integrações no domínio do elemento, define-se:

$$\int_V f(\xi, \eta, \zeta) dV = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad (5.13)$$

sendo $f(\xi, \eta, \zeta)$ uma função genérica e $|J|$ o determinante da matriz Jacobiana, a qual é definida através da igualdade:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Considerando a transformação de coordenadas definida na Equação (5.12), o valor de $|J|$ pode ser calculado na forma de um polinómio:

$$|J| = \sum \beta_k^{lmn} \xi^l \eta^m \zeta^n , \quad (5.15)$$

em que os coeficientes β_k^{lmn} são função dos coeficientes α_k^{lmn} definidos na Equação (5.12).

O procedimento traduzido em (5.13) aplica-se directamente aos operadores \mathbb{F} e \mathbf{Q}_v :

$$\mathbb{F} = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 \mathbf{S}_v^T \mathbf{F} \mathbf{S}_v |J| d\xi d\eta d\zeta, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{Q}_v = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} |J| d\xi d\eta d\zeta. \quad (5.17)$$

O operador de compatibilidade no domínio, \mathbf{A}_v , depende do operador diferencial de equilíbrio, \mathbf{D} , o qual se encontra escrito no referencial global. Recorrendo à regra de derivação da função composta, é possível obter as derivadas parciais associadas às coordenadas globais em função das derivadas associadas às coordenadas locais:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = (J^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (5.18)$$

Assim sendo, define-se o operador \mathbf{D} no referencial local através de:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{D}', \quad (5.19)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' = & \begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & \cdot & \cdot & \hat{J}_{21} & \hat{J}_{31} & \cdot \\ \cdot & \hat{J}_{21} & \cdot & \hat{J}_{11} & \cdot & \hat{J}_{31} \\ \cdot & \cdot & \hat{J}_{31} & \cdot & \hat{J}_{11} & \hat{J}_{21} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} + \begin{bmatrix} \hat{J}_{12} & \cdot & \cdot & \hat{J}_{22} & \hat{J}_{32} & \cdot \\ \cdot & \hat{J}_{22} & \cdot & \hat{J}_{12} & \cdot & \hat{J}_{32} \\ \cdot & \cdot & \hat{J}_{32} & \cdot & \hat{J}_{12} & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} + \\ & + \begin{bmatrix} \hat{J}_{13} & \cdot & \cdot & \hat{J}_{23} & \hat{J}_{33} & \cdot \\ \cdot & \hat{J}_{23} & \cdot & \hat{J}_{13} & \cdot & \hat{J}_{33} \\ \cdot & \cdot & \hat{J}_{33} & \cdot & \hat{J}_{13} & \hat{J}_{23} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

As componentes \hat{J}_{ij} são obtidas do seguinte modo:

$$\hat{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}^T)^{-1} |\mathbf{J}|. \quad (5.20)$$

De forma análoga ao efectuado para $|\mathbf{J}|$, é possível desenvolver a matriz $\hat{\mathbf{J}}$ na forma polinomial:

$$\hat{\mathbf{J}} = \sum B_k^{lmn} \xi^l \eta^m \zeta^n, \quad (5.21)$$

onde os coeficientes B_k^{lmn} são função dos coeficientes α_k^{lmn} definidos na Equação (5.12).

Deste modo, o operador \mathbf{A}_v escreve-se como:

$$\mathbf{A}_v = \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{|\mathbf{J}|} (\mathbf{D}' \mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_v |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta. \quad (5.22)$$

Para as integrações ao longo das fronteiras dos elementos definidas num sistema de eixos local (ς, τ) , em que ς e $\tau \in [-1.0, 1.0]$, é possível definir:

$$\int_{\Gamma} f(\varsigma, \tau) d\Gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\varsigma, \tau) \|n'\| d\varsigma d\tau, \quad (5.23)$$

sendo

$$n' = \begin{bmatrix} n'_{x_1} \\ n'_{x_2} \\ n'_{x_3} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} n_{\xi} \\ n_{\eta} \\ n_{\zeta} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

e onde n_{ξ} , n_{η} e n_{ζ} representam as normais exteriores ao lado no referencial local.

A matriz das normais exteriores pode ser escrita como:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\|n'\|} \mathbf{N}' \quad \text{com} \quad \|n'\| = \sqrt{n'^2_{x_1} + n'^2_{x_2} + n'^2_{x_3}}, \quad (5.25)$$

e em que

$$N' = \begin{bmatrix} n'_{x_1} & \cdot & \cdot & n'_{x_2} & n'_{x_3} & \cdot \\ \cdot & n'_{x_2} & \cdot & n'_{x_1} & \cdot & n'_{x_3} \\ \cdot & \cdot & n'_{x_3} & \cdot & n'_{x_1} & n'_{x_2} \end{bmatrix}.$$

É possível definir os seguintes operadores estruturais:

$$\mathbf{A}_\gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N' \mathbf{S}_v)^T \mathbf{U}_\gamma \, d\zeta d\tau, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}_\gamma^T \hat{\mathbf{J}} \mathbf{t}'_\gamma \, d\zeta d\tau, \quad (5.27)$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N' \mathbf{S}_v)^T \bar{\mathbf{u}} \, d\zeta d\tau. \quad (5.28)$$

No caso particular de as cargas estarem aplicadas segundo as direcções do referencial local verifica-se a seguinte relação:

$$\mathbf{t}_\gamma = \frac{\hat{\mathbf{J}}}{\|\mathbf{n}\|} \mathbf{t}'_\gamma. \quad (5.29)$$

Tendo em conta a mudança de referencial acima apresentada e assumindo um modelo de dano isotrópico, no qual a relação $\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ é válida, os operadores \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ são definidos através de:

$$\mathbf{M}_v = - \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} \int_{-1}^1 (\mathbf{D}'^* \mathbf{U}_v)^T d \mathbf{S}_v \, d\xi d\eta d\zeta + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N'^* \mathbf{U}_v)^T d \mathbf{S}_v \, d\zeta d\tau, \quad (5.30)$$

$$\mathbf{M}_\gamma = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}_\gamma^T (N' \mathbf{S}_v) d \, d\zeta d\tau. \quad (5.31)$$

Ao contrário dos restantes operadores apresentados anteriormente, os operadores \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ dependem da variável de dano, para a qual se desconhece inicialmente a sua distribuição. Consequentemente, não é possível integrar analiticamente estas matrizes, sendo necessário recorrer a técnicas de integração numérica.

Tal como o apresentado nos trabalhos, por exemplo, de [Mendes, 2002; Silva, 2006], o cálculo numérico dos integrais intervenientes nas definições (5.30) e (5.31) é efectuado através de regras de quadratura e recorrendo aos pontos de integração de Lobatto (ver Anexo C). O especial interesse pela regra de quadratura de Lobatto deve-se, essencialmente, à existência de pontos de integração na fronteira. Assim sendo, o recurso a esta técnica permite determinar o valor da variável de dano na fronteira e, consequentemente, calcular numericamente as matrizes \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ .

Considere-se um único elemento finito com α colunas na matriz \mathbf{S}_v (número de tensões generalizadas), β colunas na matriz \mathbf{U}_v (número de deslocamentos generalizados no domínio), n componentes para os campos de deslocamentos livres nas seis faces do elemento cúbico e γ funções de aproximação \mathbf{U}_γ para cada um desses campos. As dimensões de cada um dos operadores estruturais definidos anteriormente são dadas na Tabela (5.2).

Operador	n.º linhas	n.º colunas
\mathbb{F}	α	α
\mathbf{A}_v	α	β
\mathbf{A}_γ	α	$(\gamma \times n)$
\mathbf{Q}_v	β	1
\mathbf{Q}_γ	$(\gamma \times n)$	1
$\bar{\mathbf{e}}$	α	1
\mathbf{M}_v	β	α
\mathbf{M}_γ	$(\gamma \times n)$	α

Tabela 5.2– Dimensões dos operadores estruturais de um modelo HMT no caso de problemas tridimensionais.

5.5 Algoritmo de Implementação

De acordo com o exposto na Secção (3.5), a localização do campo de deformações conduz à localização simultânea do campo de tensões efectivas e a um “salto” no campo de deslocamentos. A modelação deste fenómeno é conseguida através de um refinamento tipo- p ou tipo- h da aproximação do modelo e por um método de regularização do modelo de dano contínuo local. As duas estratégias referidas anteriormente são abordadas de uma forma ligeiramente diferente nos elementos finitos não convencionais e nos elementos tradicionais de deslocamento.

Nos elementos tradicionais de deslocamento, o refinamento é conseguido através de um refinamento tipo- h verificando-se, geralmente, a existência de malhas muito refinadas e graus de aproximação baixos [Silva 2006]. Assim, o enriquecimento do modelo conduz a soluções não objectivas e em alguns casos a solução poderá “depender da malha de elementos finitos”. No entanto, nos elementos não convencionais a dependência verifica-se ao nível da discretização do modelo e não propriamente da malha de elementos finitos em virtude da utilização do refinamento tipo- p . Nas formulações não convencionais a malha de elementos é constituída por macroelementos, pelo que o modelo não local não se deve basear nessa malha. Desta forma, definem-se sub-malhas interiores à malha de elementos finitos global associadas ao modelo não local.

Neste trabalho, o modelo integral não local é baseado numa malha de pontos de integração de Lobatto, caracterizada por uma distribuição não uniforme e pela consideração de pontos na fronteira. Consequentemente, torna-se necessário analisar a sua distribuição e garantir que ao longo do processo de evolução da fenda existem pelo menos 2 ou 3 pontos contidos na ZPF. A utilização de uma malha de pontos de integração evita a construção de uma segunda malha mais refinada que a inicial. De referir que, o modelo não local é eficaz se permitir obter respostas objectivas para discretizações com diferentes malhas de elementos finitos, graus de aproximação e sub-malhas.

No seguimento do referido anteriormente, a malha base do modelo integral não local coincide com a malha de pontos de integração. O modelo não local funciona correctamente se um aumento no número de pontos de integração, para a mesma discretização global, não provocar a variação na resposta do problema [Silva, 2006].

Nos casos de estudo apresentados neste trabalho, a variável não local considerada corresponde à deformação equivalente ou à taxa de energia de deformação caso se adopte, respectivamente, o modelo de dano de [Mazars, 1984] ou o modelo com uma variável de dano apresentado por [Comi e Perego, 2001].

Em cada iteração é necessário actualizar o valor da variável não local em cada ponto de integração de Lobatto utilizando a função de ponderação da Equação (3.48). A identificação dos pontos onde existe evolução do dano é realizada através das equações Kuhn-Tucker do modelo integral que podem ser escritas em função da taxa de variação da variável de dano \dot{d} . Apesar de o potencial \bar{f} ser não local, o cálculo do dano é efectuado localmente, obtendo-se directamente os valores no intervalo de definição [0,1]. Deste modo, obtêm-se as seguintes condições de carga-descarga do modelo não local:

$$\bar{f} \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad \bar{f}\dot{d} = 0. \quad (5.32)$$

No âmbito da análise pretendida neste trabalho, o carregamento é aplicado em sucessivos patamares de carga. Em cada passo de carga, o sistema de equações não linear é resolvido com recurso a uma variante do método de Newton-Raphson [Zienkiewicz e Taylor, 1991b], na qual se utiliza a matriz secante em vez da habitual matriz tangente. Refira-se que por carregamento se entende não só as tensões ou cargas impostas à estrutura, mas também deslocamentos prescritos.

Apresenta-se agora o algoritmo utilizado na resolução do sistema governativo não linear em cada um dos passos de carga. Após verificada a convergência no passo de carga anterior n , procede-se da seguinte forma:

1. Erro = 10 x tolerância e iter=1;
2. Enquanto Erro > tolerância
 - **sol** _{j} , no início do processo iterativo no novo passo de carga, representa o vector solução obtido no passo de carga anterior. Nas iterações seguintes, representa o vector solução actualizado. As variáveis independentes do vector solução correspondem às grandezas generalizadas $\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{q}_v$ e \mathbf{q}_γ ;
 - Determinação do vector de resíduos \mathbf{R} , o qual é definido na iteração $j+1$ do passo de carga em questão, através da igualdade:

$$\mathbf{R}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{A}_v\mathbf{q}_{vj} - \mathbf{A}_\gamma\mathbf{q}_{\gamma j} - \bar{\mathbf{e}} \\ (\mathbf{A}_v^T - \mathbf{M}_v)_j\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{Q}_v \\ (-\mathbf{A}_\gamma^T + \mathbf{M}_\gamma)_j\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix}; \quad (5.33)$$

- Actualização da variável Erro a partir do valor do vector dos resíduos \mathbf{R} , assumindo que $\text{Erro} = \frac{\|\mathbf{R}\|}{C}$, em que C é uma constante de normalização;
- Determinação da evolução do vector solução:

$$\mathbf{A}_j \Delta \mathbf{sol} = -\mathbf{R}_{j+1}, \quad (5.34)$$

onde \mathbf{A} representa a matriz secante do sistema governativo global. Tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^T - \mathbf{M}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^T + \mathbf{M}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{X}} \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}_{j+1}; \quad (5.35)$$

- Cálculo do novo vector solução: $\mathbf{sol}_{j+1} = \mathbf{sol}_j + \Delta \mathbf{sol}$;
 - Actualização da grandeza não local em cada ponto de integração usando a função de ponderação da expressão (3.48);
 - Utilização das condições de Kuhn-Tucker (ver Equação (5.32)) de modo a obter os novos valores da variável de dano em cada ponto de integração;
 - Cálculo das matrizes \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ do sistema governativo com base nos novos valores da variável de dano;
 - iter = iter + 1.
3. Armazenamento da solução para o passo $(n + 1)$ de carga em análise e avançar para o incremento seguinte.

O sistema de equações pode ser resolvido de forma iterativa ou de forma directa. Para a resolução iterativa foi implementada uma variante do método dos gradientes conjugados. Para a resolução directa dos sistemas governativos não simétricos é utilizada uma rotina comercial, disponível na *Harwell Subroutine Library* (HSL).

Verificou-se que, quando o sistema de equações é resolvido iterativamente não ocorrem problemas de mau condicionamento na matriz global da estrutura. Assim sendo, é possível proceder a uma escolha dos graus de aproximação de acordo com as experiências de trabalhos anteriores [da Silva, 2002; Mendes, 2002; Silva, 2006], nomeadamente a seguinte relação entre graus de aproximação: $n_{U_v} = n_{S_v} - 1$ e $n_{U_\gamma} = n_{U_v}$. Contudo, este procedimento pode conduzir a um maior esforço computacional e a um cálculo numérico mais moroso.

Por outro lado, se o sistema for resolvido de forma directa, verifica-se um mau condicionamento da matriz global ao adoptar a relação de graus de aproximação referida anteriormente. Contudo, esse problema deixa de ser relevante quando se adopta a seguinte relação entre graus de aproximação: $n_{U_v} = n_{S_v} - 1$ e $n_{U_\gamma} = n_{U_v} - 1$.

CAPÍTULO 6

Aplicações Numéricas

6.1 Considerações iniciais

No presente capítulo pretende-se avaliar o desempenho e adequabilidade da formulação HMT com aproximação de tensões efectivas conjugada com os modelos de dano apresentados na Secção (3.4) na modelação da fendilhação do material.

Inicialmente, realiza-se um conjunto de exemplos teste e procede-se à comparação dos resultados numéricos obtidos com os resultados experimentais de [Hassanzadeh, 1991] e com os resultados numéricos de [Comi e Perego, 2001].

Após a validação da formulação HMT associada a modelos de dano contínuo não locais, apresentam-se alguns exemplos que visam evidenciar as características e potencialidades da formulação não convencional descrita nos capítulos anteriores. Analisam-se as soluções quando se procede a um refinamento tipo- h e a um refinamento tipo- p e efectua-se uma análise de sensibilidade dos resultados com a variação do comprimento característico. Nesta última parte do capítulo, comparam-se ainda os resultados obtidos nos dois modelos de dano adoptados. De referir que, os parâmetros do material em cada um dos modelos podem diferir consoante o tipo de estrutura em estudo. Contudo, neste trabalho, adoptam-se os mesmos parâmetros do material em todas as estruturas analisadas.

No modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] considera-se os parâmetros do material apresentados nesse trabalho, nomeadamente, $n = 12$, $K = 5.8 \times 10^{-14}$ MPa e $c = 405$. No modelo de [Mazars, 1984], os parâmetros A_t , B_t e ε_{d0} são calibrados com base na curva $(\sigma - \varepsilon)$ obtida num ensaio uniaxial de tracção para o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] com $n = 12$, $K = 5.8 \times 10^{-14}$ MPa, $c = 405$, $E = 29.2$ GPa e $\nu = 0$. De salientar que, o parâmetro ε_{d0} foi determinado considerando a relação $\varepsilon_0 = \sqrt{k \ln(c)^n \frac{2}{E}}$ que, apesar de ser válida para o caso unidimensional, conduz a que o início do processo de fendilhação ocorra para um parâmetro de carga muito semelhante nos dois modelos de dano adoptados. No que respeita aos parâmetros A_c e B_c do mesmo modelo, considera-se $A_c = 0.85$ e $B_c = 1050$.

O procedimento adoptado para calibrar os parâmetros A_t , B_t e ε_{d0} do modelo de [Mazars, 1984] não é o mais correcto, devendo-se recorrer à curva carga-deslocamento para efectuar o ajuste dos mesmos. Contudo, verifica-se que, para as estruturas analisadas neste trabalho, os resultados numéricos obtidos desta forma são razoáveis.

Considerando os parâmetros referidos anteriormente para o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001], obtém-se os seguintes valores para os parâmetros A_t , B_t e ε_{d0} do modelo de dano de [Mazars, 1984]: $A_t = 0.3$, $B_t = 8000$ e $\varepsilon_{d0} = 9.34 \times 10^{-5}$. Neste seguimento, apresenta-se as curvas $(\sigma - \varepsilon)$ para

os dois modelos de dano adoptados considerando um ensaio uniaxial de tracção (Figura (6.1)) e a curva ($\sigma - \varepsilon$) para um ensaio uniaxial de compressão segundo o modelo de [Mazars, 1984] considerando $A_c = 0.85$ e $B_c = 1050$ (Figura (6.2)).

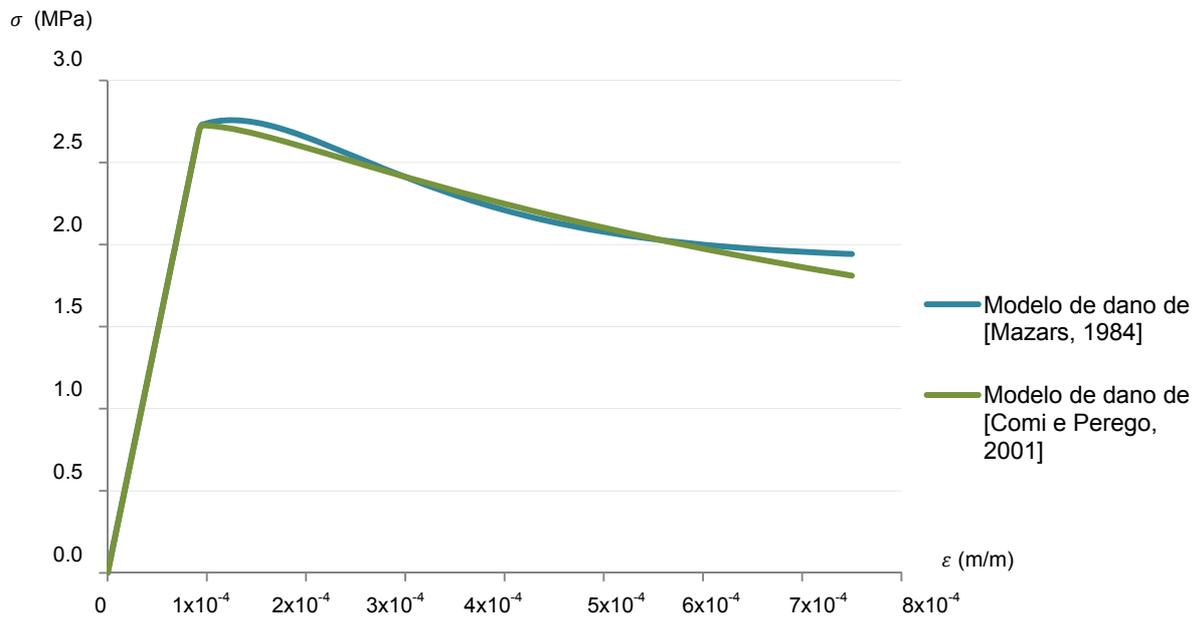


Figura 6.1 – Curvas ($\sigma - \varepsilon$) num ensaio uniaxial de tracção para os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e [Mazars, 1984].

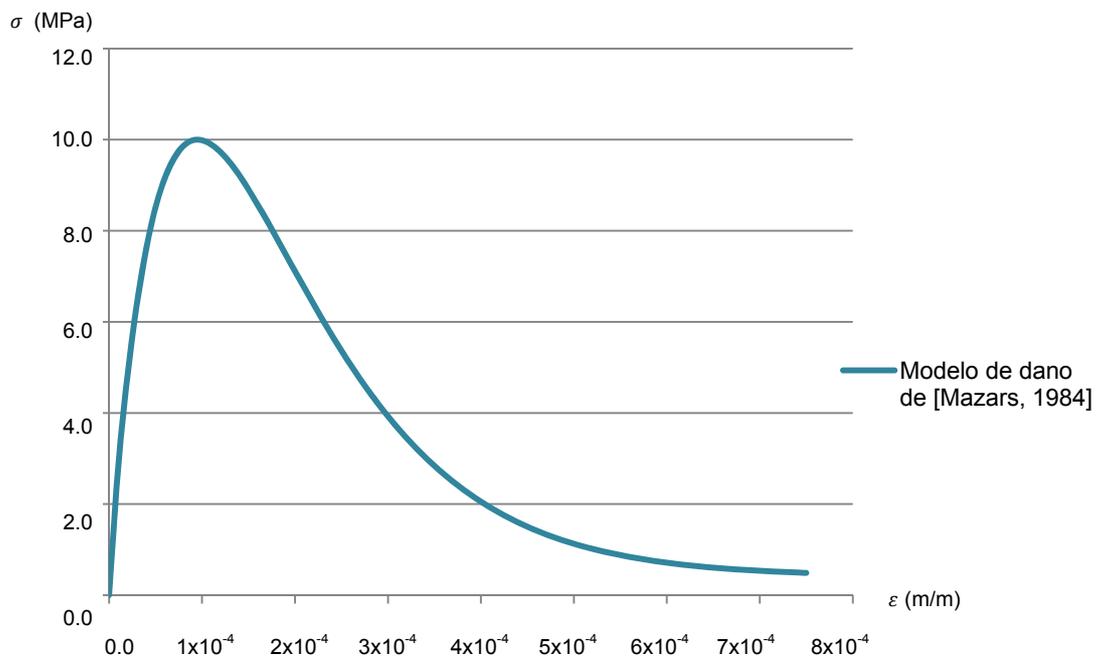


Figura 6.2 – Curva ($\sigma - \varepsilon$) num ensaio uniaxial de compressão para o modelo de dano de [Mazars, 1984].

6.2 Validação Numérica - Teste de [Hassanzadeh, 1991]

O teste experimental de [Hassanzadeh, 1991] corresponde à análise de um prisma de betão com uma base de dimensões (70mm x 70mm) e uma altura de 60mm. A meia altura, a secção transversal do prisma é reduzida para um quadrado de dimensões (35mm x 35mm) ao longo de uma espessura de 4mm. A base do prisma encontra-se fixa e aplica-se um deslocamento vertical \bar{u} no centro da face superior, conforme indicado na Figura (6.3).

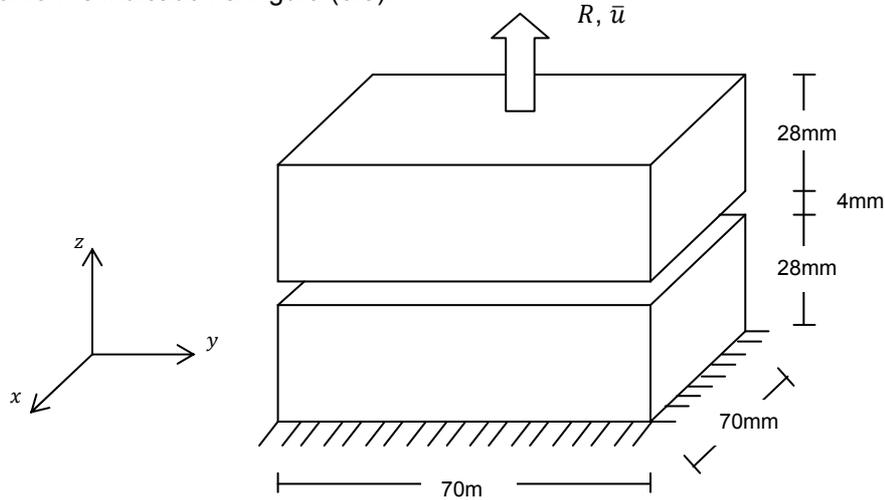


Figura 6.3 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: definição da geometria do problema.

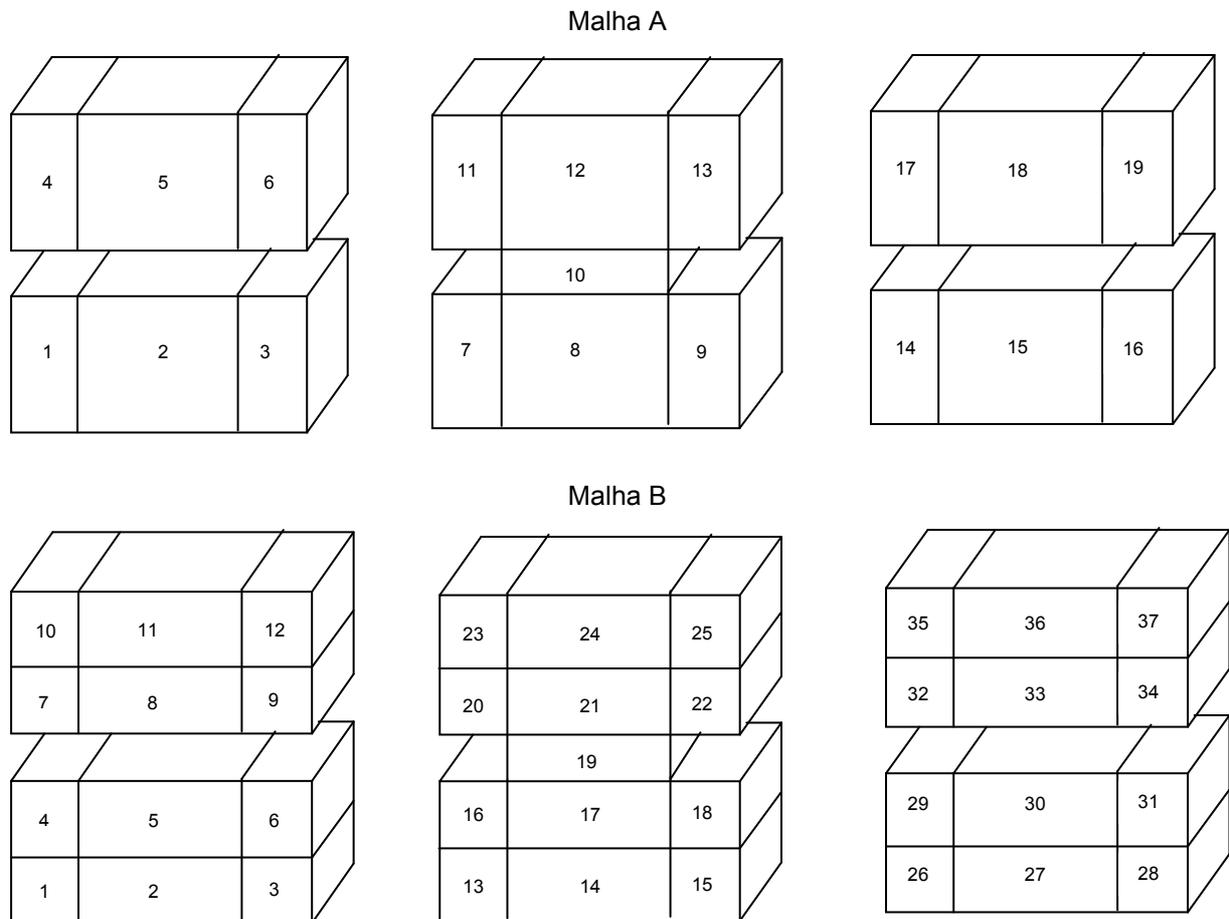


Figura 6.4 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: malhas de elementos finitos adoptadas.

Malha	Elementos	Dimensões (mm)		
		x	y	z
A	1,3,4, 6,14,16,17,19	17.5	17.5	28.0
	7,9,11,13	35.0	17.5	28.0
	2,5,15,18	17.5	35.0	28.0
	8,12	35.0	35.0	28.0
	10	35.0	35.0	4.0
B	1,3,4,6,7,9,10,12,26,28,29,31,32,34,35,37	17.5	17.5	14.0
	13,15,16,18,20,22,23,25	35.0	17.5	14.0
	2,5,8,11,27,30,33,36	17.5	35.0	14.0
	14,17,21,24	35.0	35.0	14.0
	19	35.0	35.0	4.0

Tabela 6.1– Teste de [Hassanzadeh, 1991]: dimensões dos elementos finitos das malhas A e B.

Vários autores têm recorrido a este exemplo teste para validar os modelos numéricos em estudo. Em particular, no trabalho de [Comi e Perego, 2001] este teste experimental é analisado com uma formulação de elementos finitos tradicionais de deslocamento conjugada com o modelo de dano descrito na Secção (3.4.1), ao qual se associa o modelo integral com a variável não local \bar{Y} . Por sua vez, [Silva, 2006] realiza dois testes numéricos com modelos HMT associados a um modelo integral não local, nomeadamente o Teste 1 e o Teste 2. Estes testes correspondem ao problema de [Hassanzadeh, 1991] para o caso bidimensional, considerando, respectivamente, a estrutura discretizada em 7 e 13 elementos finitos. Os resultados numéricos apresentados pelos autores referidos anteriormente correspondem à estrutura apresentada na Figura (6.3) modelada como um estado plano de deformação. No entanto, desconhece-se a existência de resultados com base na utilização de elementos finitos tridimensionais para a estrutura em estudo.

Apresenta-se a curva carga-deslocamento imposto obtida nos trabalhos referidos anteriormente.

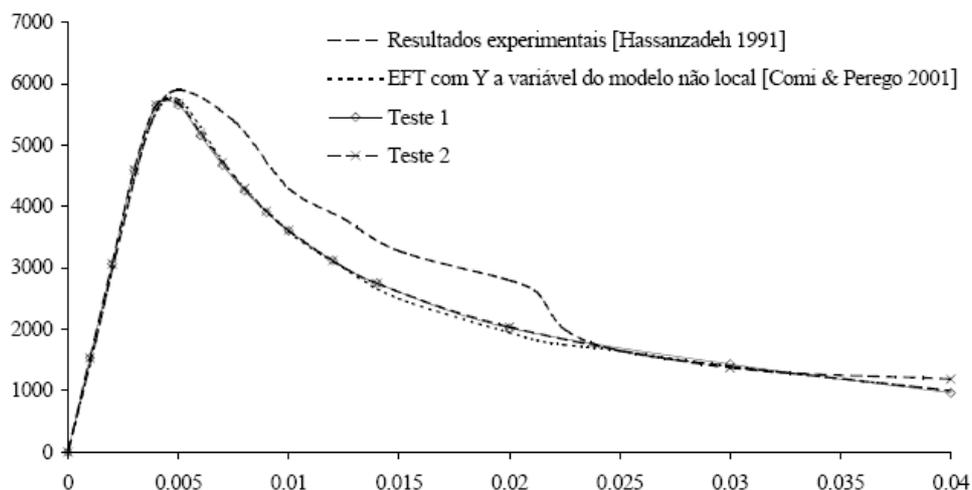


Figura 6.5 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: curvas reacção R (N) – deslocamento imposto \bar{u} (mm) [Silva, 2006].

Analisa-se a estrutura definida por [Hassanzadeh, 1991] ilustrada na Figura (6.3) assumindo duas malhas de elementos finitos distintas (Figura (6.4)). O deslocamento vertical é imposto uniformemente ao longo do bordo superior.

O modelo constitutivo descrito na Secção (3.4.1) pode ser utilizado na medida em que este teste produz apenas dano de tracção. Assumem-se os parâmetros $n = 12$, $K = 5.8 \times 10^{-14}$ MPa e $c = 405$ para aquele modelo. Relativamente ao modelo de dano de [Mazars, 1984], não foi realizada a calibração dos parâmetros com base nos resultados experimentais, tendo sido adoptados os seguintes parâmetros do modelo: $A_t = 0.3$, $B_t = 8000$, $\varepsilon_{d0} = 9.34 \times 10^{-5}$, $A_c = 0.85$ e $B_c = 1050$. Considera-se ainda $l = 1.6$ mm, $E = 36$ GPa e $\nu = 0,15$ para ambos os modelos de dano.

As características das discretizações testadas encontram-se resumidas na Tabela (6.2), assim como as respectivas malhas de pontos de integração de Lobatto por elemento finito.

Teste	A	B	C
N.º Elem.	19	37	37
n_{S_v}	4	3	4
n_{U_v}	3	2	3
n_{U_γ}	2	1	2
N_{gdI}	19950	18909	38688
Malha de pontos de Lobatto	20x20x20	20x20x20	20x20x20

Tabela 6.2– Teste de [Hassanzadeh, 1991]: testes numéricos.

A adopção de uma malha de (20x20x20) pontos de integração para os testes indicados na tabela acima implica um tempo de processamento da informação bastante significativo, tornando assim o processo de cálculo da solução final moroso. Apesar dos pontos de integração localizados a uma distância aproximadamente superior ao dobro do comprimento característico poderem ser omitidos [Bazant e Lin, 1988], neste trabalho a função de ponderação local é estendida a todos os pontos de integração. Assim, para cada ponto são considerados os valores em todos os pontos de Lobatto vizinhos. Para além disso, o algoritmo exige um tempo inadmissível de CPU no cálculo da solução final do problema em consequência da metodologia adoptada e, nomeadamente, da forma como foi implementada.

O referido anteriormente é especialmente relevante no teste C devido ao elevado número de graus de liberdade. Assim sendo, a partir do instante em que o material entra em regime não linear abandona-se este teste e o problema é analisado através dos resultados provenientes do teste B.

Apresenta-se os diagramas de tensões em regime linear obtidos para os testes A e C quando se considera um deslocamento $\bar{u}_z = 0.001$ mm (Figura (6.6)). Os diagramas correspondem a um plano de equação $x = 35$ mm.

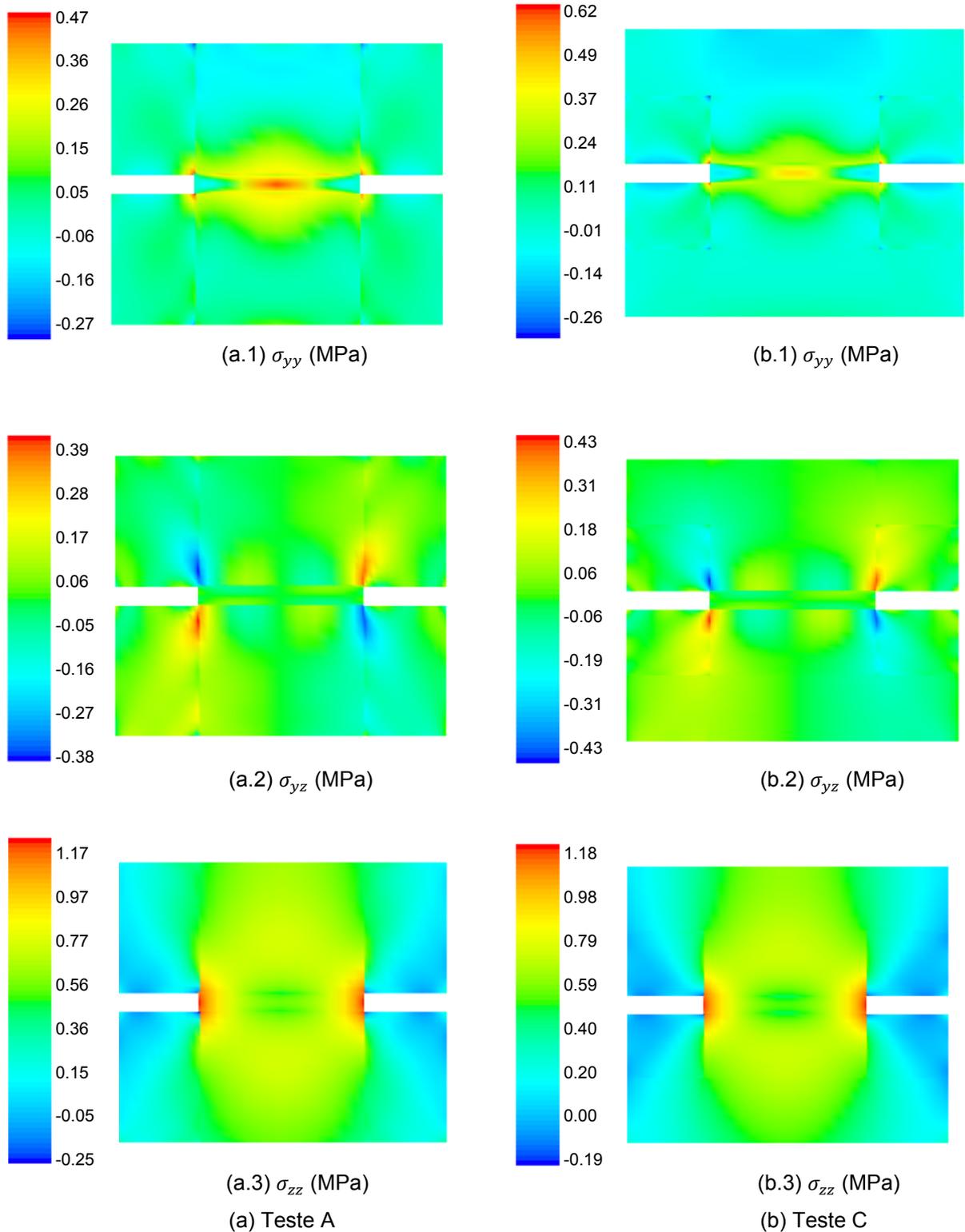


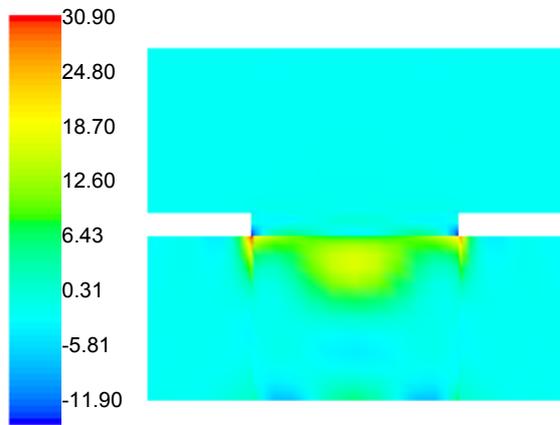
Figura 6.6 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões em regime elástico linear para $\bar{u}_z = 0.001\text{mm}$ obtida nos testes numéricos A e C (plano $x=35\text{mm}$).

Os diagramas de tensões em regime linear permitem constatar que o fenómeno de fendilhação é desencadeado pelas extensões de tracção que ocorrem nas singularidades da estrutura. Verifica-se que os testes A e C traduzem resultados muito semelhantes, nomeadamente para as tensões mais condicionantes, σ_{zz} . Contudo, o teste C traduz menores flutuações nos campos de tensões entre elementos e, conseqüentemente, a um maior equilíbrio de tensões nas fronteiras inter-elementares. Portanto, a melhoria da qualidade estática da solução do problema pode ser alcançada através de um refinamento tipo- h e, particularmente, pelo procedimento adoptado no teste C.

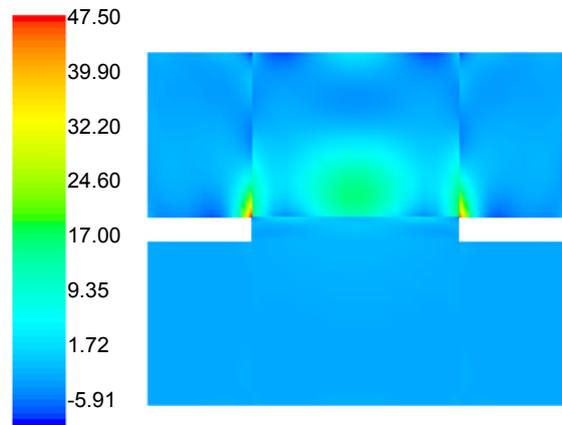
Como referido anteriormente, não foi possível obter resultados em regime não linear para o teste C. Portanto, apresenta-se os diagramas de tensões efectivas e de distribuição de dano segundo os dois modelos de dano obtidos nos testes numéricos A e B. Pretende-se comparar qualitativamente os resultados obtidos para o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] com os resultados numéricos apresentados naquele trabalho relativos ao teste de [Hassanzadeh, 1991]. Para além disso, confronta-se os resultados do modelo de [Mazars, 1984] com os do modelo de [Comi e Perego, 2001] com o objectivo de avaliar a adequabilidade do primeiro modelo na modelação do comportamento fendilhado de estruturas de betão.

De acordo com as Figuras (6.7) e (6.8), o teste A não reproduz resultados coerentes com os resultados experimentais de [Hassanzadeh, 1991], nem com os resultados numéricos apresentados nos trabalhos de, por exemplo, [Comi e Perego, 2001] e [Silva, 2006]. Apesar de em ambos os modelos de dano o início do processo de danificação ocorrer nas zonas singulares da estrutura onde se registam maiores tensões de tracção σ_{zz} , o desenvolvimento da fendilhação não conduz à localização do dano na zona reentrante da estrutura. Para além disso, os dois modelos representam a evolução do dano de forma diferente. Assim sendo, interrompeu-se o algoritmo de cálculo da solução para teste A quando a estrutura estava sujeita a um deslocamento $\bar{u}_z = 0.02\text{mm}$ e procedeu-se à realização do teste B.

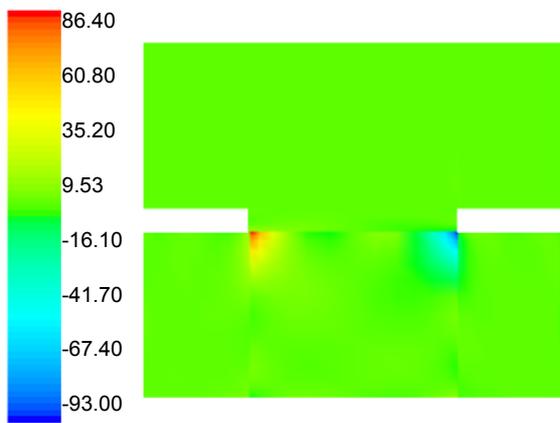
O teste A não permitiu cumprir o objectivo proposto nesta secção. No entanto, com base nos resultados obtidos por [Silva, 2006] para o problema bidimensional e considerando o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001], pressupõe-se que um refinamento do tipo $-p$ na estrutura em estudo discretizada em 19 elementos finitos possa conduzir a resultados mais plausíveis. Contudo, neste trabalho não se adopta esse procedimento devido ao esforço computacional associado. Esta situação pode ser resolvida, por exemplo, explorando o potencial de um processamento em paralelo ou considerando um refinamento tipo- p localizado apenas nas zonas singulares da estrutura mais solicitadas.



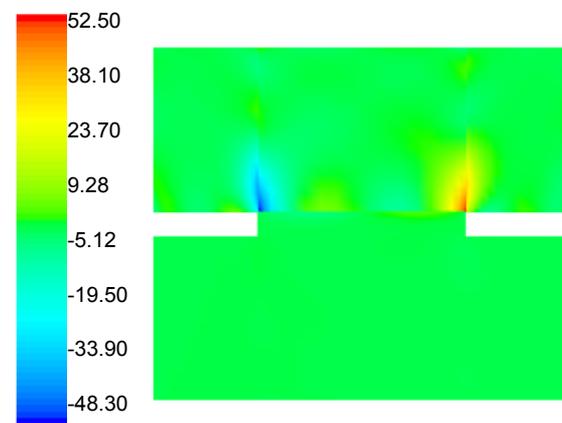
(a.1) $\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)



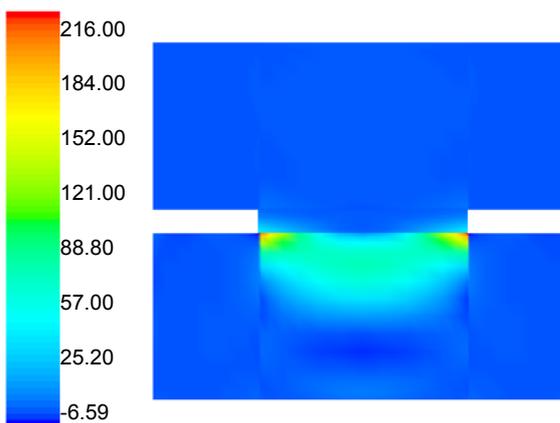
(b.1) $\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)



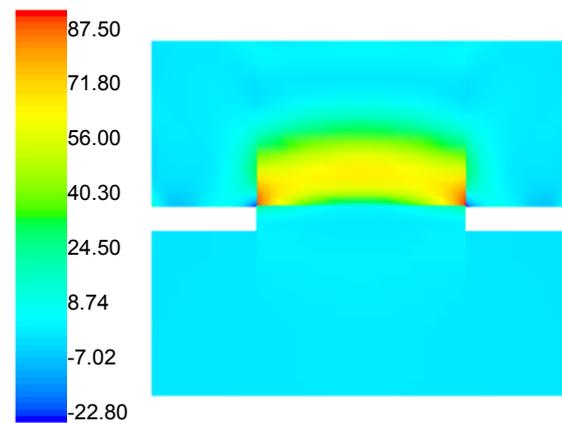
(a.2) $\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)



(b.2) $\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)



(a.3) $\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)



(b.3) $\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)

(a) Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]

(b) Modelo de dano de [Mazars, 1984]

Figura 6.7 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões efectivas para $\bar{u}_z = 0.02\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste A (plano $x=35\text{mm}$).

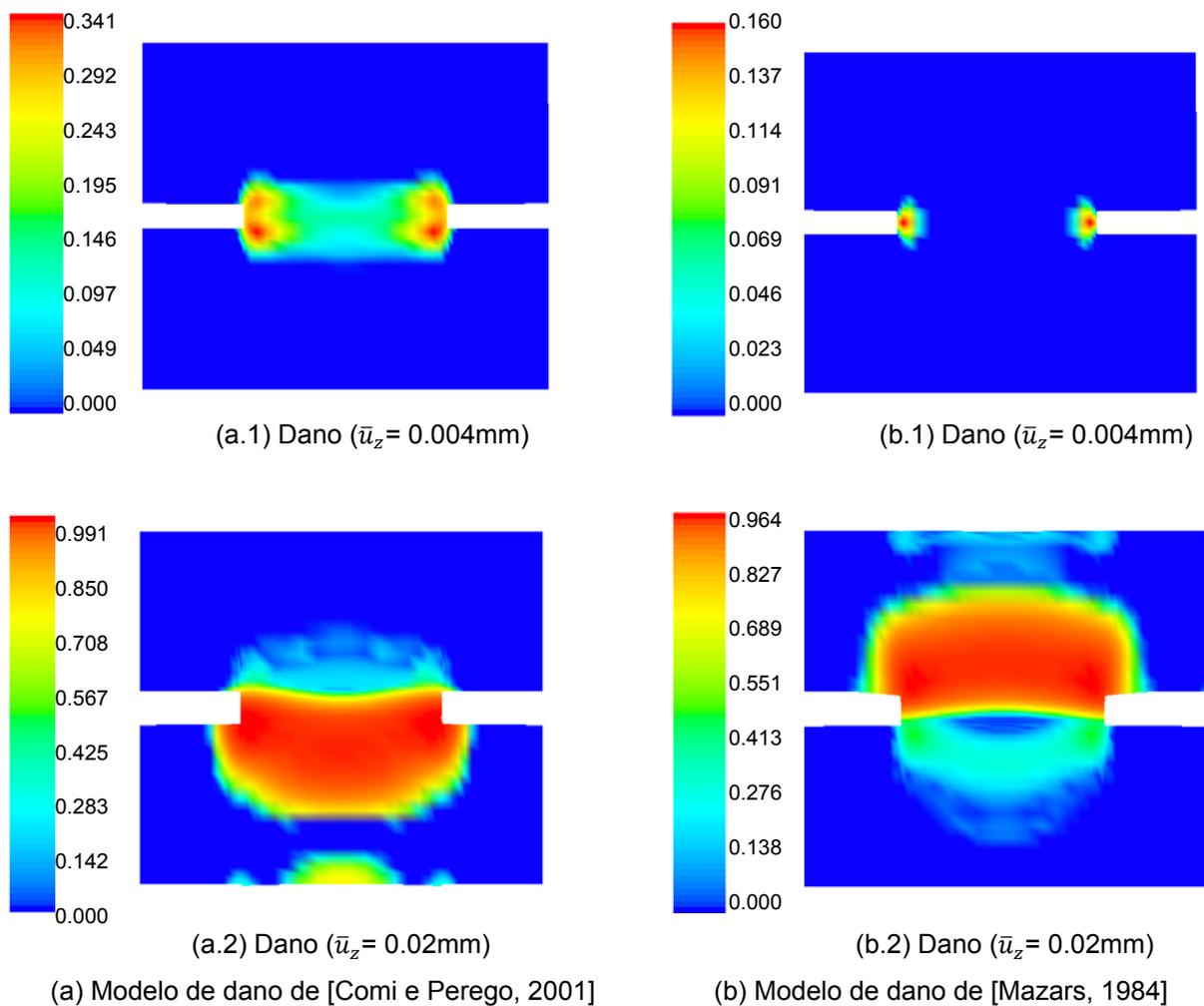


Figura 6.8 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste A (configuração deformada no plano $x=35\text{mm}$ com um factor de escala de 100).

No entanto, o teste B permite obter resultados razoáveis para a distribuição de dano (ver Figura (6.10)). Um refinamento do tipo- h mostra-se eficiente para esta estrutura uma vez que ocorre uma forte localização de extensões de tração em zonas singulares da estrutura. Como neste teste numérico o grau das funções de aproximação dos vários campos é muito pequeno, a qualidade do campo estático da solução assim obtido é insatisfatória (Figura (6.9)). Portanto, um refinamento tipo- p , por exemplo como o traduzido no teste C, e, eventualmente, estendido apenas aos elementos finitos confinantes com a singularidade da estrutura deve ser adoptado com vista a melhorar a aproximação dos vários campos e, conseqüentemente, as correspondentes distribuições de tensões efectivas e de dano.

Neste último teste, o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] consegue reproduzir a concentração de dano na zona reentrante da estrutura, estando de acordo com os resultados experimentais e numéricos referidos anteriormente. Assim sendo, é possível avaliar os resultados obtidos segundo o

modelo de dano de [Mazars, 1984] e proceder à validação deste modelo no domínio de aplicação em que este trabalho se insere.

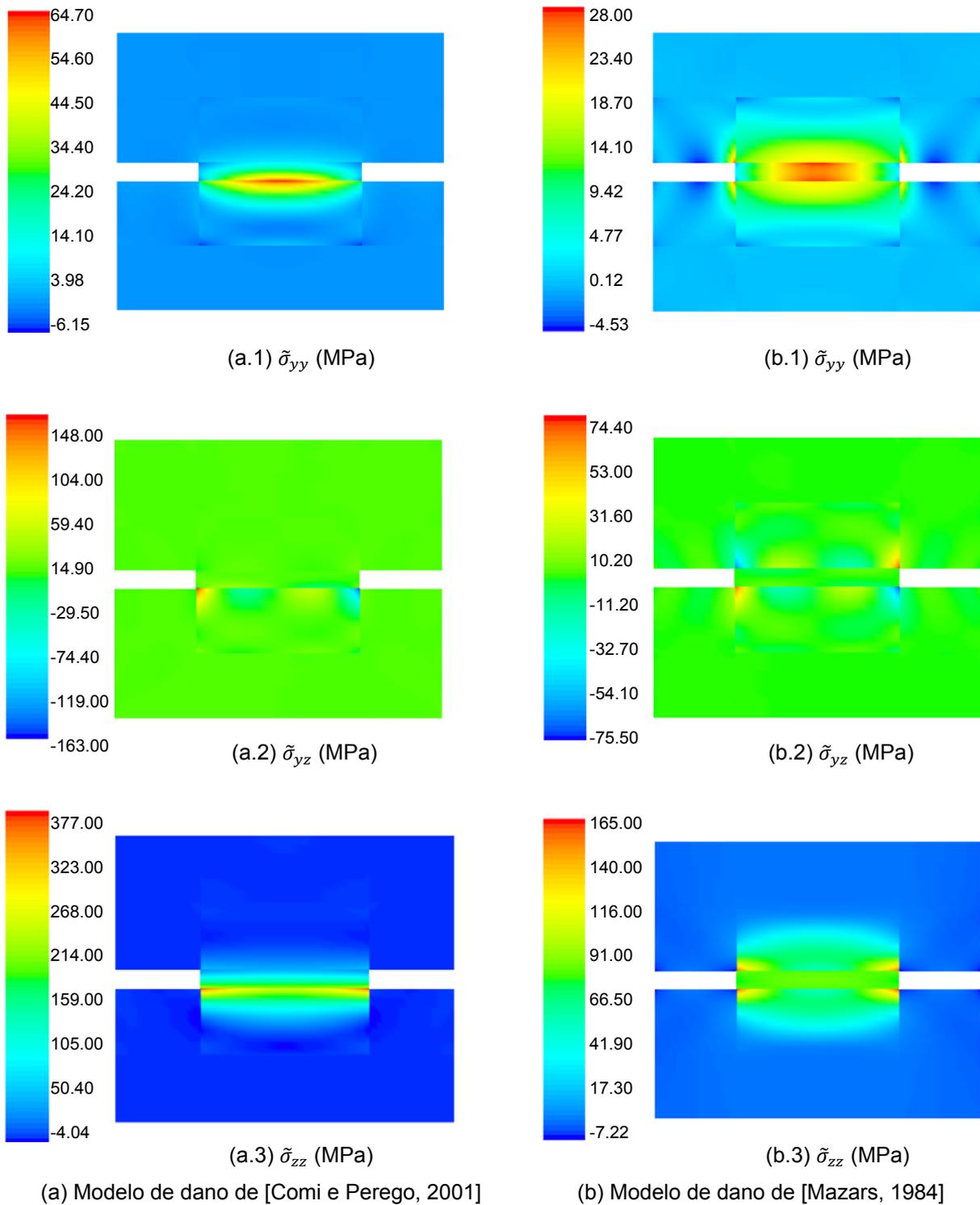
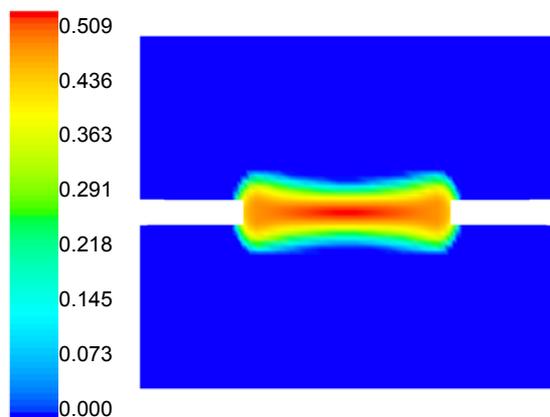
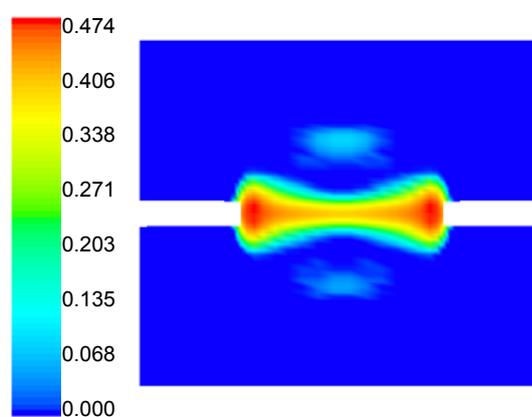


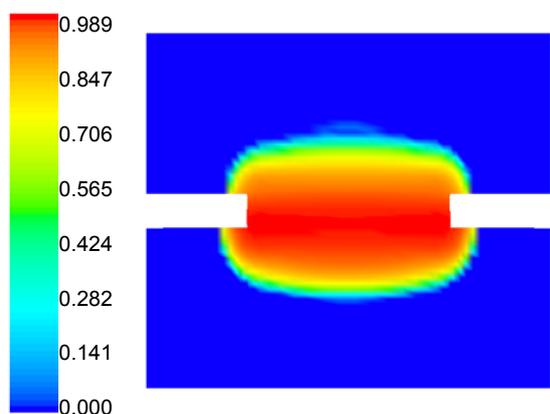
Figura 6.9 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: distribuição de tensões efectivas para $\bar{u}_z = 0.04\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (plano $x=35\text{mm}$).



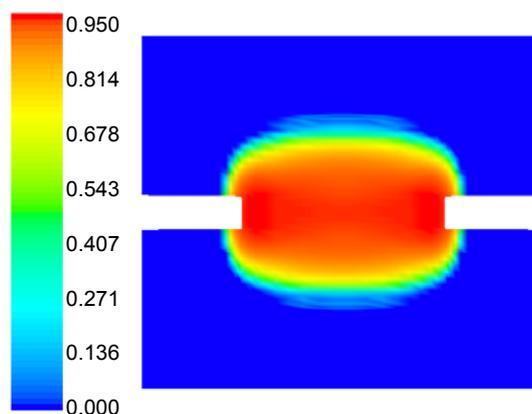
(a.1) Dano ($\bar{u}_z = 0.004\text{mm}$)



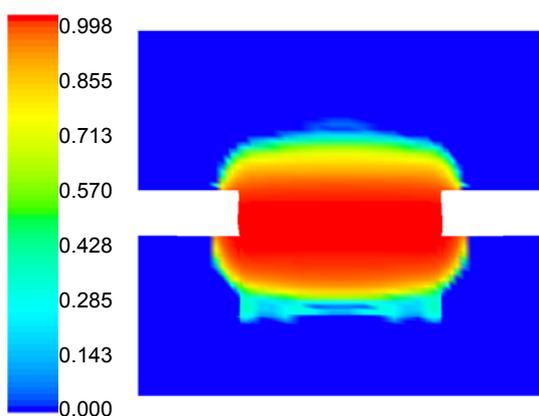
(b.1) Dano ($\bar{u}_z = 0.004\text{mm}$)



(a.2) Dano ($\bar{u}_z = 0.02\text{mm}$)

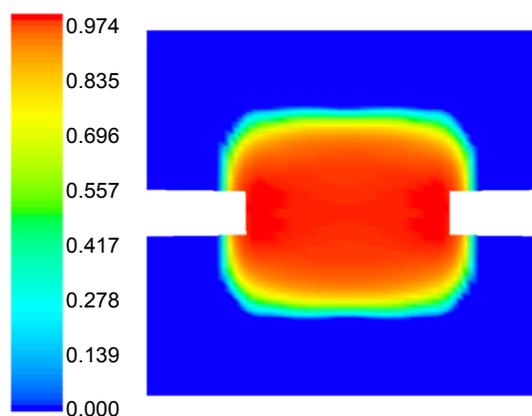


(b.2) Dano ($\bar{u}_z = 0.02\text{mm}$)



(a.3) Dano ($\bar{u}_z = 0.04\text{mm}$)

(a) [Comi e Perego, 2001]



(b.3) Dano ($\bar{u}_z = 0.04\text{mm}$)

(b) [Mazars, 1984]

Figura 6.10 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (configuração deformada no plano $x=35\text{mm}$ com um factor de escala de 100).

Através dos diagramas de tensões efectivas ilustrados nas Figuras (6.9.a) e (6.9.b), verifica-se que o modelo de dano de [Mazars, 1984] conduz a uma tensão máxima de tracção $\tilde{\sigma}_{zz}$ aproximadamente igual a metade da que se regista no modelo de [Comi e Perego, 2001]. Face à disparidade destes resultados, é conveniente proceder à calibração dos parâmetros do modelo de [Mazars, 1984].

Contudo, quando se adopta o modelo de dano de [Mazars, 1984], o início e a evolução do fenómeno de fendilhação são modelados de forma consistente com os resultados experimentais e numéricos conhecidos e com os obtidos neste trabalho para o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]. Portanto, conclui-se que o modelo de dano de [Mazars, 1984] permite reproduzir o processo de fissuração em estruturas tridimensionais de betão simples. Os parâmetros do material devem ser ajustados com base em resultados experimentais e/ou numéricos de modo a obter uma correcta modelação da resposta não linear do material.

A necessidade de se proceder à calibração dos parâmetros do material associados a cada um dos modelos de dano adoptados neste trabalho é confirmada através da comparação entre as curvas reacção – deslocamento imposto ($R - \bar{u}$) da Figura (6.5) e as obtidas no teste numérico B (Figura (6.11)). De facto, o teste numérico A não permitiu obter resultados coerentes com os resultados experimentais de [Hassanzadeh, 1991], nem com os resultados numéricos apresentados nos trabalhos de, por exemplo, [Comi e Perego, 2001] e [Silva, 2006].

Como referido anteriormente, adoptaram-se os parâmetros do modelo de [Comi e Perego, 2001] considerados no trabalho destes autores, os quais correspondem à análise do problema modelado como um estado plano de deformação. No entanto, as diferenças entre a curva ($R - \bar{u}$) obtida neste trabalho e a obtida por [Comi e Perego, 2001], como por exemplo o valor da reacção máxima no bordo superior da estrutura, permitem afirmar que os parâmetros deste modelo de dano deverão ser ajustados quando se procede à análise do problema tridimensional. Relativamente aos parâmetros do material adoptados para o modelo de dano de [Mazars, 1984], constata-se que estes não permitem modelar o comportamento global com amolecimento e a degradação da rigidez do material de forma consistente com os resultados experimentais de [Hassanzadeh, 1991] e com os resultados numéricos de [Comi e Perego, 2001].

Para além disso, verifica-se que as curvas ($R - \bar{u}$) obtidas para os testes numéricos A e B apresentam oscilações no ramo de amolecimento. Estas podem ser explicadas pela adopção de um insuficiente número de passos de carga (neste trabalho adopta-se 50 passos de carga, enquanto que os resultados numéricos de [Comi e Perego, 2001] foram obtidos para 400 passos de carga). Para além disso, o refinamento considerado na modelação da resposta não linear do material, particularmente o baixo grau máximo das funções de aproximação, e ainda a adopção de parâmetros do material nos dois modelos de dano não calibrados de forma conveniente para a estrutura em estudo podem conduzir à ocorrência das oscilações verificadas nas curvas ($R - \bar{u}$) obtidas neste trabalho.

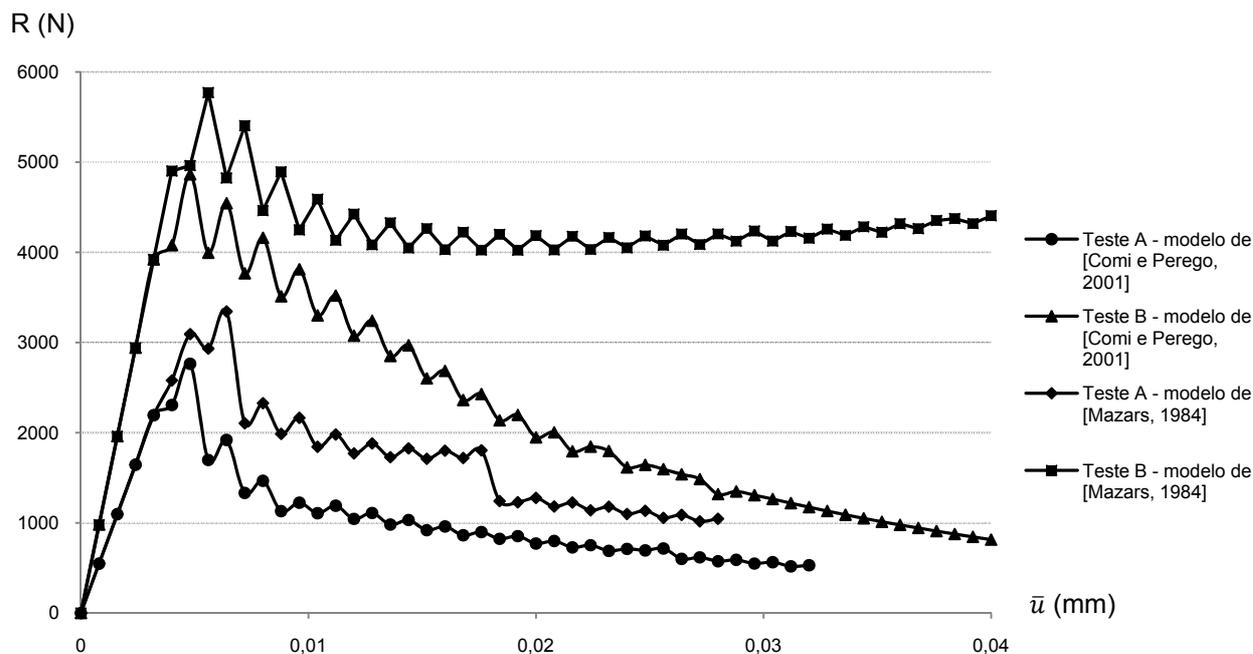


Figura 6.11 – Teste de [Hassanzadeh, 1991]: curvas reacção R (N) – deslocamento imposto \bar{u} (mm) obtidas nos testes numéricos A e B para os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e [Mazars, 1984]

6.3 Exemplos de estudo

Nesta secção procede-se ao estudo do fenómeno de fendilhação em algumas estruturas tridimensionais de betão recorrendo à formulação HMT descrita no capítulo 4 associada aos dois modelos de dano apresentados na Secção (3.4). Nos vários exemplos apresentados consideram-se os seguintes parâmetros do material:

Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	Modelo de dano de [Mazars, 1984]
$n = 12$ $K = 5.8 \times 10^{-14} \text{MPa}$ $c = 405$	$A_t = 0.3$ $B_t = 8000$ $A_c = 0.85$ $B_c = 1050$ $\varepsilon_{d0} = 9.34 \times 10^{-5}$
l (parâmetro definido em cada exemplo)	
$E = 29.2 \text{GPa}$ $\nu = 0.2$	

Tabela 6.3– Parâmetros do material adoptados nos exemplos de estudo.

Neste trabalho, analisam-se 4 estruturas de betão simples com carregamentos distintos, para as quais se apresentam as distribuições de tensões em regime linear, as distribuições de tensões efectivas em regime não linear e a distribuição de dano na configuração deformada. As estruturas exemplo adoptadas possuem as seguintes particularidades:

- Exemplo 1 – Os resultados obtidos para a estrutura tridimensional são facilmente comparáveis com os obtidos para uma estrutura bidimensional idêntica, permitindo avaliar qualitativamente o desempenho do modelo HMT adoptado. Pretende-se evidenciar o aparecimento de dano devido apenas a extensões de tracção, apesar de ocorrerem também extensões de compressão;
- Exemplo 2 – É possível identificar nitidamente os diagramas de esforço transversal e momento flector e, ainda, avaliar a sua evolução com o desenvolvimento da fendilhação por flexão;
- Exemplo 3 – Dada a simplicidade geométrica do problema, analisa-se a sensibilidade do modelo ao comprimento característico, l . A estrutura apresenta essencialmente dano de tracção e a sua modelação é díspar nos dois modelos de dano adoptados;
- Exemplo 4 – A estrutura tridimensional possui uma zona reentrante a partir da qual se desenvolve a fendilhação. Neste exemplo, procede-se ao refinamento tipo- p com vista a avaliar a qualidade da solução vs tempo de cálculo.

6.3.1 Exemplo 1 - Cubo (com carga de vão)

A primeira estrutura tridimensional de betão que se apresenta consiste num cubo com 1m de lado, para o qual se assume que a face contida no plano de equação $y=0m$ está totalmente encastrada, conforme ilustrado na Figura (6.12). A análise efectuada permite evidenciar o aparecimento de extensões de tracção e de compressão, sendo estas últimas pouco significativas no processo de fendilhação. Para além disso, é possível visualizar a evolução da fendilhação na estrutura com o aumento das extensões de tracção, assim como respectivo o mecanismo de rotura associado, segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984].

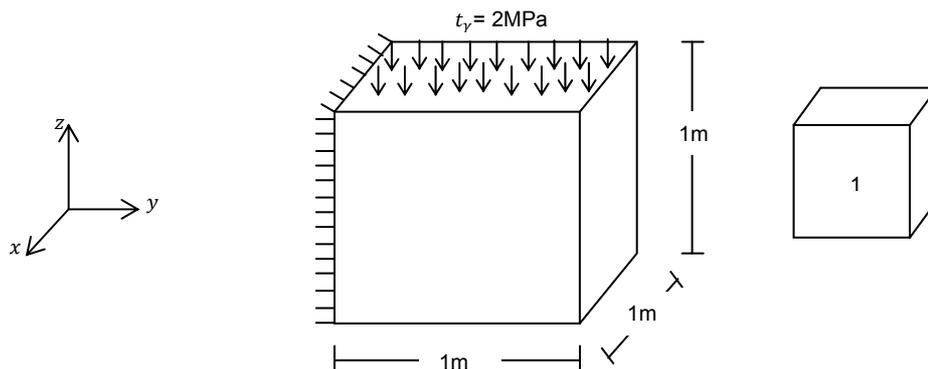


Figura 6.12 – Exemplo 1: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.

Neste exemplo, consideram-se os parâmetros do material apresentados na Tabela (6.3) e um comprimento característico $l = 0.1m$. Os graus máximos das funções de aproximação são: $n_{s_p}=6$, $n_{U_p}=5$ e $n_{U_v}=4$, correspondendo a 3081 graus de liberdade. Utiliza-se uma malha de $(20 \times 20 \times 20)$ pontos de integração de Lobatto por elemento finito.

Apesar da relação constitutiva depender do modelo de dano considerado na análise, a distribuição de tensões efectivas segundo os dois modelos de dano adoptados é muito semelhante nesta estrutura exemplo. Assim sendo, apresenta-se apenas os diagramas de tensões efectivas em regime não linear segundo o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] e na Tabela (6.4) indicam-se os valores máximos e mínimos das tensões efectivas obtidos segundo os dois modelos de dano.

	$\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)	$\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)	$\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)
Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	[-25.20 ; 3.77]	[-16.90 ; 3.79]	[-16.10 ; 39.60]
Modelo de dano de [Mazars, 1984]	[-21.50 ; 4.04]	[-17.00 ; 3.50]	[-16.80 ; 35.90]

Tabela 6.4 – Exemplo 1: quadro resumo das tensões efectivas para $t_y = 2\text{MPa}$ obtidas nos modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=0.5\text{m}$).

Analisando os diagramas de tensão expostos acima, verifica-se que as tensões σ_{yy} são as mais influentes na iniciação e evolução do processo de danificação. De salientar ainda que, os valores máximos da escala de tensões σ_{yy} apresentada no diagrama (a.3) da Figura (6.13) são da mesma ordem de grandeza. Contudo, de acordo com o exposto na Secção (2.4), a resistência de pico do betão à compressão é cerca de 10 a 15 vezes superior à de tracção, sendo, portanto, razoável admitir que o processo de fendilhação é condicionado essencialmente pelo aumento das extensões de tracção verificado ao longo do processo de carga. Esta situação é suportada pelo o diagrama de tensões efectivas $\tilde{\sigma}_{yy}$ obtido no último patamar de carga (Figura (6.13.b.3)).

Neste contexto, apresenta-se a distribuição de dano segundo os modelos de dano adoptados e as respectivas deformadas associadas em dois patamares carga (Figura (6.14)). Os diagramas que se seguem correspondem a um plano de equação $x=0.5\text{m}$.

De acordo com os resultados dos dois modelos de dano, o carregamento aplicado na estrutura origina tensões de compressão que não determinam o processo de fendilhação, verificando-se que a degradação do material ocorre essencialmente na zona da estrutura onde se registam consideráveis tensões efectivas de tracção. No entanto, o início do processo de fendilhação segundo os modelos de dano adoptados não ocorre para o mesmo valor da carga aplicada, correspondendo a 1.08MPa no modelo de [Comi e Perego, 2001] e a 0.92MPa no modelo de [Mazars, 1984].

Para a presente estrutura, os dois modelos de dano traduzem de forma muito semelhante o desenvolvimento da fissuração. Apesar de num estágio intermédio de carga o modelo de [Mazars, 1984] reproduzir um valor de dano superior ao obtido no modelo de [Comi e Perego, 2001] (Figuras (6.14.a.1) e (6.14.b.1)), os dois modelos conduzem a valores de dano idênticos no final do processo de carga (Figuras (6.14.a.2) e (6.14.b.2)). Contudo, a distribuição de dano final apresenta algumas diferenças, nomeadamente na área de material danificado que é superior no modelo de [Mazars,

1984], que se devem ao facto dos modelos de dano não considerarem a mesma grandeza não local no processo de regularização.

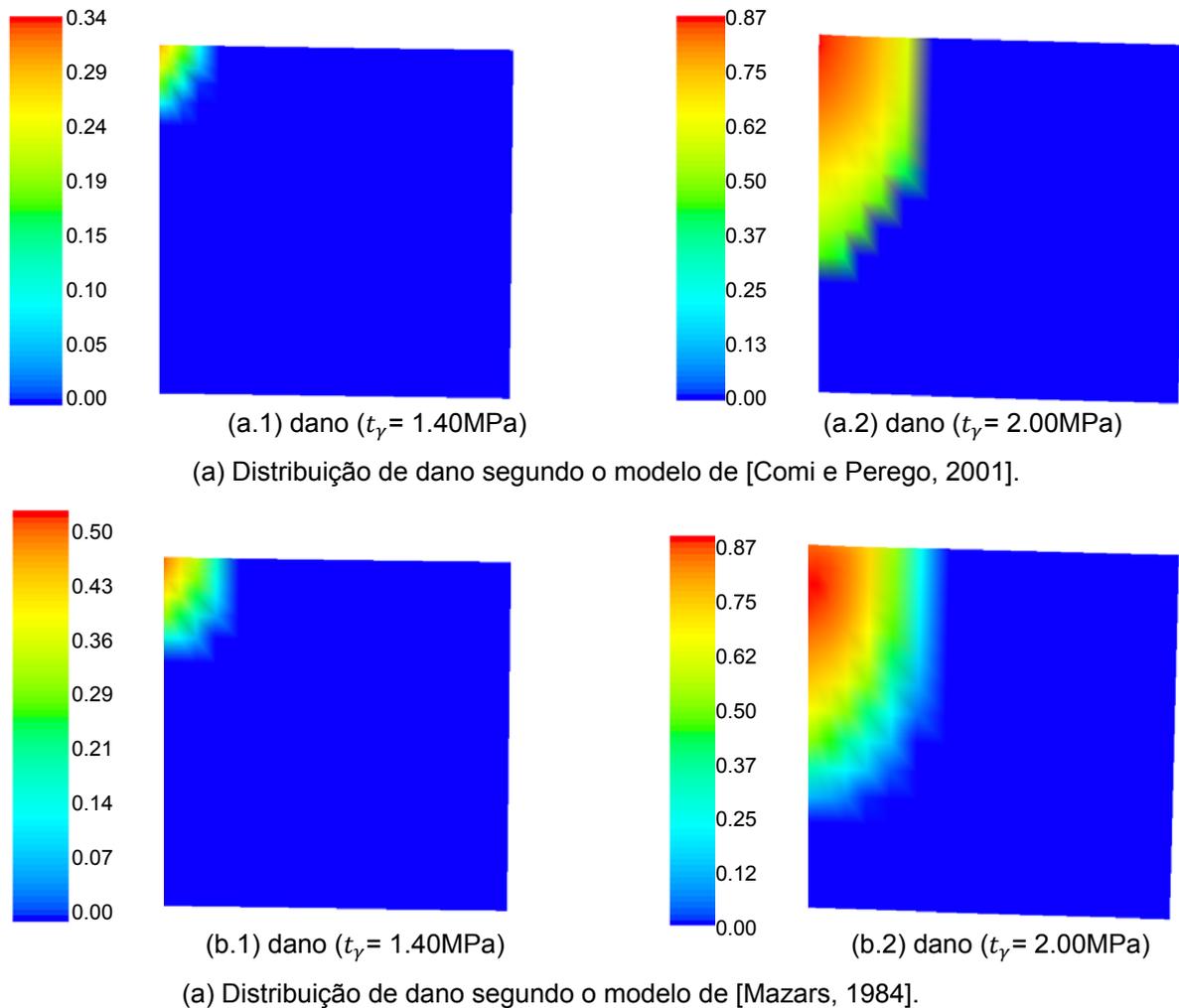


Figura 6.14 – Exemplo 1: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 100).

6.3.2 Exemplo 2 – Viga de betão

Considera-se agora uma viga de betão biencastada com um vão de 10 metros de secção (2mx2m) e sujeita a uma carga de vão distribuída uniformemente de 0.75MPa, conforme ilustrado na Figura (6.15).

Pretende-se com este exemplo evidenciar o aparecimento de fendilhação por flexão nas secções de apoio e de meio vão e indicar o respectivo mecanismo de rotura associado. Proceder-se também à análise qualitativa da evolução dos diagramas de esforço transversal e de momento flector com o desenvolvimento da fendilhação na estrutura.

Apesar da geometria da estrutura não permitir a classificação de viga, é estabelecida uma comparação qualitativa entre os resultados obtidos para a estrutura em questão e os resultados que se conhecem para uma viga bi-encastada.

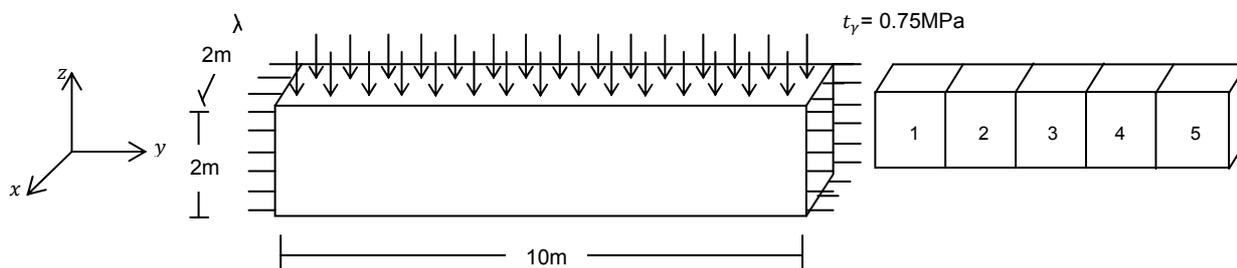


Figura 6.15 – Exemplo 2: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.

Adoptam-se os parâmetros do material apresentados na Tabela (6.3) e considera-se um comprimento característico $l = 0.2m$. Os graus de aproximação adoptados são: $n_{s_v} = 5$, $n_{u_v} = 4$ e $n_{u_\gamma} = 3$, correspondendo a 9507 graus de liberdade. Recorre-se a uma malha de (20x20x20) pontos de integração de Lobatto por elemento finito.

Os diagramas de tensões $\sigma_{yy}\{\tilde{\sigma}_{yy}\}$ e $\sigma_{yz}\{\tilde{\sigma}_{yz}\}$ estão relacionados, respectivamente, com o diagrama de momento flector e de esforço transversal em regime linear {não linear}. Os diagramas de tensões e de distribuição de dano correspondem a um plano de equação $x=1m$.

De seguida apresentam-se os diagramas de tensões em regime elástico linear correspondentes a uma carga de vão $t_\gamma = 0.25MPa$ (ver Figura (6.16)).

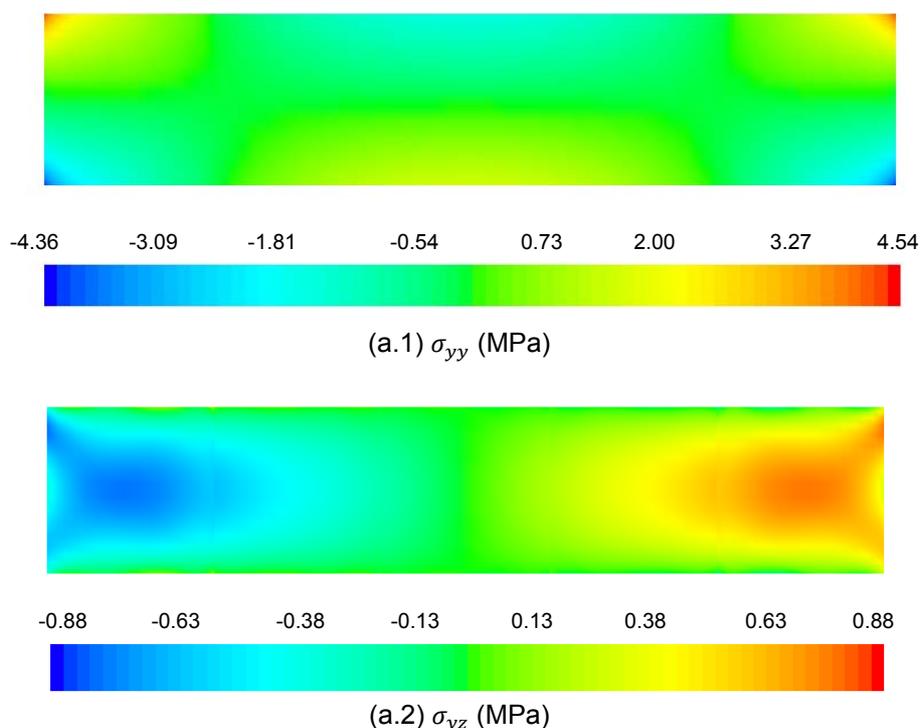


Figura 6.16 – Exemplo 2: distribuição de tensões em regime linear para $t_\gamma = 0.25MPa$ (plano $x=1.0m$).

Para uma viga bi-encastada sujeita a uma carga de vão sabe-se que o máximo momento flector negativo ocorre nas secções de extremidade e que o máximo valor positivo ocorre a meio vão da viga. De facto, estes valores coincidem directamente com os valores máximos das tensões de tracção do diagrama σ_{yy} (Figura (6.16.a.1)). Para além disso, o diagrama de tensões σ_{yz} apresenta um valor próximo de zero a meio vão, o qual pode ser relacionado com o ponto nulo do diagrama de esforço transversal (Figura (6.16.a.2)).

As máximas tensões de compressão e de tracção ocorrem nas secções encastradas e com valores muito idênticos, não sendo exactamente iguais devido à degradação da carga ao longo da secção. Portanto, o aumento das extensões de tracção nas referidas secções condiciona o início e evolução do processo de fendilhação na estrutura. Por outro lado, a partir de um determinado estágio de carregamento as tensões de tracção na zona de meio vão conduzem ao aparecimento de fissuração nessa zona da estrutura.

Dada a semelhança entre as distribuições de tensões efectivas nos dois modelos de dano, apresenta-se a distribuição de tensões em regime não linear para $t_\gamma = 0.75\text{MPa}$ segundo o modelo de dano de [Mazars, 1984] (Figura (6.17)) e na Tabela (6.5) constam os valores máximos e mínimos das tensões efectivas obtidos segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984].

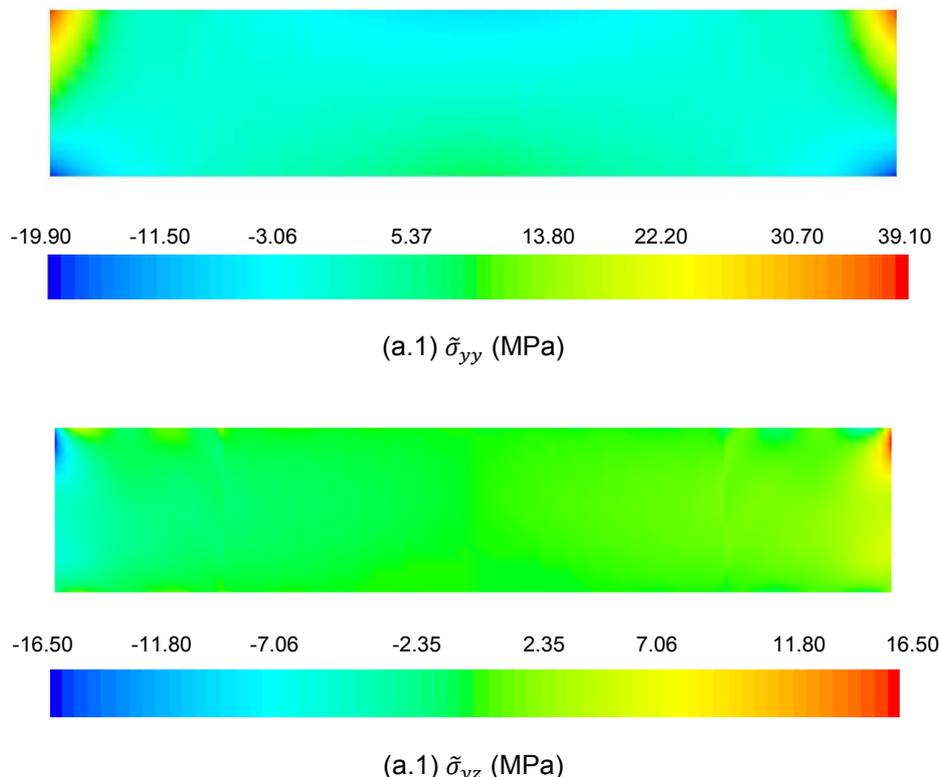


Figura 6.17 – Exemplo 2: distribuição de tensões efectivas em regime não linear para $t_\gamma = 0.75\text{MPa}$ segundo o modelo de dano de [Mazars, 1984] (plano $x=1.0\text{m}$).

	$\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)	$\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)
Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	[-17.70 ; 54.10]	[-16.50 ; 16.50]
Modelo de dano de [Mazars, 1984]	[-19.90 ; 39.10]	[-16.50 ; 16.50]

Tabela 6.5 – Exemplo 2: quadro resumo das tensões efectivas para $t_\gamma = 0.75\text{MPa}$ obtidas segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=1.0\text{m}$).

De acordo com o diagrama de tensões efectivas $\tilde{\sigma}_{yy}$, da Figura (6.17), o início do processo de danificação ocorre nas secções encastradas e, particularmente, a partir das fibras superiores da secção transversal. Como a estrutura está sujeita a um carregamento que provoca significativas extensões de tracção nas fibras inferiores da secção a meio vão, ocorre também a fendilhação dessa zona da estrutura.

As distribuições de dano obtidas segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (Figura (6.18)) comprovam o referido anteriormente e permitem comparar o estado de degradação do material nas secções que evidenciam maiores extensões de tracção. Os diagramas que se seguem correspondem a um plano de equação $x=1.0\text{m}$ e ilustram a configuração deformada da estrutura associada a cada modelo.

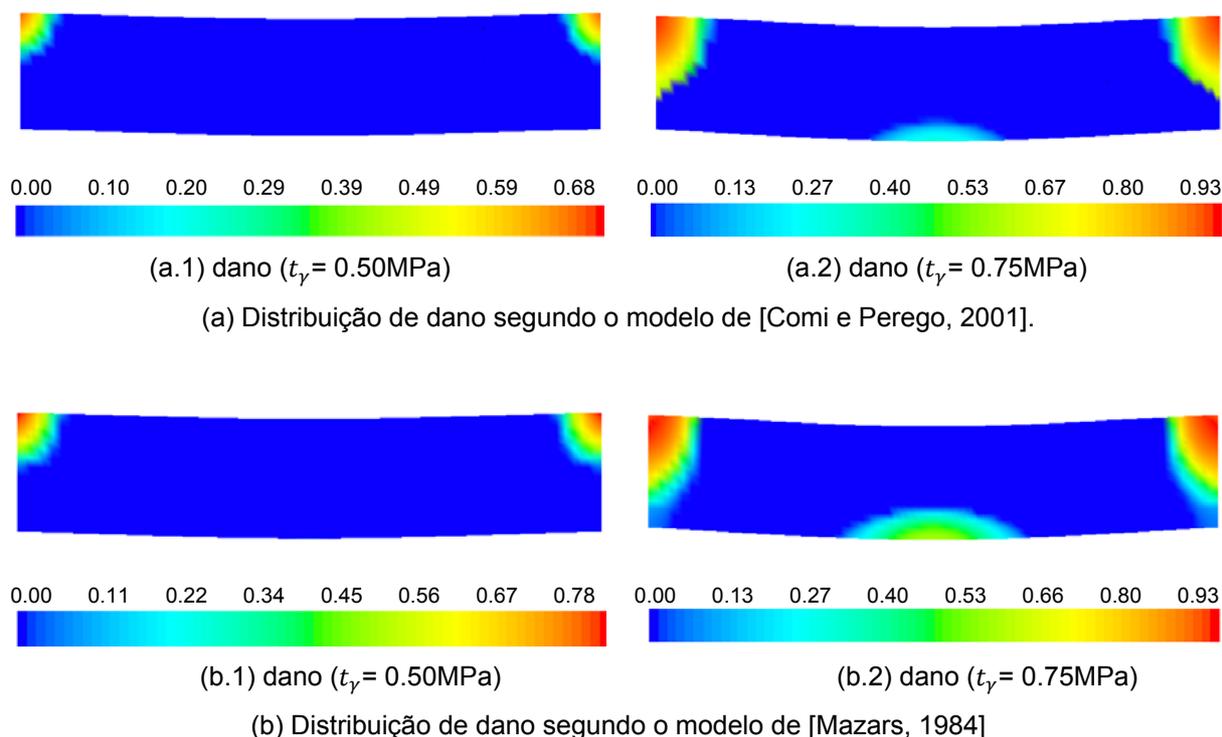


Figura 6.18 – Exemplo 2: evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (configuração deformada no plano $x=1.0\text{m}$ com um factor de escala de 100).

No seguimento do exposto anteriormente, constata-se que ambos os modelos permitem reproduzir o processo de fendilhação, nomeadamente o início da degradação do material nas secções

encastradas e o aparecimento de dano na zona de meio vão. Contudo, ao adoptar os parâmetros do material apresentados na Tabela (6.3), o valor da carga de vão para o qual ocorre o dano inicial é diferente nos dois modelos, sendo, respectivamente, 0.26MPa e 0.30MPa no modelo de [Comi e Perego, 2001] e no modelo de [Mazars, 1984]. Para além disso, num estágio intermédio de carregamento (Figuras (6.18.a.1) e (6.18.b.1)) este último modelo conduz a um valor de dano superior ao do primeiro.

Apesar de na última fase do carregamento os modelos de dano adoptados conduzirem a um valor de dano máximo nas secções encastradas muito semelhante (Figuras (6.18.a.2) e (6.18.b.2)), a área danificada adjacente àquelas secções é superior no modelo de [Mazars, 1984]. Acrescenta ainda o facto de este modelo conduzir a um estado de fissuração mais avançado na zona de meio vão.

6.3.3 Exemplo 3 - Cubo (com assentamento de apoio)

Considera-se um cubo de betão com a mesma geometria e condições de apoio do Exemplo 1, mas sujeito a um assentamento de apoio conforme indicado na Figura (6.19). O especial interesse neste exemplo deve-se ao facto de a estrutura estar sujeita a uma acção que provoca essencialmente dano de tracção. Assim sendo, é possível estabelecer comparações entre os resultados obtidos segundo os dois modelos de dano adoptados.

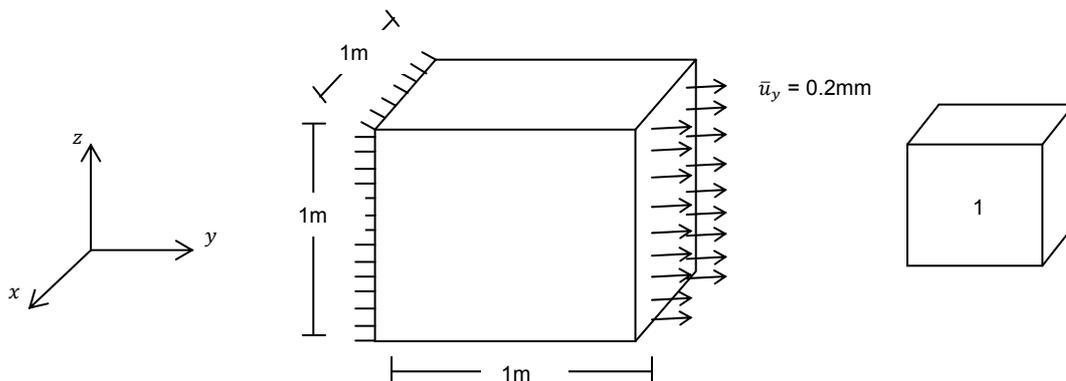


Figura 6.19 – Exemplo 2: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.

Pretende-se através deste exemplo estudar a sensibilidade dos resultados, nomeadamente a distribuição e os valores de dano, com a variação do comprimento característico. Considera-se esta estrutura devido à simplicidade geométrica do problema e às características do carregamento que permitem visualizar de forma clara a influência daquele parâmetro. Nesta análise adoptam-se os seguintes valores para o comprimento característico: $l = 0.05m$, $l = 0.10m$ e $l = 0.20m$, e os restantes parâmetros do material são os apresentados na Tabela (6.3). Os graus máximos das funções de aproximação são $n_{S_v} = 6$, $n_{U_v} = 5$ e $n_{U_y} = 4$, conduzindo, portanto, à análise de um problema com 3056 graus de liberdade. Recorre-se a uma malha de (20x20x20) pontos de integração de Lobatto por elemento finito.

As figuras que se seguem ilustram as distribuições de tensões relevantes em regime elástico linear quando ocorre um deslocamento $\bar{u}_y=0.06\text{mm}$ (Figura (6.20)) e as distribuições tensões efectivas em regime elástico não linear para $\bar{u}_y=0.20\text{mm}$ obtidas segundo os dois modelos de dano adoptados neste trabalho (Figura (6.21)).

Em regime linear, a distribuição de tensões é igual nos dois modelos de dano adoptados em virtude da relação constitutiva ser a mesma em ambos. Deste modo, o comprimento característico não influi na distribuição de tensões. A partir do instante em que ocorre danificação no material, a relação constitutiva depende do modelo de dano adoptado na modelação da resposta não linear do material. Para além disso, as tensões efectivas são calculadas considerando os valores de tensão dos pontos de Lobatto vizinhos através de uma função de ponderação espacial cuja abertura é controlada pelo comprimento característico, conforme o exposto na Secção (3.6). Deste modo, apresentam-se os valores das tensões efectivas em regime não linear para $l = 0.05\text{m}$, $l = 0.10\text{m}$ e $l = 0.2\text{m}$ quando a estrutura está sujeita a um deslocamento $\bar{u}_y=0.20\text{mm}$.

Neste exemplo, os diagramas de tensões e de dano correspondem a um plano de equação $x=0.5\text{m}$ e as figuras tridimensionais de tensões evidenciam a face encastrada da estrutura.

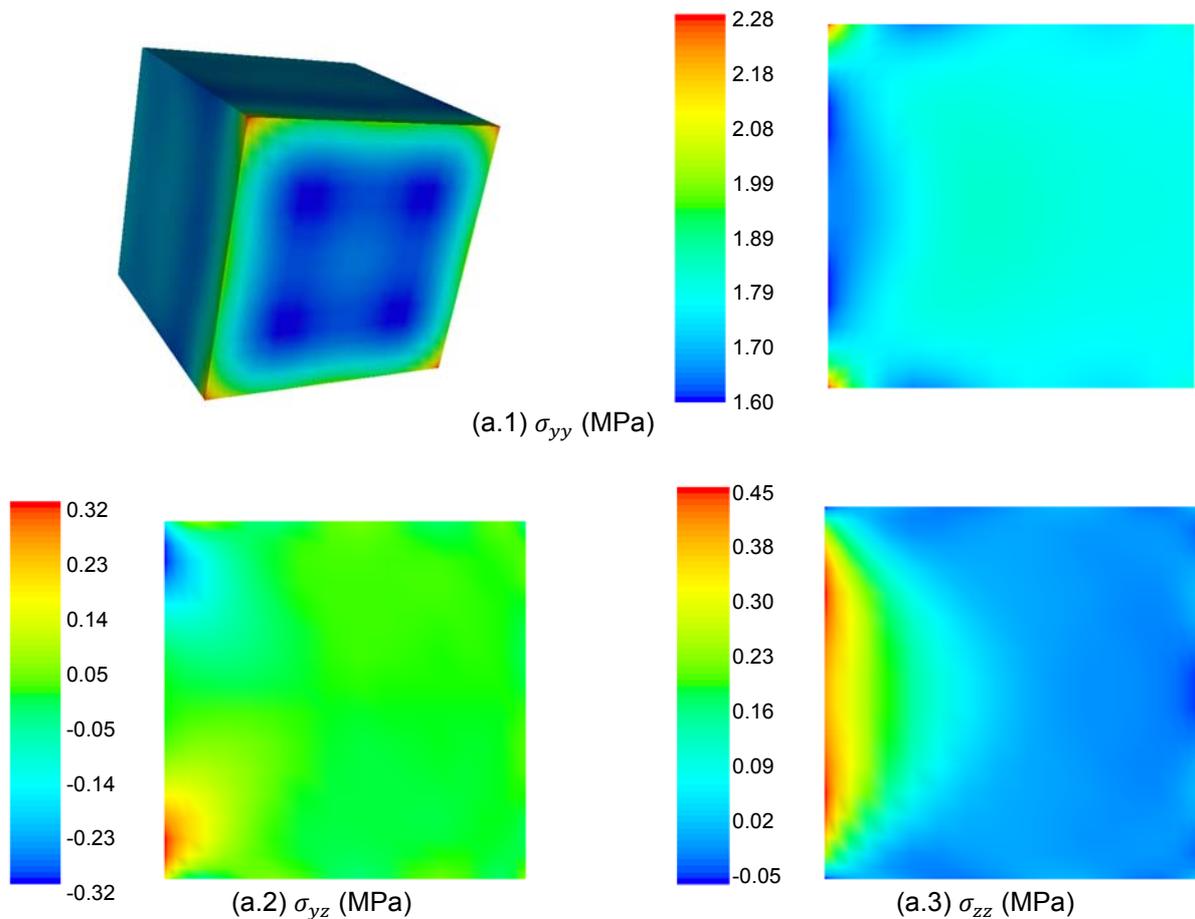


Figura 6.20 – Exemplo 3: distribuição de tensões em regime linear para $\bar{u}_y=0.06\text{mm}$ (plano $x=0.5\text{m}$).

Analisando a Figura (6.20), particularmente a perspectiva tridimensional, constata-se que as tensões σ_{yy} mais elevadas ocorrem nos quatro vértices da face encastrada. Assim sendo, é expectável que o processo de fendilhação se inicie nesta zona. Portanto, ambos os modelos de dano devem reproduzir essa situação.

De seguida, apresentam-se os diagramas de tensões efectivas em estado fendilhado para o deslocamento $\bar{u}_y=0.2\text{mm}$ segundo os dois modelos de dano adoptados. Dado que a distribuição de tensões efectivas para os vários comprimentos característicos adoptados nesta análise é muito semelhante, indicam-se os diagramas correspondentes a um comprimento característico $l = 0.10\text{m}$ e na Tabela (6.6) apresentam-se os valores máximos e mínimos de tensões verificados na estrutura para os vários valores de l .

A distribuição de tensões efectivas é significativamente diferente nos modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (ver Figuras (6.21.a) e (6.21.b)). De acordo com o primeiro modelo, registam-se tensões elevadas na face encastrada, enquanto no segundo estas ocorrem na secção onde se prescreve o deslocamento. Verifica-se, portanto, que nesta estrutura exemplo a representação do processo de fendilhação depende do modelo de dano adoptado e nomeadamente dos parâmetros do material que não foram calibrados neste trabalho.

Da análise dos valores indicados na Tabela (6.6) constata-se que as tensões efectivas aumentam com a diminuição do parâmetro l , verificando-se o exposto na Secção (3.6). Como a tensão efectiva num determinado ponto da estrutura é determinada ponderando espacialmente os valores de tensão efectiva nos pontos de Lobatto vizinhos, aqueles que se encontrarem localizados a uma distância igual a l assumem maior “peso” face aos restantes. Contudo, a correcta definição deste parâmetro está relacionada com a largura da ZPF, a qual deve conter 2 ou 3 pontos de controlo durante o processo de fendilhação de modo a que o modelo seja efectivamente não local e os problemas de localização de deformações e dependência da malha não se relevem influentes.

		$l = 0.05\text{m}$	$l = 0.10\text{m}$	$l = 0.20\text{m}$
Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	$\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)	[1.43 ; 34.00]	[2.41 ; 19.30]	[4.50 ; 10.30]
	$\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)	[-6.18 ; 6.18]	[-2.87 ; 2.87]	[-1.45 ; 1.45]
	$\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)	[-5.34 ; 8.51]	[-1.43 ; 4.23]	[-0.24 ; 2.08]
Modelo de dano de [Mazars, 1984]	$\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)	[1.69 ; 26.30]	[2.14 ; 16.50]	[4.09 ; 7.20]
	$\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)	[-1.04 ; 1.04]	[-0.41 ; 0.41]	[-0.83 ; 0.83]
	$\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)	[-2.39 ; 3.57]	[-0.49 ; 1.24]	[-0.12 ; 1.16]

Tabela 6.6 – Exemplo 3: quadro resumo das tensões efectivas relevantes para $\bar{u}_y=0.20\text{m}$ obtidas segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico (plano $x=0.5\text{m}$).

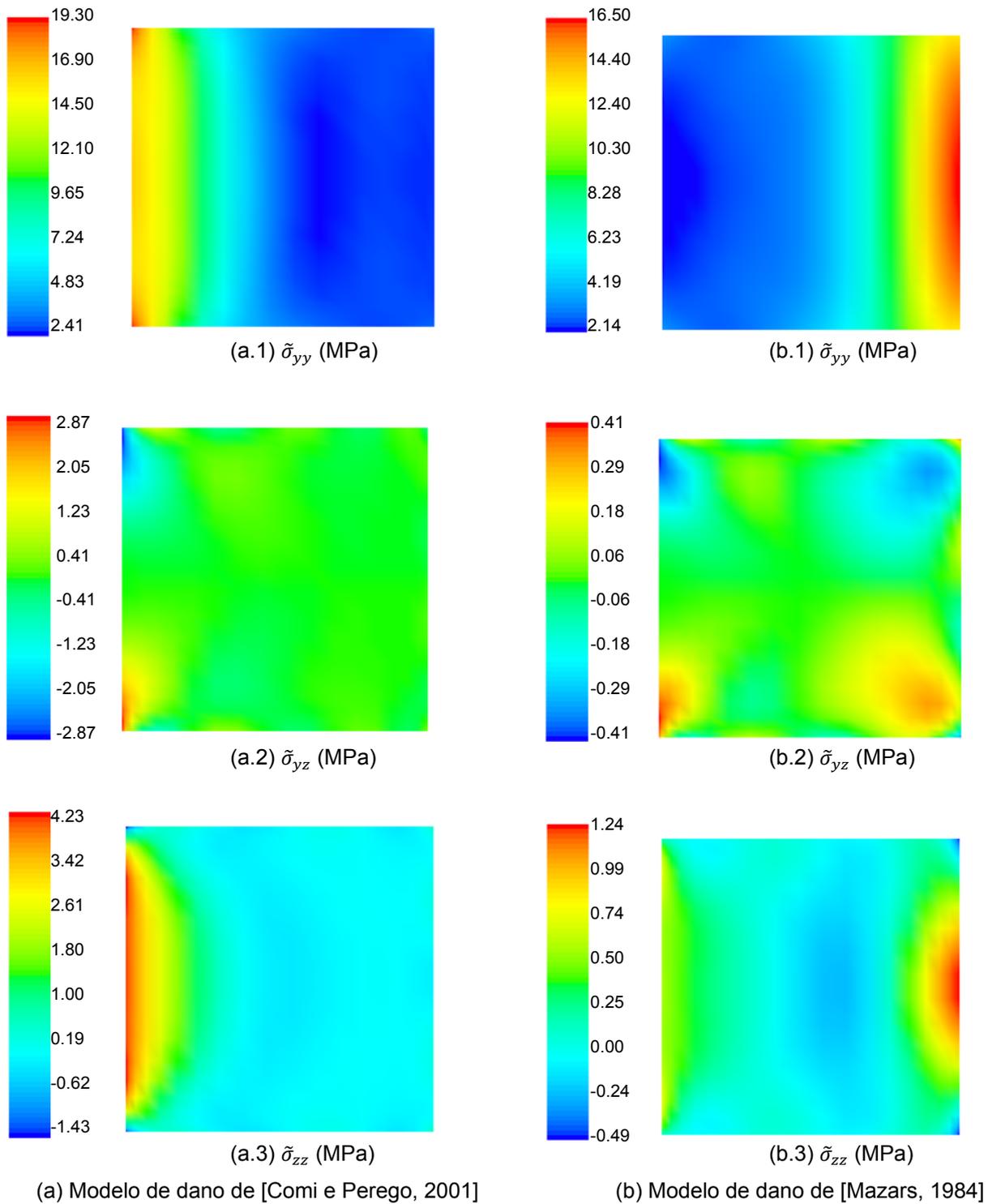


Figura 6.21 – Exemplo 3: distribuição de tensões em regime não linear para $\bar{u}_y=0.20\text{mm}$ e $l = 0.10\text{m}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] (plano $x=0.5\text{m}$).

A influência do comprimento característico é perceptível através dos diagramas de distribuição de dano que se apresentam de seguida (Figuras (6.22), (6.23) e (6.24)). Consideram-se os modelos de

dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] com vista a avaliar qual o mais sensível a este parâmetro.

As próximas figuras evidenciam a face encastrada de modo a possibilitar a visualização da formação das primeiras fendas na estrutura segundo cada um dos modelos de dano e em função do comprimento característico. Na Tabela (6.7) apresenta-se o valor do deslocamento correspondente ao início da fendilhação em função do comprimento característico. Para o mesmo parâmetro l , a fase em que surge dano na estrutura depende do modelo de dano considerado na análise.

A localização das tensões efectivas mais significativas depende do modelo de dano considerado em consequência da variável não local considerada no processo de regularização não ser a mesma em cada modelo. Contudo, verifica-se que, independente do modelo de dano adoptado, o início do processo de fendilhação ocorre nos quatro cantos da estrutura adjacentes à zona de encastramento quando $l = 0.05\text{m}$ ou $l = 0.10\text{m}$. Para um comprimento característico de 0.20m , a localização das primeiras fendas importantes depende do modelo de dano considerado na análise (ver Figura (6.22)). Este parâmetro influencia também o valor do deslocamento para o qual se verifica o dano inicial. Quanto maior for aquele parâmetro, o processo de danificação do material ocorre numa fase mais avançada do carregamento.

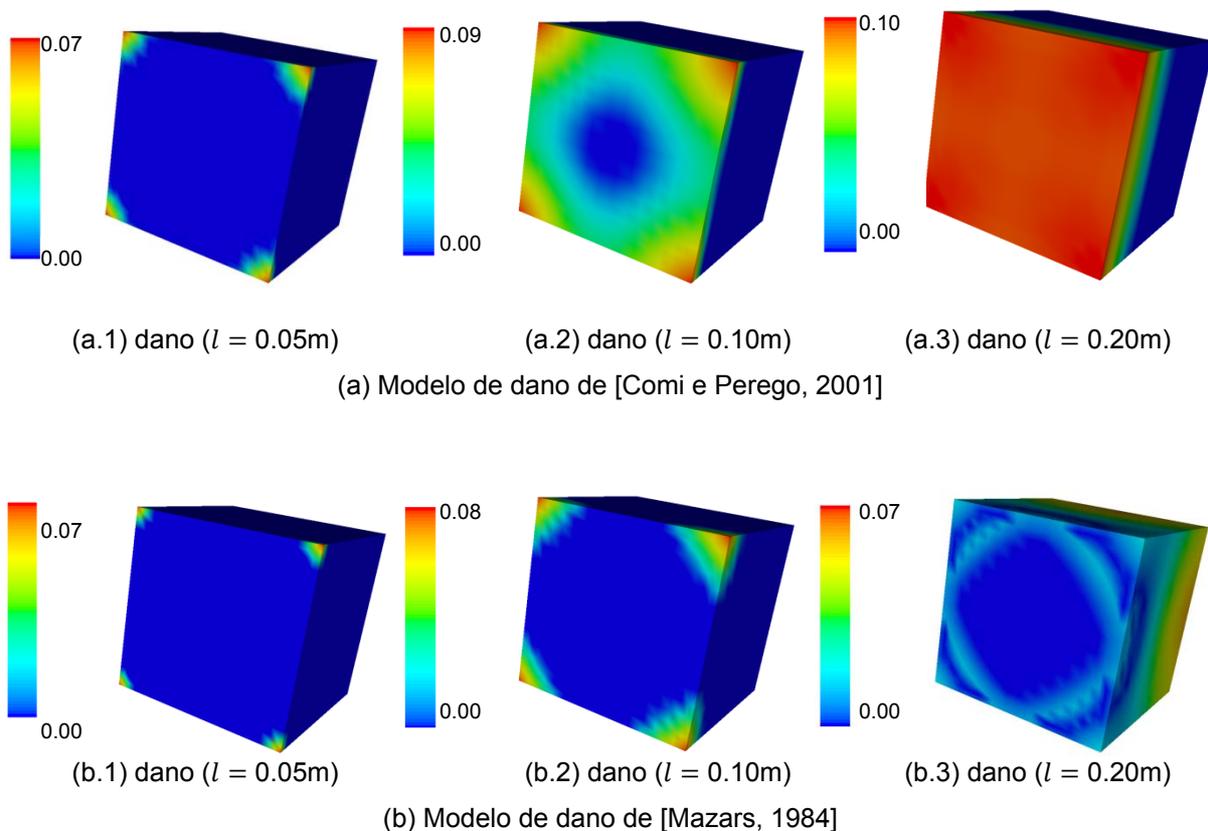


Figura 6.22 – Exemplo 3: distribuição do dano no início da fendilhação segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico.

		$l = 0.05m$	$l = 0.10m$	$l = 0.20m$
Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	\bar{u}_y (mm)	0.096	0.108	0.116
Modelo de dano de [Mazars, 1984]	\bar{u}_y (mm)	0.080	0.092	0.096

Tabela 6.7 – Exemplo 3: quadro resumo dos valores de \bar{u}_y correspondentes ao início da fendilhação segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984], em função do comprimento característico (plano $x=0.5m$).

A evolução do dano segundo os modelos de [Comi e Perego, 2001] e [Mazars, 1984] para $l = 0.05m$, $l = 0.10m$ e $l = 0.2m$ é ilustrada nas Figuras (6.23) e (6.24). Os diagramas correspondem a um corte na estrutura segundo um plano de equação $x=0.5m$ e evidenciam a configuração deformada.

A modelação da resposta não linear do material desta estrutura exemplo através dos modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] conduz a resultados díspares, nomeadamente na evolução da fendilhação. Apesar destes modelos de dano traduzirem de forma semelhante o início da danificação do material, excepto quando o comprimento característico é igual a $0.20m$, a coalescência das fissuras ocorre em zonas distintas da estrutura. No entanto, os valores de dano são muito semelhantes.

Segundo o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001], a fendilhação evolui sempre no mesmo sentido (da secção encastrada para a secção de deslocamento imposto), conduzindo à perda significativa da rigidez elástica do material essencialmente na zona adjacente à secção encastrada. Por outro lado, o modelo de dano de [Mazars, 1984] reproduz a degradação do material essencialmente junto à face em que ocorre o assentamento de apoio.

Relativamente à influência do comprimento característico, verifica-se que um valor muito pequeno deste parâmetro pode não traduzir de forma realista o comportamento das estruturas de betão simples e particularmente da estrutura analisada nesta secção. Nesta situação, a influência da localização das deformações na modelação da fendilhação pode ser significativa, na medida em que o material apresenta um estado de danificação avançado numa faixa bastante restrita. Assim, para esta estrutura, o método de regularização adoptado neste trabalho pode não ser totalmente eficaz para valores da ordem de grandeza de $0.05m$.

Contudo, ao considerar o comprimento característico igual a $0.20m$ a localização do dano inicial difere nos dois modelos de dano adoptados. No início do processo de danificação, o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] reproduz uma fendilhação praticamente uniforme na secção encastrada para $l = 0.20m$, enquanto para os restantes valores de l esta encontra-se essencialmente confinada aos cantos da mesma secção. No modelo de dano de [Mazars, 1984], esta diferença é mais notória e significativa no sentido em que, para $l = 0.20m$, a fendilhação relevante encontra-se localizada na secção de deslocamento prescrito. Para além disso, ambos os modelos de dano reproduzem um estado de danificação generalizado a toda a estrutura quando se adopta $l = 0.20m$.

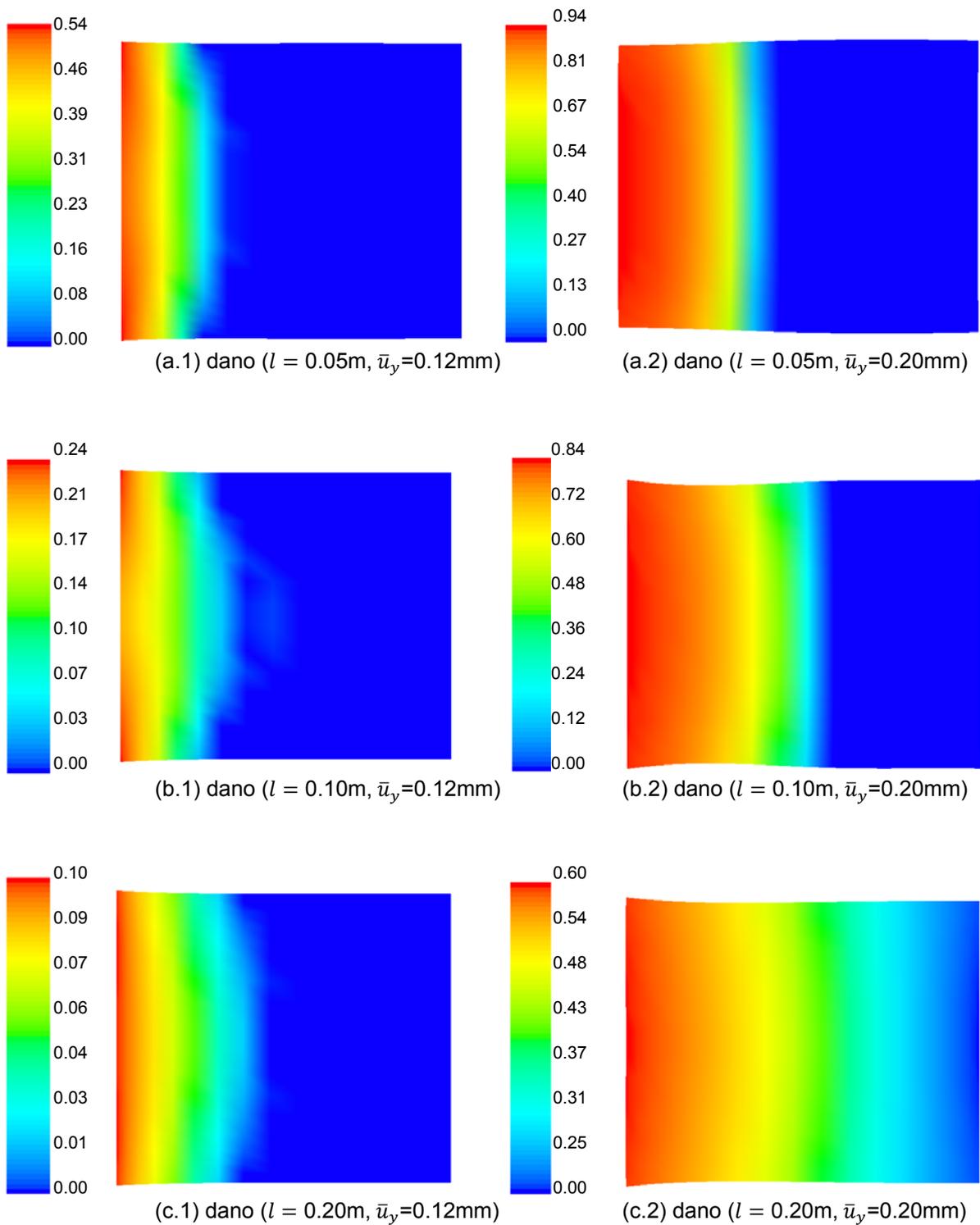


Figura 6.23 – Exemplo 3: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] em função do comprimento característico (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 1000).

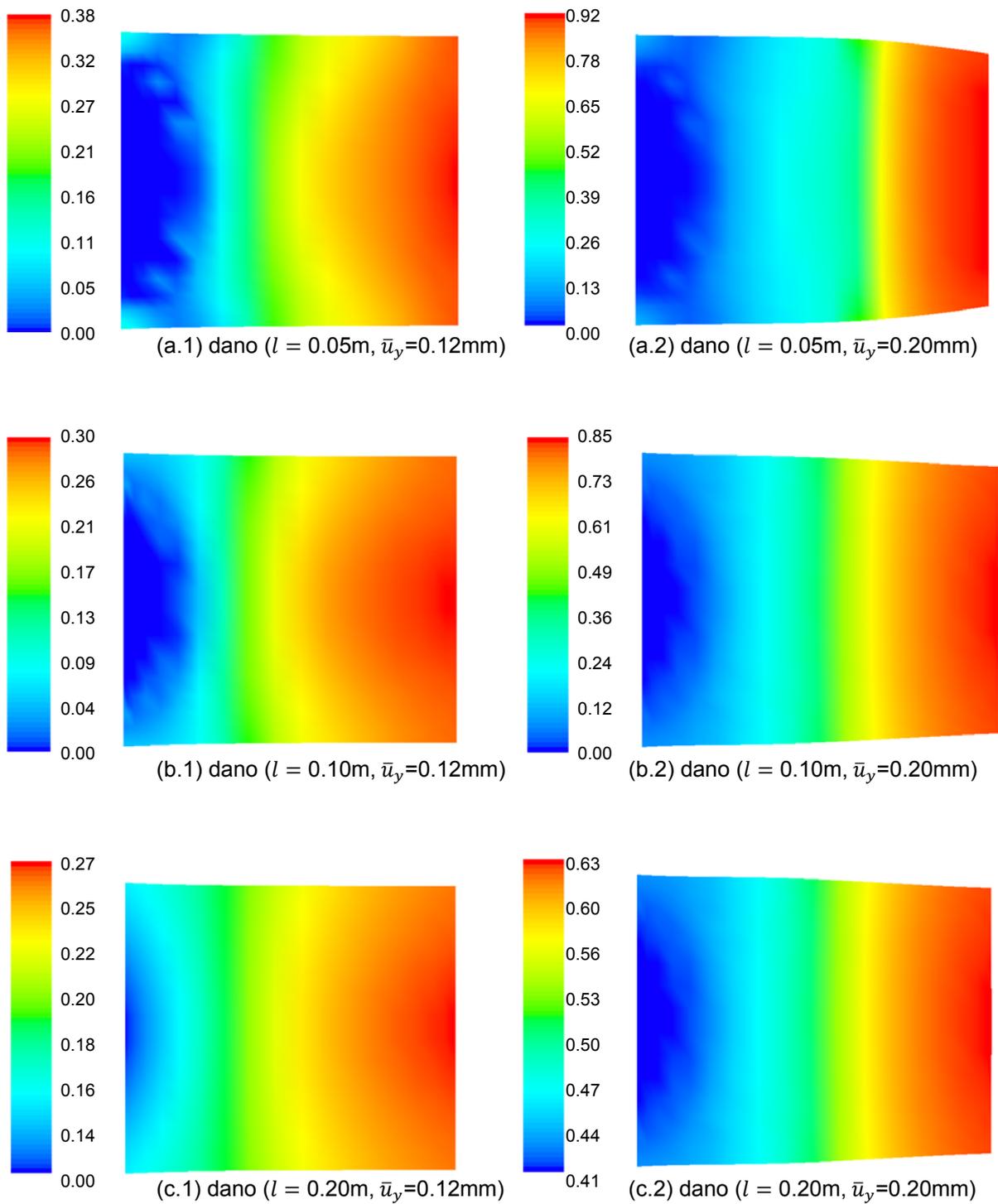


Figura 6.24 – Exemplo 3: evolução do dano segundo o modelo de [Mazars, 1984] em função do comprimento característico (configuração deformada no plano $x=0.5\text{m}$ com um factor de escala de 1000).

Portanto, verifica-se efectivamente a influência do comprimento característico na modelação da resposta não linear do material, quer no desenvolvimento e distribuição da fendilhação, quer nos valores de dano registados. Face ao exposto anteriormente, um comprimento característico de 0.01m permite obter resultados mais consensuais para a estrutura analisada.

Outro aspecto importante a reter está relacionado com os valores máximos de dano registados em ambos os modelos de dano e, principalmente, quando $l = 0.05m$ e $l = 0.10m$. Nestes casos, o valor de dano é muito próximo de 1, pelo que, de acordo com o referido na Secção (3.7), um modelo de dano contínuo não reproduz a descontinuidade do campo de deslocamentos, devendo ser adoptado um modelo discreto num estado de degradação avançado.

6.3.4 Exemplo 4 – Estrutura em L

Por último, analisa-se uma estrutura tridimensional com geometria em L, com uma face totalmente encastrada e outra sujeita a um deslocamento vertical prescrito, conforme ilustrado na (Figura (6.25)), que pretende representar um assentamento de apoio. Apesar de se verificarem extensões de compressão e tracção nesta estrutura exemplo, são as elevadas extensões de tracção na zona reentrante da estrutura que determinam o processo de fendilhação na estrutura.

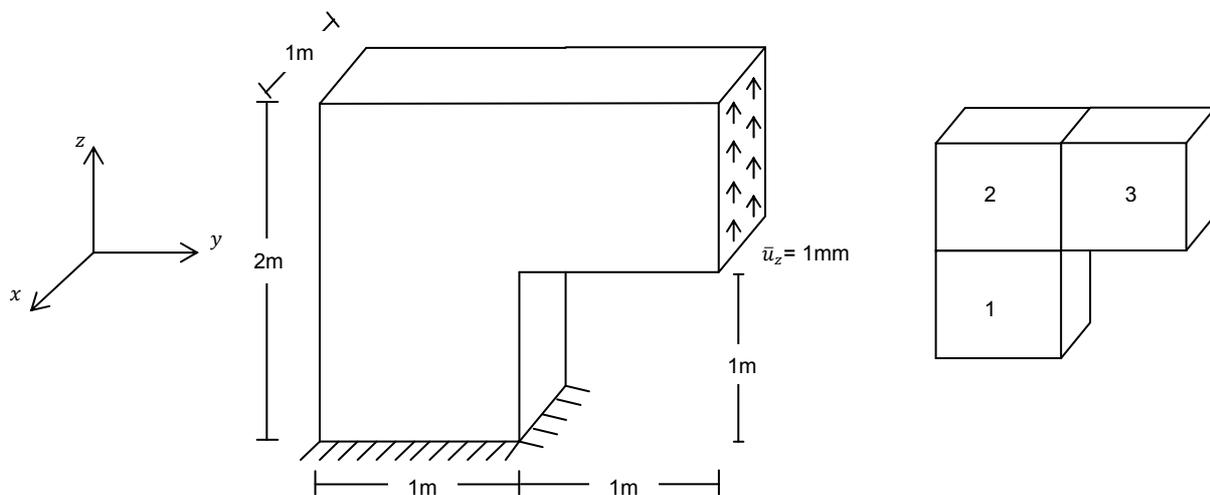


Figura 6.25 – Exemplo 4: geometria do problema, acção exterior e malha de elementos finitos.

Recorre-se a este exemplo para comparar as soluções da formulação HMT quando se procede a um refinamento tipo- p . Deste modo, realizaram-se os testes indicados na Tabela (6.8) considerando um comprimento característico $l = 0.1m$ e os parâmetros do material indicados na Tabela (6.3). Utiliza-se uma malha de $(20 \times 20 \times 20)$ pontos de integração de Lobatto por elemento finito.

Teste	A	B	C
N.º Elem.	3	3	3
n_{S_v}	4	5	6
n_{U_v}	3	4	5
n_{U_y}	2	3	4
N_{gdl}	3222	5717	9218

Tabela 6.8 – Exemplo 4: testes numéricos de refinamento tipo- p .

Numa primeira análise, verifica-se que o cálculo da solução final no teste C exige um tempo de CPU bastante significativo quando comparado com o dos restantes testes numéricos, principalmente a partir do instante em que surge dano na estrutura em resultado do elevado número de termos não nulos da matriz global do sistema.

A estrutura que se pretende analisar apresenta uma acentuada concentração de tensões na singularidade que a caracteriza. Pretende-se com este exemplo mostrar que, para uma malha de elementos finitos pouco refinada, um refinamento tipo- p elevado pode não ser o procedimento de análise mais indicado, especialmente devido à diminuição do índice de esparsidade que conduz a maiores tempos de cálculo. Portanto, é preferível discretizar esta estrutura num maior número de elementos finitos e diminuir o grau máximo das funções de aproximação.

A análise dos diagramas de tensões em regime elástico linear (Figura (6.26)) permite ter uma percepção do aumento da qualidade estática da solução quando se procede a um refinamento tipo- p , nomeadamente os testes B e C que diferem significativamente no esforço computacional associado. Não se apresentam resultados do teste A em regime elástico linear visto que, neste caso, a solução do teste B é claramente melhor e com tempos de CPU muito semelhantes.

Assim, apresenta-se a distribuição de tensões em regime elástico linear para os testes B e C com vista a avaliar o ganho de qualidade na aproximação da solução (ver Figura (6.26)). Os diagramas ilustram as distribuições de tensões relevantes quando se verifica um deslocamento na estrutura de 0.50mm e correspondem a um plano de equação $x=0.5m$.

A distribuição de tensões em regime linear é muito semelhante nos testes B e C (Figura (6.26)) e, como esperado, o teste numérico C conduz a maiores valores de tensões. No entanto, o teste B permite obter uma distribuição de tensões em regime linear bastante satisfatória, com resultados numéricos muito idênticos aos do teste C e com menor esforço computacional.

De acordo com os resultados da Figura (6.26), ocorre a concentração de tensões de tracção na zona reentrante da estrutura e também de tensões de tracção σ_{zz} na face da estrutura pertencente ao plano $y=1m$. Portanto, espera-se que os modelos de dano adoptados reproduzam o início da danificação do material na zona de singularidade e a evolução da fendilhação desta zona para a

secção encastrada. Apesar de se registarem tensões de compressão, estas assumem pouca importância no processo de danificação.

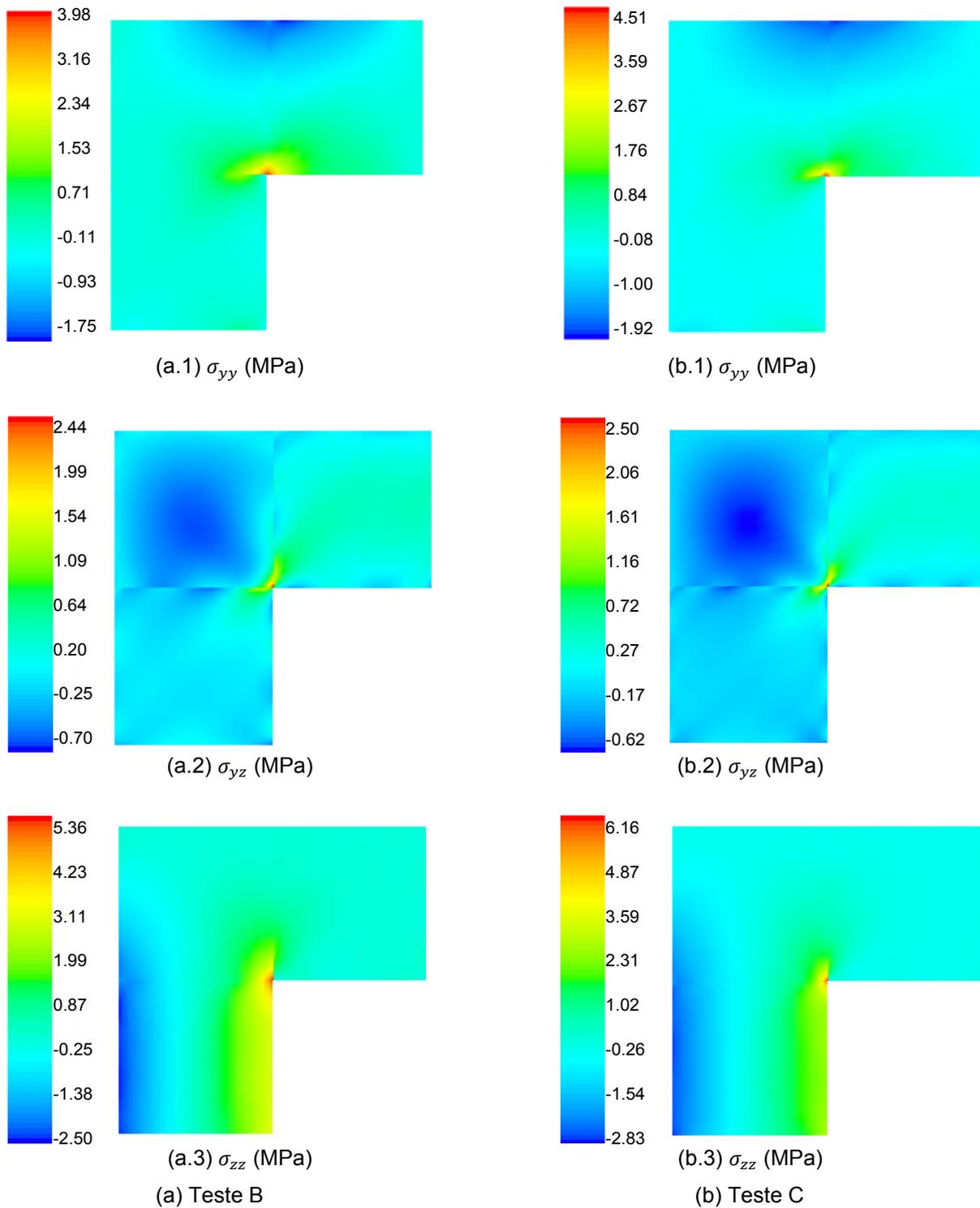


Figura 6.26 – Exemplo 4: distribuição de tensões em regime linear para $\bar{u}_z=0.50\text{mm}$ obtida nos testes numéricos B e C (plano $x=0.5\text{m}$).

Os diagramas de tensões efectivas obtidos nos testes numéricos A, B e C apresentam uma distribuição muito semelhante, diferindo principalmente na amplitude dos valores e na continuidade do campo de tensões efectivas no domínio, analogamente ao verificado para a distribuição de tensões em regime elástico. Assim, apenas se apresentam os diagramas de tensões efectivas para $\bar{u}_z=1.00\text{mm}$ obtidos no teste B segundo os dois modelos de dano e na Tabela (6.9) indicam-se os valores máximos e mínimos das tensões efectivas obtidos nos testes numéricos A, B e C.

		$\tilde{\sigma}_{yy}$ (MPa)	$\tilde{\sigma}_{yz}$ (MPa)	$\tilde{\sigma}_{zz}$ (MPa)
Teste A	Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	[-3.68 ; 13,60]	[-1.15 ; 11.40]	[-6.04 ; 20.50]
	Modelo de dano de [Mazars, 1984]	[-3.48 ; 8.37]	[-1.01 , 6.17]	[-5.78 , 12.70]
Teste B	Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	[-3.21 ; 14.40]	[-2.23; 11.40]	[-4.98 ; 20.00]
	Modelo de dano de [Mazars, 1984]	[-2.83 ; 9.25]	[-1.35 ; 6.30]	[-4.80 , 13.10]
Teste C	Modelo de dano de [Comi e Perego, 2001]	[-3.38 ; 16.00]	[-1.49; 11.70]	[-5.20 ; 23.30]
	Modelo de dano de [Mazars, 1984]	[-2.94 ; 10.10]	[-1.01 ; 6.41]	[-5.00 , 14.90]

Tabela 6.9 – Exemplo 4: quadro resumo dos valores máximos e mínimos de tensões efectivas para $\bar{u}_z=1.00\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtidos nos testes A,B e C (plano $x=0.5\text{m}$).

O modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] traduz maiores tensões efectivas que o modelo de dano de [Mazars, 1984]. Para além disso, o primeiro modelo conduz à concentração das tensões $\tilde{\sigma}_{zz}$ na zona reentrante da estrutura (Figura (6.27.a.3)), enquanto o segundo modelo reproduz também tensões significativas na face da estrutura pertencente ao plano $y=1\text{m}$ (Figura (6.27.b.3)). Assim sendo, a evolução do dano segundo estes dois modelos é diferente.

Apesar do teste C corresponder a uma solução de melhor qualidade estática comparativamente com o teste B, a semelhança de resultados numéricos e da distribuição de tensões efectivas entre os dois modelos permite afirmar que o ganho relacionado com a obtenção de uma solução mais equilibrada não compensa o esforço computacional que o teste C traduz devido ao baixo índice de esparsidade.

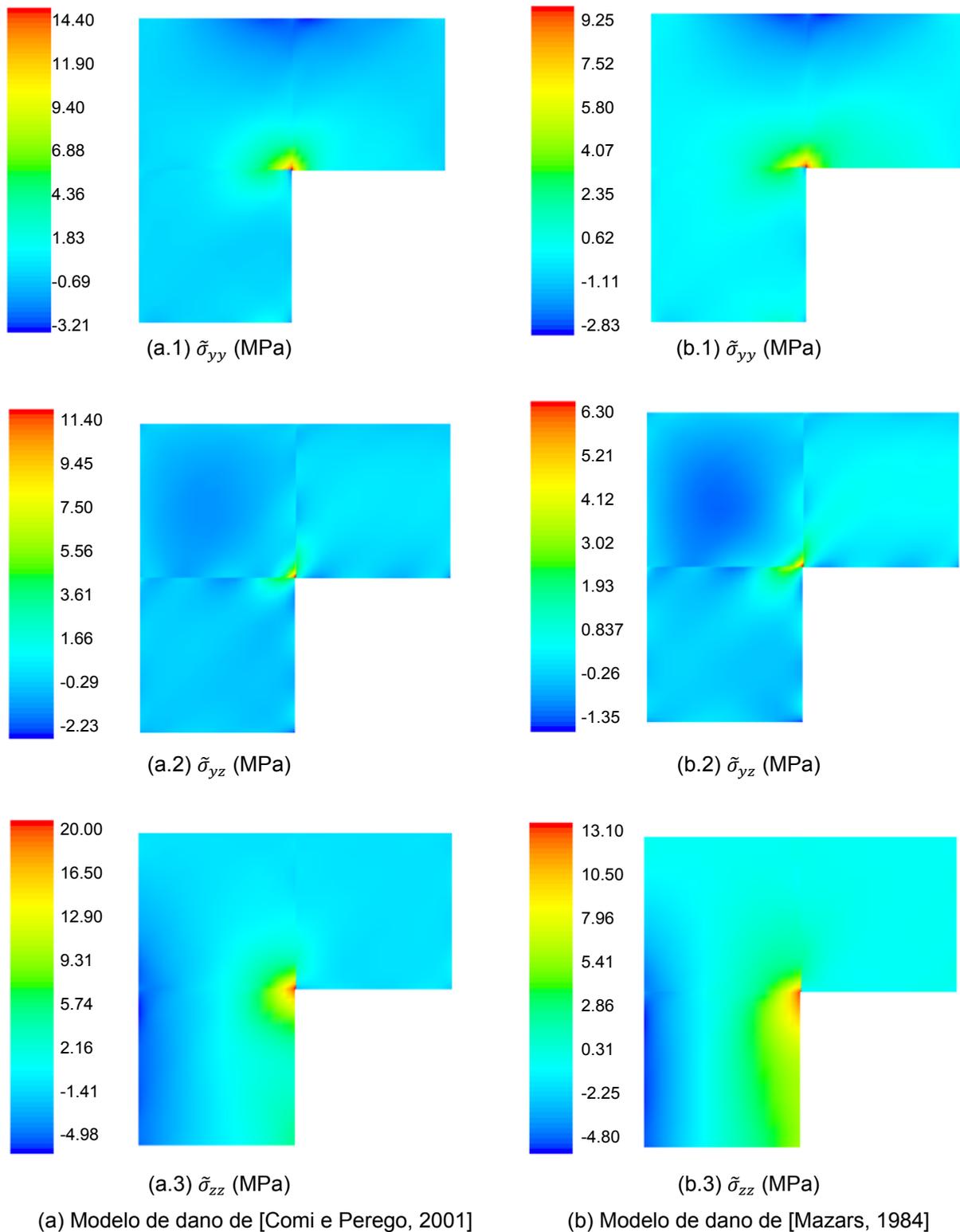


Figura 6.27 – Exemplo 4: distribuição de tensões efectivas em regime não linear para $\bar{u}_z=1.00\text{mm}$ segundo os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] obtida no teste B (plano $x=0.5\text{m}$).

A evolução do dano na estrutura segundo os dois modelos de dano adoptados obtida nos testes numéricos A, B e C encontra-se ilustrada nas Figuras (6.28) e (6.29), em que se pretende evidenciar a configuração deformada da estrutura.

Os modelos de dano de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] modelam o desenvolvimento da fendilhação de uma forma um pouco diferente (ver Figuras (6.28) e (6.29)), mas ambos traduzem um elevado estado de danificação na zona reentrante da estrutura. Segundo o primeiro modelo de dano, a evolução da fendilhação ocorre essencialmente nessa zona da estrutura e na qual se verifica a coalescência da fissuração. Por outro lado, o modelo de dano de [Mazars, 1984] representa também a perda de integridade do material na faixa compreendida entre a singularidade da estrutura e a secção de apoio. O início da danificação do material ocorre para um deslocamento de 0.525mm em ambos os modelos.

Os dois modelos de dano considerados neste trabalho permitem reproduzir o processo de fendilhação na zona de maiores extensões de tracção, sendo que nessa zona da estrutura o modelo de dano de [Mazars, 1984] conduz a um menor valor de dano. Assim, a calibração dos parâmetros do material associados a cada modelo com base em resultados experimentais permitirá que os modelos de [Comi e Perego, 2001] e de [Mazars, 1984] descrevam o fenómeno de fendilhação de forma idêntica, não sendo igual devido ao facto de o método de regularização considerar variáveis não locais diferentes em cada um deles.

Relativamente aos testes numéricos realizados, constata-se que o refinamento tipo- p permite obter uma solução final de melhor qualidade estática sendo possível, no limite, verificar o equilíbrio localmente.

Apesar dos testes numéricos A, B e C conduzirem a valores de dano na estrutura muito idênticos para o mesmo modelo de dano, existem algumas diferenças pontuais, nomeadamente no modelo de dano de [Comi e Perego, 2001] em que os testes A e B apresentam valores de dano muito idênticos mas distribuições um pouco diferentes. Verifica-se que o teste B conduz a uma distribuição de dano mais plausível que a obtida no teste A, na medida em que este último teste reproduz dano na zona compreendida entre a singularidade e o apoio, contrariamente aos resultados dos testes B e C. No entanto, a distribuição de dano obtida nos testes B e C é semelhante, sendo o valor máximo de dano ligeiramente superior no teste C. No modelo de dano de [Mazars, 1984], a distribuição de dano é idêntica nos três testes e o aumento da qualidade estática da solução traduz-se num pequeno aumento do valor máximo de dano.

Portanto, o refinamento tipo- p traduzido pelo teste C não parece ser vantajoso face ao teste B, uma vez que a melhoria da qualidade da solução não compensa o esforço computacional exigido por pelo primeiro teste. Por outro lado, o grau máximo das funções de aproximação considerado no teste A é insuficiente na medida em que não garante uma solução estática satisfatória e, em última análise, reproduz a degradação do material em zonas da estrutura onde esta não ocorre (comparar Figuras (6.28.a.2), (6.28.b.2) e (6.28.c.2)).

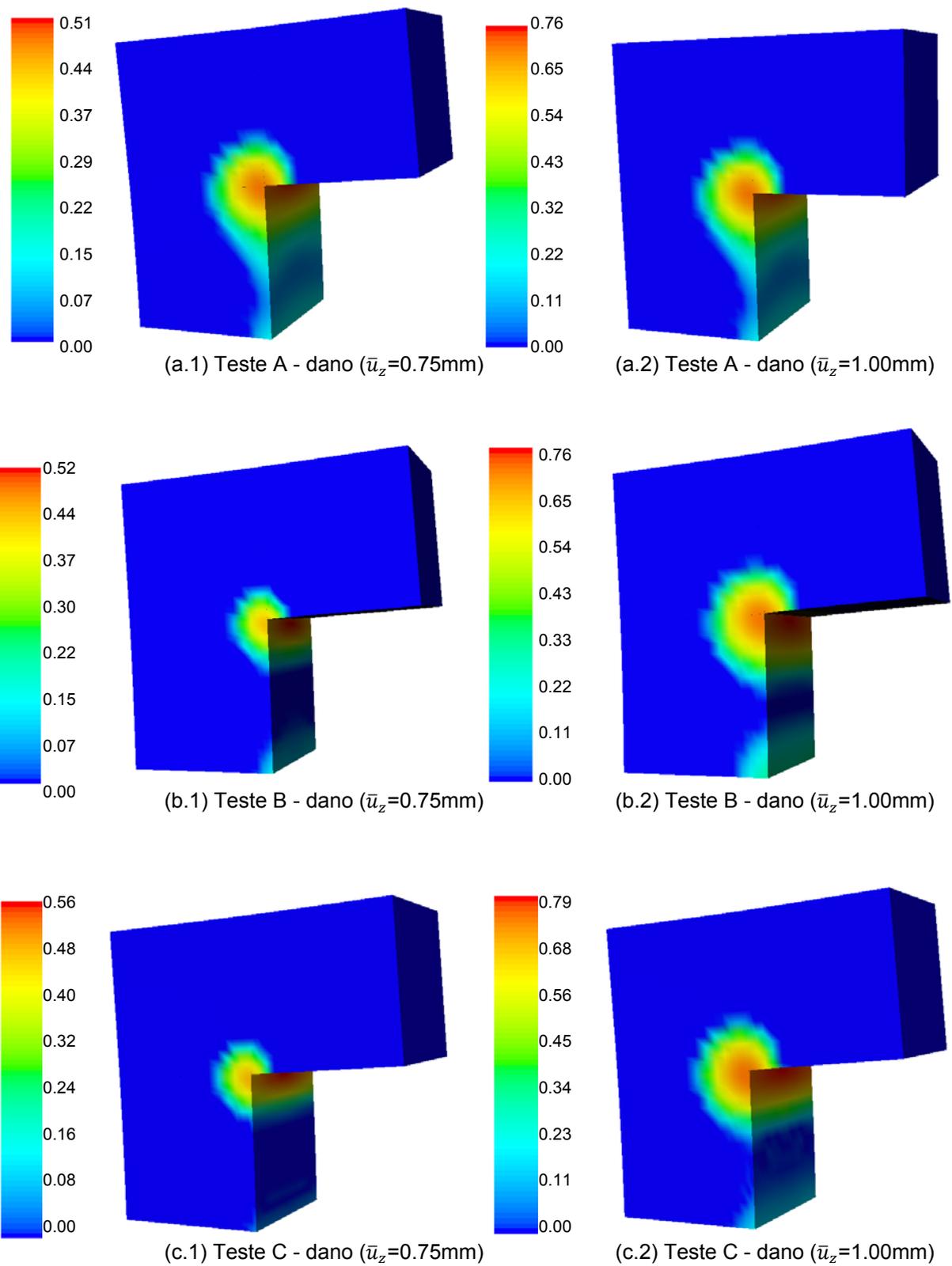


Figura 6.28 – Exemplo 4: evolução do dano segundo o modelo de [Comi e Perego, 2001] obtida nos testes numéricos A, B e C (configuração deformada com um factor de escala de 100).

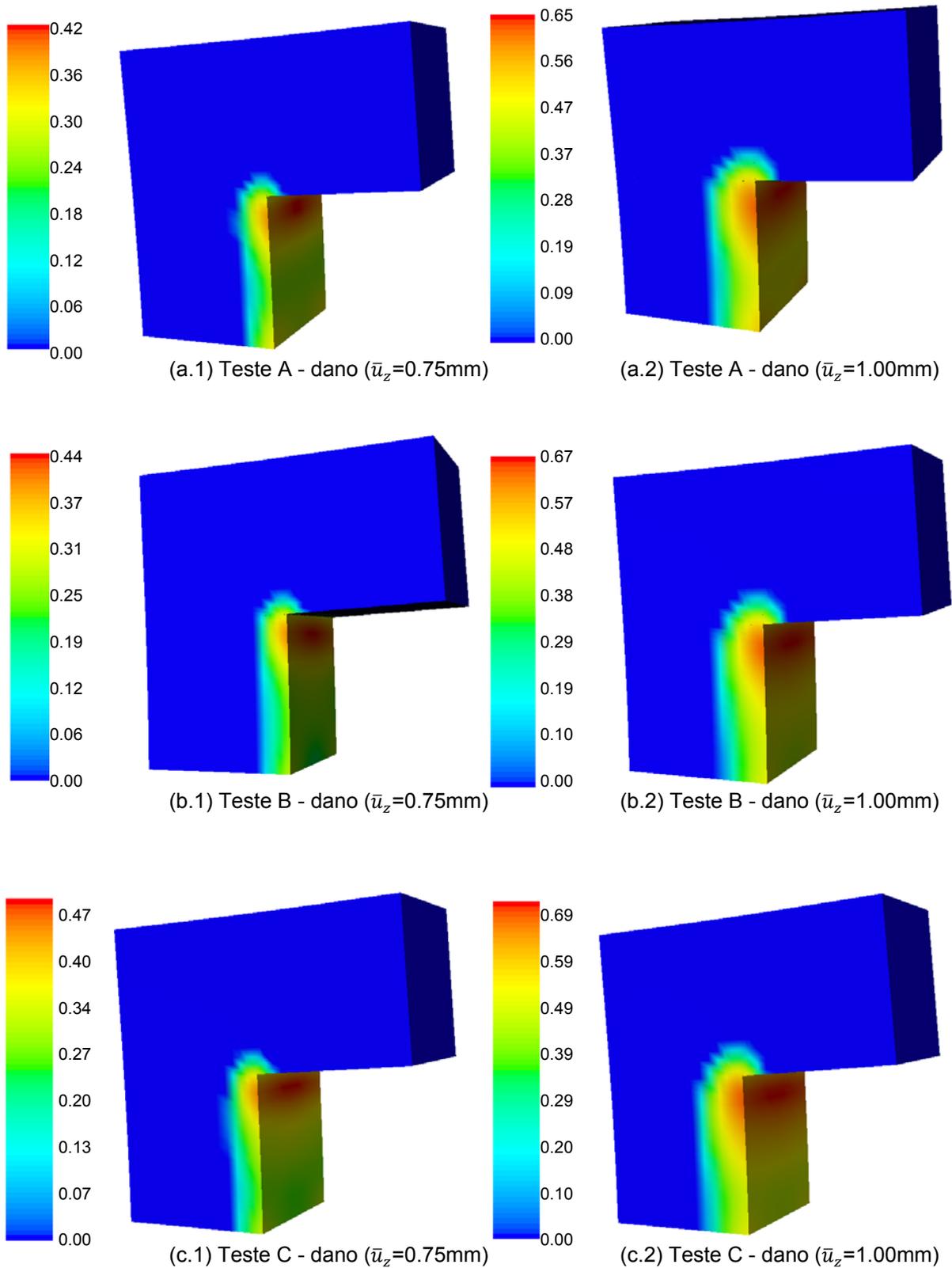


Figura 6.29 – Exemplo 4: evolução do dano segundo o modelo de [Mazars, 1984] obtida nos testes numéricos A, B e C (configuração deformada com um factor de escala de 100).

CAPÍTULO 7

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 Conclusões

No dimensionamento de estruturas deve ser adoptada uma correcta modelação do comportamento mecânico do material. No caso de materiais *quasi-frágeis* como o betão, os fenómenos de fendilhação assumem especial importância na medida em que permitem justificar algumas das propriedades verificadas experimentalmente, nomeadamente, o comportamento global com amolecimento, a degradação da rigidez elástica, a anisotropia e o aparecimento de deformações plásticas. A adopção de modelos constitutivos da Mecânica do Dano Contínuo possibilita a análise da evolução destas propriedades e a consideração de uma resposta não linear do material.

Neste trabalho estudou-se o desempenho e adequabilidade de uma formulação não convencional de elementos finitos, nomeadamente a formulação híbrida-mista de tensão que privilegia a qualidade do campo estático, em conjunto com modelos de dano contínuo na modelação do comportamento mecânico de estruturas de betão simples.

No contexto da formulação não convencional de elementos finitos adoptada neste trabalho, verifica-se:

- A formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas goza das vantagens das formulações não convencionais de elementos finitos já descritas no Capítulo 4;
- A resolução directa do sistema governativo em regime não linear conduz a problemas de mau condicionamento, que podem ser resolvidos à custa de uma solução com menor qualidade na aproximação do campo de deslocamentos na fronteira estática. Se o sistema for resolvido de forma iterativa, o mau condicionamento não se revela influente nos resultados, sendo possível obter uma solução mais equilibrada que a anterior, mas, regra geral, com maiores tempos de cálculo;
- Nos modelos híbridos-mistos de tensão, a obtenção de uma solução com qualidade em termos de distribuição do campo de tensões e de deslocamentos conduz geralmente à consideração de um elevado número de graus de liberdade. No entanto, a utilização dos polinómios ortonormais de Legendre permite obter um elevado índice de esparsidade dos sistemas governativos. Armazenando apenas os coeficientes não nulos, verificam-se ganhos computacionais, nomeadamente no tempo de cálculo, estratégia que torna o modelo mais competitivo;
- Os refinamentos do tipo- p e $-h$ mostram-se bastante eficazes. Um refinamento tipo- p demasiadamente elevado pode traduzir um significativo custo computacional quando comparado com um refinamento do tipo- h .

No contexto de modelos de dano contínuo salienta-se:

- A formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas conduz a modelos numéricos estáveis e robustos;
- A formulação HMT com aproximação de tensões efectivas conjugada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001] é adequada a estruturas de betão simples cuja rotura esteja associada a fenómenos de fendilhação devidos essencialmente a extensões de tracção;
- A formulação HMT com aproximação de tensões efectivas conjugada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] é adequada a estruturas de betão simples cuja rotura esteja associada a fenómenos de fendilhação devidos quer a extensões de tracção quer a extensões de compressão. Para além disso, este modelo revelou-se promissor ao recuperar os fenómenos verificados experimentalmente;
- Os campos de esforços podem ser *quasi*-equilibrados, pelo que a estimativa da carga máxima encontra-se do lado da segurança;
- O comprimento característico corresponde ao parâmetro que controla a “abertura” da função de ponderação não local. Portanto, o modelo consegue reproduzir a evolução da fendilhação se existirem 2 a 3 pontos de controlo na ZPF;
- Os pontos de integração consideravelmente afastados do ponto de cálculo em questão são pouco influentes. De facto, segundo [Bazant e Lin, 1988] os pontos de integração com uma distância superior a $2l$ podem ser omitidos no cálculo das grandezas não-locais.

7.2 Desenvolvimentos Futuros

De acordo com o apresentado na Secção (3.7), a correcta modelação do comportamento mecânico do betão deve considerar o aparecimento de deformações irreversíveis e a evolução da fendilhação difusa para a formação da fenda discreta. Um modelo constitutivo que assuma um meio contínuo durante todo o processo de danificação do material e, especialmente, num estado mais avançado de degradação nem sempre conduz à descrição mais realista do comportamento do betão. Assim sendo, poderá ser considerada uma análise contínua com deformações permanentes até determinado estado de degradação e, seguidamente, adoptar um modelo discreto que assuma uma descontinuidade no campo de deslocamentos [Comi et al, 2002].

Os restantes desenvolvimentos futuros passam pelo aperfeiçoamento das técnicas utilizadas neste trabalho, nomeadamente:

- Proceder à calibração dos modelos de dano utilizados;
- Possibilidade de considerar um refinamento tipo- p localizado apenas nas zonas da estrutura mais relevantes;
- Determinar de forma consistente a melhor relação entre graus das funções de aproximação;
- Melhorar o desempenho numérico dos modelos explorando o potencial de um processamento em paralelo;

- Proceder à generalização dos modelos numéricos para estruturas tridimensionais de geometria genérica;
- Incorporar informação para a análise de estruturas de betão armado;
- Possibilidade de considerar modelos de dano ortotrópicos;
- Proceder à generalização dos modelos numéricos para análises cíclicas;
- Aplicar as técnicas numéricas desenvolvidas na análise de estruturas construídas com outros materiais que apresentem ramo de amolecimento.

REFERÊNCIAS

- [Alfaiate, 1992] Alfaiate, J. M. V. (1992). *Estudo e modelação do comportamento do betão fissurado*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Almeida, 1991] Almeida, J. P. M. (1991). *Modelos de elementos finitos para a análise elastoplástica*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Arantes e Oliveira, 1999] Arantes e Oliveira, E. R. (1999). *Elementos da Teoria da Elasticidade*. Lisboa, IST Press.
- [Bazant, 1992], Bazant, Z. P. (1992). *Fracture Mechanics of Concrete Structures*. Elsevier Applied Science, London.
- [Bazant e Jirásek, 1994] Bazant, Z. P. e Jirásek, M. (1994). Damage nonlocality due to microcrack interactions: Statistical determination of crack influence function. Em Bazant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M. e Mazars, J., editores, *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures: Experiment, Modelling and Computer Analysis*, páginas 3-17. E and FN Spon, London.
- [Bazant e Lin, 1988] Bazant, Z. P. e Lin, F. (1988). Nonlocal Smeared Cracking Model for Concrete Fracture. *Journal of Structural Engineering*, 114:2493-32509.
- [Bazant e Planas, 1998] Bazant, Z. P. e Planas, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, Boca Raton, primeira edição.
- [Brezzi e Fortin, 1991] Brezzi, F. e Fortin, M. (1991). *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag.
- [Castro, 1996] Castro, L. M. S. S. (1996). *Wavelets e séries de Walsh em elementos finitos*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Castro e Barbosa, 2006] Castro, L. M. S. S. e Barbosa, A. R. (2006). *Implementations of an Hybrid-Mixed Stress Model based on the use of Wavelets*, *Computers & Structures*, 84: 718-731.
- [Cismasiu, 2000] Cismasiu, C. (2000). *The hybrid-Trefftz displacement element for static and dynamic structural analysis problems*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Comi, 2001] Comi, C. (2001). A non local model with tension and compression damage mechanics. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20:1-22-

- [Comi e Perego, 1996] Comi, C. e Perego, U. (1996). A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3731-3755.
- [Comi e Perego, 2001] Comi, C. e Perego, U. (2001). Nonlocal aspects of nonlocal damage analyses of concrete structures. *European Journal of Finite Elements*, 10:227-242.
- [Comi et al., 2002] Comi, C., Mariani, S. e Perego, U. (2002). On the transition from continuum nonlocal damage to quasi-brittle discrete crack models. *Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering*.
- [da Silva, 2002] da Silva, M. J. V. (2002). *Elementos finitos híbridos-mistos de tensão – aplicação à análise de barragens abóboda*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [de Borst, 1991] de Borst, R. (1991). Simulation of strain localization: A reappraisal of cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8:317-332.
- [Elices e Planas, 1989] Elices, M. e Planas, J. (1989). Material models, Em Eifren, L., editor. *Fractures Mechanics of Concrete Structures – from theory to applications*, páginas 16-66. Chapman and Hall, London.
- [Faria, 1994] Faria, R. (1994). *Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão através de um modelo de dano contínuo*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- [Freitas, 1989] Freitas, J. A. T. (1989). *Duality and symmetry in mixed integral methods of elastostatics*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28: 1-19.
- [Freitas e Castro, 1992] Freitas, J. A. T. e Castro, L. M. S. S. (1992). *Digital Interpolation in Mixed Finite Element Structural Analysis*, *Computers & Structures*, 40:1307-1314.
- [Freitas e Wang, 1998] Freitas, J. A. T. e Wang, Z. M. (1998). *Híbrid-trefftz stress elements for elastoplasticity*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43: 655-683.
- [Freitas et al. 1999a] Freitas, J. A. T., Almeida, J. P. M. e Pereira, E. M. B. R. (1999a). *Non-Conventional Formulations for the Finite Element Method*, *Comput. Mech.*, 23: 488-501.
- [Freitas et al. 1999b] Freitas, J. A. T., Cismasiu, C. e Wang, Z. M. (1996b). *Comparative analysis of hybrid-trefftz stress and displacements elements*. *Archives of Computational Mechanics Engineering*, 6: 1-26.

- [Hassanzadeh, 1991] Hassanzadeh, M. (1991). Behavior of fracture process zone in concrete influenced by simultaneous applied normal and shear displacements. Tese de Doutorado, Lund Institute of Technology, Lund.
- [Jirásek, 2004] Jirásek, M. (2004). *Modeling of localized inelastic deformation*, Lecture notes. Czech Technical University, Prague.
- [Jirásek e Bazant, 2002] Jirásek, M. e Bazant, Z. P. (2002). *Inelastic analysis of structures*. John Wiley & Sons.
- [Ju, 1989] Ju, J. W. (1989). On energy based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 25:803-833.
- [Ju e Valanis, 1992] Ju, J. W. e Valanis, K. C. (1992). *Damage Mechanics and Localization*. ASME, New York.
- [Kachanov, 1958] Kachanov, L. M. (1958). *Time of the rupture process under creep conditions*. *Izvestija Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Techniceskich Mauk*, 8: 26-31.
- [Kachanov, 1986] Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Kluwer.
- [Leal, 2007] Leal, C. S. (2007). *Modelos de Elementos Finitos Híbridos-Mistos – Aplicação a uma Barragem de Gravidade*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Lemaitre, 1992] Lemaitre, J. (1992). *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, primeira edição.
- [Lemaitre e Chaboche, 1988] Lemaitre, J. e Chaboche, J.-L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2ª edição.
- [Lemaitre e Desmorat, 2005] Lemaitre, J. e Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics – Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, Netherlands.
- [Mazars, 1984] Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure*. Tese de Doutorado, Université Paris 6, Paris.
- [Mazars et al., 1991] Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G., e Saouridis, C. (1991). Size effect and continuous damage in cementitious materials. *International Journal of Fracture*, 51:159-173.
- [Mendes, 2002] Mendes, L. A. M. (2002). *Modelos de elementos finitos híbridos-mistos de tensão na análise elastoplástica de estruturas laminares planas*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.

- [Mendes e Castro, 2006] Mendes, L. e Castro, L. M. S. S. (2006). *Laje-Pol – programa de Aplicação de um Modelo Híbrido-Misto de Tensão à Análise Elástica de Lajes de Reissner-Mindlin*. ICIST, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Needleman, 1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67:69-85.
- [Oliveira, 2002] Oliveira, S. (2002). *Modelação numérica do comportamento do betão ao longo do tempo – dano, enfraquecimento, fractura e viscoelasticidade*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.
- [Peerlings et al., 1996] Peerling, R. H. J., de Borst, R., Brekelmans, W. A. M. e de Vree, J. H. P. (1996). Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3391-3403.
- [Pereira, 1993a] Pereira, E. M. B. R. (1993a). *Elementos finitos de tensão – aplicação à análise elástica de estruturas*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Pereira e Freitas, 2000] Pereira, E. M. B. R. e Freitas, J. A. T. (2000). *Numerical implementation of a hybrid-mixed finite element model for reissner-mindlin plates*. *Computers & Structures*, 74: 323-334.~
- [Pereira, 1993b] Pereira, O. J. B. A. (1993b). *Um modelo de elementos finitos de equilíbrio para elasticidade tridimensional*. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Perego, 1990] Perego, M. (1990). *Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni*. Tese de Doutoramento, Politécnico de Milano.
- [Pian, 1964] Pian, T. H. H. (1964). Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA Journal*, 2: 1333-1336.
- [Pijaudier-Cabot e Bazant, 1987] Pijaudier-Cabot, G., e Bazant, Z. P. (1987). Nonlocal damage theory. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 133:1512-1533.
- [Pijaudier-Cabot et al., 1994] Pijaudier-Cabot, G., Dubé, J.F., la Borderie, Ch. E Bodé, L. (1994). Damage models for concrete in transient dynamics. Em Bazant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M. e Mazars, J., editores, *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures: Experiment, Modelling and Computer Analysis*, páginas 201-215. E and FN Spon, London.
- [Proença, 2000] Proença, S. P. B. (2000). *Introdução à mecânica do dano e do fraturamento, Notas das aulas*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [Proença, 2008] Proença, S. P. B. (2000). *Introdução às mecânicas do dano e da fractura, Notas das aulas*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.

- [Robotnov, 1968] Robotnov, Y. N. (1968). *Creep rupture*. Em 12th International Congress of Applied Mechanics. Stanford.
- [Silva, 2006] Silva, M. C. O. M. (2006). *Modelos de Dano em Elementos Finitos Híbridos e Mistos*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa.
- [Silva e Castro, 2003] Silva, C. M. e Castro, L. M. S. S. (2003). *Aplicação de modelos híbridos e mistos à análise fisicamente não linear de pórticos de betão armado*. Em Barbosa, J. I., editor, VII Encontro Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional. Universidade de Évora.
- [Silva e Castro, 2004] Silva, C. M. e Castro, L. M. S. S. (2004). *Modelos híbridos-mistos com dano contínuo*. Métodos computacionais em engenharia.
- [Spiegel e Abellanas, 1990] Spiegel, R. M. e Abellanas, L. (1990). *Fórmulas e tabelas de matemática aplicada*. McGraw-Hill.
- [Timoshenko e Goodier, 1970] Timoshenko, S. P. e Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 3^a edição.
- [Washizu, 1975] Washizu, K. (1975). *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press.
- [Ziegler, 1977] Ziegler, H. (1977). *An introduction to termomechanics*. North-Holland.
- [Zienkiewicz e Taylor, 1991a] Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1991a). *The finite element method, Vol.1 – Basic formulation and linear problems*. McGraw-Hill, 4^a edição.
- [Zienkiewicz e Taylor, 1991b] Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1991b). *The finite element method, Vol.2 – Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*. McGraw-Hill, 4^a edição.

ANEXOS

ANEXO A

Integração Analítica dos Operadores Estruturais

Em problemas em que se assumem as hipóteses de linearidade física e geométrica é possível definir expressões analíticas para os operadores estruturais, mesmo para os casos em que não se consegue tirar partido directamente da ortogonalidade.

Neste anexo encontram-se resumidas todas as expressões que permitem a obtenção de soluções analíticas para as integrações envolvidas no cálculo dos operadores do sistema governativo global para problemas física e geometricamente lineares.

As expressões que se apresentam foram obtidas para os polinómios de Legendre normalizados, aqui representados por \bar{P} . A referida normalização foi realizada do seguinte modo:

$$\bar{P}_n = P_n \cdot \lambda_n \quad \text{com} \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \quad (\text{A.1})$$

Apresentam-se de seguida as expressões indicadas por [Pereira e Freitas, 2000].

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x) dx = 1 & \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x) dx = 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x dx = \frac{i}{2\lambda_i\lambda_j} & \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x dx = \frac{j}{2\lambda_i\lambda_j} & \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x dx = 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^2 dx = \frac{4i^3 + 6i^2 - 1}{2(2i-1)(2i+3)\lambda_i^2} & \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^2 dx = \frac{j(j-1)}{2(2j-1)\lambda_i\lambda_j} & \text{se } i = j - 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^2 dx = \frac{i(i-1)}{2(2i-1)\lambda_i\lambda_j} & \text{se } i = j + 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^2 dx = 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^3 dx = \frac{j(j-1)(j-2)}{2(2j-1)(2j-3)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^3 dx = \frac{3j(j^2-2)}{2(4j^2-9)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^3 dx = \frac{3i(i^2-2)}{2(4i^2-9)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^3 dx = \frac{i(i-1)(i-2)}{2(2i-1)(2i-3)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^3 dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^4 dx = \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-4 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^4 dx = \frac{j(j-1)[4j^3(8j^2-20j-18) + 188j^2 + 16j + 42]}{2(2j-1)(4j^2-1)(4j^2-9)(2j-5)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^4 dx = \frac{i(i-1)[4i^3(8i^2-20i-18) + 188i^2 + 16i + 42]}{2(2i-1)(4i^2-1)(4i^2-9)(2i-5)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^4 dx = \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2(2i-1)(2i-3)(2i-5)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+4 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^4 dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)(j-4)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)(2j-7)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-5 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{5j(j-1)(j-2)(j^2-2j-5)}{2(2j-1)(4j^2-9)(2j-7)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{5j(2j^4-16j^2+23)}{2(4j^2-9)(4j^2-25)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j-1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{5i(2i^4-16i^2+23)}{2(4i^2-9)(4i^2-25)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{5i(i-1)(i-2)(i^2-2i-5)}{2(2i-1)(4i^2-9)(2i-7)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{2(2i-1)(2i-3)(2i-5)(2i-7)\lambda_i\lambda_j} \quad \text{se } i = j+5 \\ \int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)x^5 dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} dx = 2\lambda_i\lambda_j \quad \text{se } i < j \wedge i + j \text{ é impar} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x \, dx = i \quad \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x \, dx = 2\lambda_i \lambda_j \quad \text{se } i < j \wedge i + j \text{ é par} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x \, dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 \, dx = \frac{i(i-1)}{2\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 \, dx = \frac{(3j^2 - j - 1)}{2\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 \, dx = 2\lambda_i \lambda_j \quad \text{se } i < j - 1 \wedge i + j \text{ é ímpar} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^2 \, dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^3 \, dx = \frac{i(4i^2 + 3i - 4)}{(2i - 1)(2i + 3)} \quad \text{se } i = j \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^3 \, dx = \frac{i(i-1)(i-2)}{2(2i-1)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j + 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^3 \, dx = \frac{(7j^3 - 12j^2 - j + 3)}{2(2j-1)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j - 2 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^3 \, dx = 2\lambda_i \lambda_j \quad \text{se } i + 3 < j \wedge i + j \text{ é par} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^3 \, dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = \frac{j(j+1)(j+2)(j+3)}{2(2j+3)(2j+5)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j + 3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = \frac{j(j+1)(5j^2 + 9j - 8)}{2(2j-1)(2j+5)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j + 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = \frac{(11i^4 + 38i^3 + 19i^2 - 20i - 3)}{2(2i-1)(2i+5)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j - 1 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = \frac{(15i^4 + 118i^3 + 309i^2 + 302i + 81)}{2(2i+3)(2i+5)\lambda_i \lambda_j} \quad \text{se } i = j - 3 \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = 2\lambda_i \lambda_j \quad \text{se } i + 4 < j \wedge i + j \text{ é ímpar} \\ \int_{-1}^1 P_i(x) \frac{\partial P_j(x)}{\partial x} x^4 \, dx = 0 \quad \text{c. c.} \end{array} \right.$$

Alguns casos particulares:

$$\int_{-1}^1 P_0(x) \, dx = \sqrt{2}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_0(x) P_0(y) \, dx dy = 2$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_1(x) P_0(y) x \, dx dy = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ANEXO B

Elementos Mestre para a Implementação do Modelo HMT

Neste anexo apresenta-se o desenvolvimento na forma polinomial da transformação de coordenadas para os elementos mestre tridimensionais de 8 e 16 nós.

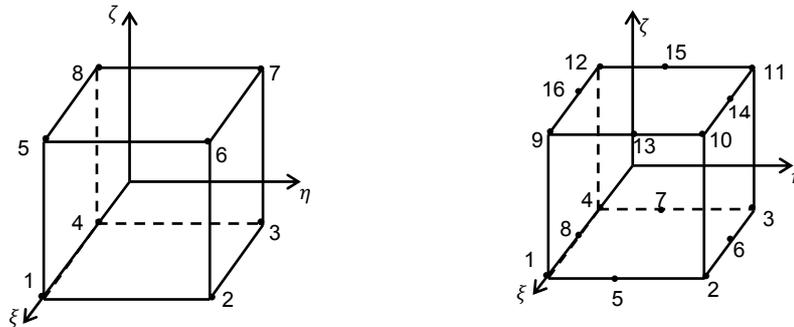


Figura B.1– Numeração dos nós dos elementos mestre de 8 e 16 nós.

Do desenvolvimento da expressão (5.12) para o elemento mestre de 8 nós resulta o seguinte polinómio que contém todas as combinações de monómios de grau não superior ao 1º em ξ , η e ζ :

$$x_k = \alpha_k^{000} + \alpha_k^{100}\xi + \alpha_k^{010}\eta + \alpha_k^{001}\zeta + \alpha_k^{110}\xi\eta + \alpha_k^{011}\eta\zeta + \alpha_k^{101}\xi\zeta + \alpha_k^{111}\xi\eta\zeta \quad (\text{B.1})$$

com $k = 1, 2, 3$ e em que:

$$\begin{aligned} \alpha_k^{000} &= \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} + X_{5,k} + X_{6,k} + X_{7,k} + X_{8,k}) \\ \alpha_k^{100} &= \frac{1}{8}(-X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} - X_{4,k} - X_{5,k} + X_{6,k} + X_{7,k} - X_{8,k}) \\ \alpha_k^{010} &= \frac{1}{8}(-X_{1,k} - X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} - X_{5,k} - X_{6,k} + X_{7,k} + X_{8,k}) \\ \alpha_k^{001} &= \frac{1}{8}(-X_{1,k} - X_{2,k} - X_{3,k} - X_{4,k} + X_{5,k} + X_{6,k} + X_{7,k} + X_{8,k}) \\ \alpha_k^{110} &= \frac{1}{8}(X_{1,k} - X_{2,k} + X_{3,k} - X_{4,k} + X_{5,k} - X_{6,k} + X_{7,k} - X_{8,k}) \\ \alpha_k^{011} &= \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} - X_{3,k} - X_{4,k} - X_{5,k} - X_{6,k} + X_{7,k} + X_{8,k}) \\ \alpha_k^{101} &= \frac{1}{8}(X_{1,k} - X_{2,k} - X_{3,k} + X_{4,k} - X_{5,k} + X_{6,k} + X_{7,k} - X_{8,k}) \\ \alpha_k^{111} &= \frac{1}{8}(-X_{1,k} + X_{2,k} - X_{3,k} + X_{4,k} + X_{5,k} - X_{6,k} + X_{7,k} - X_{8,k}) \end{aligned}$$

Para o elemento mestre de 16 nós, o polinómio obtido considera todos os monómios até ao 2º grau em ξ e η e até ao 1º grau em ζ . Assim, admitem-se variações lineares de coordenadas segundo a direcção ζ , enquanto que se admitem variações quadráticas nas direcções ξ e η . Deste modo, o desenvolvimento da expressão de transformação de coordenadas é dado por:

$$\begin{aligned}
x_k = & \alpha_k^{000} + \alpha_k^{100}\xi + \alpha_k^{010}\eta + \alpha_k^{001}\zeta + \alpha_k^{110}\xi\eta + \alpha_k^{011}\eta\zeta + \alpha_k^{101}\xi\zeta + \alpha_k^{200}\xi^2 + \alpha_k^{020}\eta^2 + \\
& + \alpha_k^{111}\xi\eta\zeta + \alpha_k^{210}\xi^2\eta + \alpha_k^{120}\xi\eta^2 + \alpha_k^{021}\eta^2\zeta + \alpha_k^{201}\xi^2\zeta + \alpha_k^{211}\xi^2\eta\zeta + \alpha_k^{121}\xi\eta^2\zeta
\end{aligned} \tag{B.2}$$

em que:

$$\alpha_k^{000} = -\frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} + X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) + \frac{1}{4}(X_{5,k} + X_{6,k} + X_{7,k} + X_{8,k} + X_{13,k} + X_{14,k} + X_{15,k} + X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{100} = \frac{1}{4}(X_{6,k} - X_{8,k} + X_{14,k} - X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{010} = \frac{1}{8}(-X_{5,k} + X_{7,k} - X_{13,k} + X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{001} = \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} - X_{9,k} - X_{10,k} - X_{11,k} - X_{12,k}) + \frac{1}{4}(-X_{5,k} - X_{6,k} - X_{7,k} - X_{8,k} + X_{13,k} + X_{14,k} + X_{15,k} - X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{110} = \frac{1}{8}(X_{1,k} - X_{2,k} + X_{3,k} - X_{4,k} + X_{9,k} - X_{10,k} + X_{11,k} - X_{12,k})$$

$$\alpha_k^{011} = \frac{1}{4}(X_{5,k} - X_{7,k} - X_{13,k} + X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{101} = \frac{1}{4}(-X_{6,k} + X_{8,k} + X_{14,k} - X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{200} = \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} + X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) - \frac{1}{4}(X_{5,k} + X_{7,k} + X_{13,k} + X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{020} = \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} + X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) - \frac{1}{4}(X_{6,k} + X_{8,k} + X_{14,k} + X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{111} = \frac{1}{8}(-X_{1,k} + X_{2,k} - X_{3,k} + X_{4,k} + X_{9,k} - X_{10,k} + X_{11,k} - X_{12,k})$$

$$\alpha_k^{210} = \frac{1}{8}(-X_{1,k} - X_{2,k} + X_{3,k} + X_{4,k} - X_{9,k} - X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) + \frac{1}{4}(X_{5,k} - X_{7,k} + X_{13,k} - X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{120} = \frac{1}{8}(-X_{1,k} + X_{2,k} + X_{3,k} - X_{4,k} - X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} - X_{12,k}) + \frac{1}{4}(-X_{6,k} + X_{8,k} - X_{14,k} + X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{021} = \frac{1}{8}(-X_{1,k} - X_{2,k} - X_{3,k} - X_{4,k} + X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) + \frac{1}{4}(X_{6,k} + X_{8,k} - X_{14,k} - X_{16,k})$$

$$\alpha_k^{201} = \frac{1}{8}(-X_{1,k} - X_{2,k} - X_{3,k} - X_{4,k} + X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) + \frac{1}{4}(X_{5,k} + X_{7,k} - X_{13,k} - X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{211} = \frac{1}{8}(X_{1,k} + X_{2,k} - X_{3,k} - X_{4,k} - X_{9,k} - X_{10,k} + X_{11,k} + X_{12,k}) + \frac{1}{4}(-X_{5,k} + X_{7,k} + X_{13,k} - X_{15,k})$$

$$\alpha_k^{121} = \frac{1}{8}(X_{1,k} - X_{2,k} - X_{3,k} + X_{4,k} - X_{9,k} + X_{10,k} + X_{11,k} - X_{12,k}) + \frac{1}{4}(X_{6,k} - X_{8,k} - X_{14,k} + X_{16,k})$$

ANEXO C

Integração numérica – Regras de Quadratura

O cálculo numérico de um integral definido pode ser efectuado recorrendo às regras de quadratura, definidas por:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x(\xi))J(x(\xi))d\xi = \sum_{i=1}^N f(x(\xi_i))J(x(\xi_i))w_i, \quad \text{com } x_i \in [a, b], \quad (\text{C.1})$$

onde x_i são denominados por pontos de integração, w_i são os pesos a atribuir a cada ponto e N representa a ordem da fórmula.

Pontos de Integração de Lobatto

Neste trabalho, a integração numérica foi efectuada com recurso aos pontos de integração de Lobatto considerando as regras de quadratura apresentadas anteriormente. De referir que, com n pontos de Lobatto é possível determinar de forma exacta polinómios de grau inferior ou igual a $2n - 3$.

n	$\pm x_i$	w_i	n	$\pm x_i$	w_i
1	0,0000000000000000	2,0000000000000000		0,0000000000000000	0,217048116348815
2	1,0000000000000000	1,0000000000000000		0,215353955363794	0,211973585926820
3	0,0000000000000000	1,3333333333333330	15	0,420638054713672	0,196987235964613
	1,0000000000000000	0,3333333333333333		0,606253205469845	0,172789647253600
4	0,447213595499957	0,8333333333333333	15	0,763519689951815	0,140511699802428
	1,0000000000000000	0,1666666666666667		0,885082044222976	0,101660070325718
5	0,0000000000000000	0,7111111111111111	15	0,965245926503838	0,058029893028601
	0,654653670707977	0,5444444444444444		1,0000000000000000	0,009523809523810
6	1,0000000000000000	0,1000000000000000	16	0,101326273521949	0,201958308178229
	0,285231516480645	0,554858377035486		0,299830468900763	0,193690023825203
7	0,765055323929464	0,378474956297846	16	0,486059421887137	0,177491913391704
	1,0000000000000000	0,0666666666666667		0,652388702882493	0,154026980807164
8	0,0000000000000000	0,487619047619047	17	0,792008291861815	0,124255382132514
	0,468848793470714	0,431745381209862		0,899200533093472	0,089393697325931
9	0,830223896278566	0,276826047361565	17	0,969568046270217	0,050850361005920
	1,0000000000000000	0,047619047619048		1,0000000000000000	0,0083333333333333
10	0,209299217902478	0,412458794658703	17	0,0000000000000000	0,190661874753469
	0,591700181433142	0,341122692483504		0,189511973518317	0,187216339677619
11	0,871740148509606	0,210704227143506	17	0,372174433565477	0,177004253515657
	1,0000000000000000	0,035714285714286		0,541385399330101	0,160394661997621
12	0,0000000000000000	0,371519274376417	17	0,691028980627684	0,137987746201926
	0,363117463826178	0,346428510973046		0,815696251221770	0,110592909007028

	0,677186279510737	0,274538712500161	0,910879995915573	0,079198270503687
	0,899757995411460	0,165495361560805	0,973132176631418	0,044921940543254
	1,000000000000000	0,027777777777778	1,000000000000000	0,007352941176471
	0,165278957666387	0,327539761183897	0,089749093484652	0,179015863439703
	0,477924949810444	0,292042683679683	0,266362652878280	0,173262109489456
10	0,738773865105505	0,224889342063126	0,434415036912123	0,161939517237602
	0,919533908166458	0,133305990851070	0,588504834318661	0,145411961573802
	1,000000000000000	0,022222222222222	18 0,723679329283242	0,124210533132967
	0,000000000000000	0,300217595455690	0,835593535218090	0,099016271717503
	0,295758135586939	0,286879124779008	0,920649185347533	0,070637166885634
	0,565235326996205	0,248048104264028	0,976105557412198	0,039970628810914
11	0,784483473663144	0,187169881780305	1,000000000000000	0,006535947712418
	0,934001430408059	0,109612273266994	0,000000000000000	0,170001919284827
	1,000000000000000	0,018181818181818	0,169186023409281	0,167556584527142
	0,136552932854927	0,271405240910696	0,333504847824498	0,160290924044061
	0,399530940965348	0,251275603199201	0,488229285680713	0,148413942595938
	0,632876153031869	0,212508417761021	0,628908137265220	0,132267280448750
12	0,819279321644006	0,157974705564370	19 0,751494202552613	0,112315341477305
	0,944899272222882	0,091684517413196	0,852460577796646	0,089131757099207
	1,000000000000000	0,015151515151515	0,928901528152586	0,063381891762630
	0,000000000000000	0,251930849333446	0,978611766222080	0,035793365186176
	0,249286930106239	0,244015790306676	1,000000000000000	0,003579336518618
	0,482909821091336	0,220767793566110	0,080545937238822	0,160743286387845
	0,686188469081757	0,183646865203550	0,239551705922986	0,156580102647475
13	0,846347564651872	0,134981926689608	0,392353183713909	0,148361554070916
	0,953309846642163	0,077801686746819	0,534992864031886	0,136300482358724
	1,000000000000000	0,012820512820513	0,663776402290311	0,120709227628674
	0,116331868883703	0,231612794468457	20 0,775368260952055	0,101991499699450
	0,342724013342712	0,219126253009770	0,866877978089950	0,080631763996120
	0,550639402928647	0,194826149373416	0,935934498812665	0,057181802127567
14	0,728868599091326	0,160021851762952	0,980743704893914	0,032237123188489
	0,867801053830347	0,116586655898711	1,000000000000000	0,005263157894737
	0,959935045267260	0,066837284497681		
	1,000000000000000	0,010989010989011		

Tabela C.1 – Pontos de integração de Lobatto.

