



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

ANÁLISE DE ALVENARIAS COM MODELOS DE DANO

Francisco Manuel Maciel Natário

**Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil**

Júri

Presidente:	Professor Pedro Guilherme Sampaio Viola Parreira
Orientador:	Professor Luís Manuel Soares dos Santos Castro
Co-orientador:	Professor António Manuel Candeias de Sousa Gago
Vogal:	Professor Jorge Manuel Vinagre Alfaiate

Outubro de 2008

Resumo

Neste trabalho é proposto o uso conjunto de formulações não-convencionais de elementos finitos e de modelos de dano contínuo, de modo a modelar o comportamento mecânico de estruturas de alvenaria regular.

Adoptam-se modelos de dano contínuo e isotrópico, não se considerando deformações permanentes, e efectua-se uma análise geometricamente linear.

Duas formulações não-convencionais de elementos finitos são estudadas: híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas e híbrida de deslocamento. Três modelos de dano contínuo são também implementados conjuntamente com a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas, e apenas um desses modelos é usado com a formulação híbrida de deslocamento. Um dos três modelos de dano é implementado com a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas pela primeira vez.

Embora não se tenham calibrado os modelos de dano, a aferição da adequabilidade das metodologias implementadas é discutida do ponto de vista qualitativo, retirando-se importantes conclusões dos exemplos estudados, que se centraram em paredes em que se aplica um deslocamento imposto paralelamente à base e num arco cilíndrico.

Palavras-Chave

Elementos Finitos

Formulações Híbridas e Mistas

Mecânica do Dano Contínuo

Alvenaria Regular

Abstract

The main objective of the present work is to test the numerical performance of non-conventional finite element formulations using continuum damage models, in order to describe the structural behavior of masonry structures.

Only isotropic and continuum damage models are considered. Linear geometrically analysis are performed, not considering permanent deformations.

Two non-conventional formulations are tested: the hybrid-mixed stress formulation with effective stress approximation and the hybrid-displacement. Three damage models are implemented within the hybrid-mixed stress formulation. Only one of the three damage models is implemented within the hybrid-displacement formulation. One of the three damage models is implemented within the hybrid-mixed stress formulation for the first time.

Even though the damage models have not been calibrated, the effectiveness of such modeling strategies is discussed from a qualitative point of view. Important conclusions can be taken from the case studies, which were masonry shear walls and a cylindrical vault.

Keywords

Finite Elements

Hybrid and Mixed Finite Elements

Continuum Damage Mechanics

Regular Masonry

Agradecimentos

Eu gostaria de expressar o meu mais sincero agradecimento às seguintes pessoas que muito contribuíram para a realização desta dissertação:

Ao Professor Luís Castro, meu orientador, pela sua total disponibilidade e empenho em analisar e tentar resolver os diversos problemas que abordámos na elaboração desta dissertação, assim como as parciais modificações que realizou nos programas informáticos que usei. Ao Professor também agradeço as imensas sugestões que trouxe a discussão, o rigor das suas opiniões, a possibilidade que me deu de experimentar o ramo da investigação em Análise de Estruturas, o adquirir de novas competências, e claro, a constante boa disposição e simpatia com que sempre me recebeu.

Ao Professor António de Sousa Gago, meu co-orientador, pelas suas úteis sugestões e opiniões acerca do modo como decidimos abordar nesta dissertação o vasto mundo que é o das alvenarias.

À Professora Maria Cristina Silva pela sua total disponibilidade em ensinar-me como trabalhar com os programas que desenvolveu e que foram utilizados nesta dissertação, pelas alterações pontuais que foram necessárias efectuar nos programas, e pelas sugestões e opiniões sobre o trabalho que estava a desenvolver.

Ao Professor Eduardo Pereira pela disponibilidade em discutir aspectos relativos às formulações não-convencionais de elementos finitos numa altura em que o Professor Luís Castro esteve indisponível por motivos de saúde.

Ao Professor Jorge Alfaiate pelas suas sugestões acerca do modo como nesta dissertação se analisam as alvenarias.

À minha família, e em especial aos meus irmãos e Mãe, por todo o apoio durante estes cinco anos de curso. Em particular gostaria de destacar os meus irmãos José António e Isabel, pela sua total disponibilidade em dar-me um fundamental apoio académico ao longo do curso, assim como úteis sugestões sobre a formatação deste trabalho. Agradeço também ao meu Pai, pela vital formação académica básica com que me preparou para a vida universitária, e que neste momento, conjuntamente com os meus Avós, com certeza que o simbolismo desta dissertação seria motivo de grande orgulho.

A todos os meus colegas e amigos, com quem foi um prazer estudar e divertir-me ao longo do curso. Em especial quero destacar o Rui Silva e o Francisco Cardoso, que sempre tornaram mais simples e divertido realizar trabalhos de grupo e estudar.

À Miana, por todo o apoio e paciência com que me ajudou nesta tarefa de realizar a dissertação.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objectivos	2
1.3	Organização	3
2	Formulação do Problema	5
2.1	Considerações iniciais	5
2.2	Equações fundamentais	5
2.2.1	Equilíbrio	6
2.2.2	Compatibilidade	6
2.2.3	Relação constitutiva	7
2.3	Comportamento das alvenarias regulares [Gago, 2004]	7
2.3.1	Comportamento das alvenarias em compressão uniaxial	11
2.3.2	Comportamento das alvenarias em tracção uniaxial	12
2.3.3	Comportamento das alvenarias sob estados de tensão biaxiais	14
2.4	Metodologias de análise numérica em estruturas de alvenaria	15
2.4.1	Elementos estruturais e macro-elementos	15

2.4.2	Modelos contínuos	16
2.4.3	Modelos descontínuos	18
2.4.4	Modelos de elementos discretos	20
3	Modelos de Dano	21
3.1	Considerações iniciais	21
3.2	Aspectos fenomenológicos	21
3.3	Modelos de dano isotrópico	24
3.3.1	Modelo de dano uniaxial	24
3.3.2	Modelo de dano multiaxial	26
3.4	Modelos de dano local adoptados	28
3.4.1	Modelo com uma variável de dano [Comi e Perego, 2001b]	28
3.4.2	Modelo com duas variáveis de dano [Comi e Perego, 2001a]	30
3.4.3	Modelo de dano de Mazars [Paula, 2001]	33
3.5	Localização das deformações	36
3.6	Método de regularização adoptado	38
3.6.1	Modelo integral não local e elementos finitos não convencionais	40
4	Elementos Finitos Híbridos e Mistos	41
4.1	Considerações iniciais	41
4.2	Formulações não-convencionais de elementos finitos	42
4.3	Formulações não-convencionais adoptadas	45
4.4	Modelos híbridos-mistos de tensão para análise elástica linear	46
4.4.1	Definição das aproximações	46

4.4.2	Sistema governativo de um elemento finito híbrido-misto de tensão . . .	47
4.5	Modelos híbridos de deslocamento	51
4.5.1	Definição das aproximações	51
4.5.2	Sistema governativo de um elemento finito híbrido de deslocamento . .	52
4.6	Implementação do modelo híbrido-misto de tensão para análise elástica linear e do modelo híbrido de deslocamento	54
4.6.1	Funções de aproximação	55
4.6.2	Cálculo dos operadores estruturais	56
4.6.3	Aspectos particulares da análise com o modelo híbrido de deslocamento em regime não-linear [Silva, 2006]	56
5	Elementos Finitos HMT com Aproximação de Tensões Efectivas	59
5.1	Considerações iniciais	59
5.2	Modelo de elementos finitos	61
5.3	Implementação	64
6	Casos de Estudo	67
6.1	Considerações iniciais	67
6.2	Análise da parede da TU Eindhoven	68
6.2.1	Modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]	71
6.2.2	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitu- tivo de [Mazars, 1984]	83
6.2.3	Estudo de refinamento tipo- h e tipo- p na análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]	88
6.2.4	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitu- tivo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a]	89

6.2.5	Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas	98
6.3	Análise da parede da ETH Zurich	99
6.3.1	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]	103
6.3.2	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]	105
6.3.3	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a]	108
6.3.4	Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas	109
6.4	Análise da parede da TU Eindhoven com abertura	111
6.4.1	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]	114
6.4.2	Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]	117
6.4.3	Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas	119
6.5	Arco cilíndrico	120
6.5.1	Reflexão sobre a metodologia de análise utilizada	129
7	Conclusões e desenvolvimentos futuros	131
7.1	Conclusões	131
7.2	Desenvolvimentos futuros	132
	Bibliografia	137
A	Relações fundamentais de um problema de estado plano de tensão	139

Lista de Figuras

2.1	Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de tracção.	10
2.2	Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de compressão.	10
2.3	Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de corte.	11
2.4	Ensaio de tracção uniaxial [Backes, 1985] paralelamente às juntas horizontais: (a) construção do espécime; (b) aspecto do espécime antes de sofrer uma rotação de 90° e se dar início ao teste.	13
2.5	Representação qualitativa das curvas tensão-deslocamento obtidas no ensaio de tracção uniaxial: com argamassa de menor resistência (a); com argamassa de maior resistência (b) [Backes, 1985].	13
2.6	Resultados experimentais de ensaios biaxiais em painéis de alvenaria [Page, 1981, 1983].	15
2.7	Modos de colapso de painéis de alvenaria sob estados biaxiais [Dhanasekar, 1985].	16
2.8	Modelação descontínua de paredes de alvenaria regular com elementos finitos convencionais: (a) modelação detalhada; (b) modelação simplificada.	19
3.1	Volume representativo de um sólido com dano.	22

3.2	Representação esquemática de um modelo de dano uniaxial com equivalência de deformações [Rabotnov, 1968].	24
3.3	Evolução da variável interna de dano no regime de amolecimento.	25
3.4	Localização das deformações: resposta de um modelo de dano local.	37
3.5	Resposta qualitativa do modelo de elementos finitos com um modelo de dano local: resposta não objectiva.	37
6.1	Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).	69
6.2	Modo de colapso da parede TU Eindhoven ([Lourenço, 1996]).	70
6.3	Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].	70
6.4	Comportamento uniaxial de tracção no modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] adoptado.	72
6.5	Exemplo qualitativo unidimensional de ponderação da taxa de energia de deformação elástica.	74
6.6	Distribuição de dano no primeiro passo de carga em que surge dano.	75
6.7	Distribuição de dano no final da aplicação do deslocamento imposto de 0.50mm.	76
6.8	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	78
6.9	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	79
6.10	Direcções principais do tensor das tensões efectivas na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] (vermelho corresponde a tracção e preto a compressão).	79
6.11	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com as implementações HD e HMT.	80

6.12	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com a implementação HD	82
6.13	Comportamento uniaxial de tracção no modelo de dano de [Mazars, 1984] adoptado.	84
6.14	Comportamento uniaxial de compressão no modelo de dano de [Mazars, 1984] adoptado.	85
6.15	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	86
6.16	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	87
6.17	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] para cada teste.	89
6.18	Comportamento uniaxial de tracção no modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] adoptado.	90
6.19	Comportamento uniaxial de compressão no modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] adoptado.	91
6.20	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 75\text{mm}$	92
6.21	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 75\text{mm}$	94
6.22	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 150\text{mm}$	95
6.23	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 150\text{mm}$	97
6.24	Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).	99
6.25	Padrão de fendilhação na parede ETH Zurich ([Lourenço, 1996]).	101

6.26	Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].	102
6.27	Malha de elementos finitos utilizada.	102
6.28	Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	103
6.29	Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	104
6.30	Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	105
6.31	Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	107
6.32	Distribuição de α_t e α_c na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] para $\delta = 2.58\text{mm}$	108
6.33	Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a].	109
6.34	Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a].	110
6.35	Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).	111
6.36	Padrão de fendilhação experimental da parede TU Eindhoven com abertura ([Lourenço, 1996]).	112
6.37	Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].	113
6.38	Malha de elementos finitos utilizada.	114
6.39	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	115
6.40	Distribuição de dano na parede analisada de TU Eindhoven com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].	116

6.41	Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	117
6.42	Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].	118
6.43	Arco cilíndrico analisado por [Creazza et al., 2001].	120
6.44	Comportamento uniaxial de tracção no modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] adoptado.	122
6.45	Malha de elementos finitos utilizada na análise do arco cilíndrico.	123
6.46	Diagrama carga-deslocamento do arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b].	123
6.47	Distribuição de dano obtida por [Creazza et al., 2001].	124
6.48	Distribuição de dano no arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b].	125
6.49	Configuração deformada para $\delta = 1.20\text{mm}$ no arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b] (escala de deslocamentos $\times 200$).	126
6.50	Mecanismo de colapso de um arco submetido à acção de uma carga concentrada ([Gago, 2004]).	127
6.51	Cálculo dos deslocamentos num mecanismo cinematicamente admissível ([Gago, 2004]).	128

Lista de Tabelas

6.1	Características da discretização utilizada no estudo da parede de Eindhoven.	73
6.2	Passo de carga em que surgiu dano na estrutura.	73
6.3	Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.	77
6.4	Características da análise com a implementação híbrida de deslocamento. . .	80
6.5	Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.	83
6.6	Discretizações utilizadas para o estudo do refinamento tipo- h e tipo- p	88
6.7	Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo com duas variáveis de dano.	92
6.8	Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.	100
6.9	Discretização utilizada no estudo da parede de TU Eindhoven com abertura.	113
6.10	Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.	121

Notação

Apresenta-se uma lista de símbolos resumida. Qualquer símbolo que aqui não esteja identificado encontra-se definido directamente na zona do texto onde é referido.

\mathbf{E}	módulo de elasticidade do material elástico linear
ν	coeficiente de Poisson do material elástico linear
μ_0	módulo de distorção do material elástico linear
\mathbf{k}_0	módulo de compressibilidade volumétrica do material elástico linear
σ	tensor das tensões ou vector que lista as componentes independentes do tensor
$\tilde{\sigma}$	tensor das tensões efectivas ou vector que lista as componentes independentes do tensor
ε	tensor das deformações ou vector que lista as componentes independentes do tensor
\mathbf{u}	vector dos deslocamentos
\mathbf{d}	variável escalar de dano
\mathbf{K}	tensor constitutivo de rigidez do material elástico linear
$\tilde{\mathbf{K}}$	tensor constitutivo de rigidez do material elástico não linear
\mathbf{F}	tensor constitutivo de flexibilidade do material elástico linear
$\tilde{\mathbf{F}}$	tensor constitutivo de flexibilidade do material elástico não linear
\mathbf{G}_f	energia de fractura
\mathbf{f}	potencial de dissipação ou superfície de activação

\mathbf{g}	lei de evolução do dano
$\tilde{\varepsilon}$	deformação equivalente
\mathbf{Y}	taxa de energia de deformação elástica
l_c	comprimento característico
λ_c	comprimento característico não local
$\overline{\mathbf{X}}$	valor não local da grandeza \mathbf{X}
\mathbf{V}	domínio (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
Γ	fronteira (de um corpo genérico ou de um elemento finito)
Γ_u	fronteira cinemática
Γ_σ	fronteira estática
\mathbf{b}	vector das forças de massa
\mathbf{t}_γ	vector das forças aplicadas na fronteira
\mathbf{D}	operador diferencial de equilíbrio
\mathbf{D}^*	operador diferencial de compatibilidade
\mathbf{N}	matriz das normais exteriores
\mathbf{S}	matriz das funções de aproximação de σ em \mathbf{V}
\mathbf{U}_v	matriz das funções de aproximação de \mathbf{u} em \mathbf{V}
\mathbf{U}_γ	matriz das funções de aproximação de \mathbf{u} em Γ_u
\mathbf{T}	matriz das funções de aproximação de σ em Γ_u
\mathbf{X}	vector das tensões generalizadas em \mathbf{V}
$\tilde{\mathbf{X}}$	vector das tensões efectivas generalizadas em \mathbf{V}
\mathbf{q}, \mathbf{q}_v	vector dos deslocamentos generalizados em \mathbf{V}
\mathbf{q}_γ	vector dos deslocamentos generalizados em Γ_σ
\mathbf{p}	vector das tensões generalizadas em Γ_u

- \mathbb{F} operador de flexibilidade generalizado elementar em regime elástico linear
- $\tilde{\mathbb{F}}$ operador de flexibilidade generalizado elementar em regime elástico não linear
- \mathbb{K} operador de rigidez generalizado elementar em regime elástico linear
- $\tilde{\mathbb{K}}$ operador de rigidez generalizado elementar em regime elástico não linear
- \mathbf{A}_v operador de compatibilidade em \mathbf{V}
- \mathbf{A}_γ operador de compatibilidade em $\mathbf{\Gamma}_\sigma$
- \mathbf{e} vector das deformações generalizadas
- \mathbf{Q}_v vector das forças generalizadas em \mathbf{V}
- \mathbf{Q}_γ vector das forças generalizadas em $\mathbf{\Gamma}_\sigma$
- $\bar{\mathbf{e}}$ vector das deformações generalizadas associadas aos deslocamentos impostos em $\mathbf{\Gamma}_u$
- \mathbf{B} operador de equilíbrio em $\mathbf{\Gamma}_u$
- \mathbf{v} vector dos deslocamento generalizados em $\mathbf{\Gamma}_u$

Abreviaturas

HMT Híbrido-Misto de **T**ensão

HD Híbrido de **D**eslocamento

ZPF Zona em **P**rocesso de **F**ractura

MEF Método dos **E**lementos **F**initos

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Muitos dos problemas de análise de estruturas têm que ser resolvidos de forma aproximada usando um modelo numérico. Actualmente, o método clássico dos elementos finitos tradicionais de deslocamento [Reddy, 1985; Fish e Belytschko, 2007] é o método de análise de estruturas mais divulgado. No entanto, este método apresenta algumas limitações devido à imposição de um modelo compatível, nomeadamente o uso frequente de malhas muito refinadas e a forma fraca na qual se impõe a condição de equilíbrio [Silva, 2006].

Recentemente [Freitas et al., 1999] desenvolveram-se novas formulações de elementos finitos híbridas e mistas, aqui designadas por formulações não-convencionais de elementos finitos. Estas dividem-se em três famílias de formulações híbridas - híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz - consoante as condições impostas às equações fundamentais no domínio de cada elemento finito. É também possível agrupar as formulações não-convencionais em modelos de tensão e de deslocamento, os quais diferem na forma como são tratadas as condições de domínio e no modo como é imposta a condição de ligação entre elementos finitos adjacentes. As formulações não-convencionais de elementos finitos adequam-se ao uso de macroelementos, o que permite evitar o uso de malhas de elementos finitos muito refinadas. O refinamento da discretização é normalmente conseguido com um refinamento da aproximação. Por outro lado, o recurso a macroelementos permite minimizar as descontinuidades dos campos aproximados.

A vantagem adicional inerente aos modelos de tensão é a de poderem, com alguma atenção na escolha dos graus de aproximação, conduzir a soluções *quasi*-equilibradas, as quais, segundo o teorema estático, se apresentam do lado da segurança para o dimensionamento de estruturas.

As formulações não-convencionais têm sido aplicadas, em particular, à análise de estruturas de betão simples assumindo modelos constitutivos clássicos, nomeadamente considerando o material elástico linear ou elastoplástico. No entanto, é sabido que as teorias clássicas podem conduzir a resultados bastante afastados da realidade, essencialmente porque não consideram o efeito da fendilhação na alteração da resistência e rigidez do material. Deste modo, [Silva, 2006] introduziu nas formulações não-convencionais de elementos finitos a Mecânica do Dano Contínuo para considerar o comportamento não linear associado ao fenómeno da fendilhação do betão, fundamental para determinar a resistência máxima e o comportamento pós-pico de uma estrutura, permitindo avaliar a sua ductilidade e obter um dimensionamento mais económico.

Este trabalho surge no seguimento do estudo efectuado por [Silva, 2006], extendendo a aplicação das formulações de elementos finitos não-convencionais conjugadas com a Mecânica do Dano Contínuo à análise de um novo material, que é a alvenaria. Neste ponto torna-se importante referir que a Mecânica do Dano Contínuo já foi usada com sucesso para reproduzir o comportamento de alvenarias em arcos por [Creazza et al., 2002] e de abóbadas por [Oñate et al., 1996], utilizando o método tradicional dos elementos finitos de deslocamento.

1.2 Objectivos

Os principais objectivos desta dissertação são:

1. perceber se a Mecânica do Dano Contínuo conjugada com as formulações não-convencionais de elementos finitos é adequada para a modelação de estruturas de alvenaria;
2. implementar novos modelos de dano no âmbito dos elementos finitos não-convencionais;
3. discutir as vantagens/desvantagens das metodologias de análise implementadas.

A concretização destes objectivos conduziu às seguintes contribuições originais:

1. desenvolvimento do estudo de estruturas de alvenaria com metodologias que apenas tinham sido implementadas para a análise de estruturas de betão simples por [Silva, 2006];
2. implementação dum modelo de dano contínuo proposto por [Mazars, 1984] no âmbito dos elementos finitos híbridos-mistos de tensão;
3. estudo da adequabilidade dos modelos de dano contínuos não locais na modelação de estruturas de alvenaria.

A implementação das formulações não-convencionais de elementos finitos conjugados com a Mecânica do Dano Contínuo foi efectuada em programas desenvolvidos por [Silva, 2006], desenvolvidos em linguagem C e executados em ambiente Linux. A implementação do modelo de [Mazars, 1984] teve como base os programas desenvolvidos por [Silva, 2006].

Ao longo de todo o trabalho opera-se no âmbito da hipótese da linearidade geométrica. As considerações que se fazem são apenas para o caso de carregamentos monotónicos a velocidade constante. Admite-se o material homogéneo e o dano isotrópico. Os modelos constitutivos utilizados não consideram deformações permanentes. Assume-se que as expressões matemáticas apresentadas são válidas.

1.3 Organização

Esta dissertação encontra-se dividida em sete capítulos distintos, a saber:

- Capítulo 2 - apresentam-se as relações fundamentais do problema em estudo e faz-se uma breve caracterização das alvenaria regulares, bem como os principais métodos de análise numérica deste material;
- Capítulo 3 - apresentam-se os fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo e apresentam-se os modelos de dano usados na dissertação, assim como a metodologia de regularização;
- Capítulo 4 - apresentam-se as formulações híbrida-mista de tensão e híbrida de deslocamento e discute-se o modo de implementação destes modelos;
- Capítulo 5 - apresenta-se a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas e discute-se o modo de implementação.

- Capítulo 6 - apresentam-se e discutem-se os casos de aplicação;
- Capítulo 7 - apresentam-se as principais conclusões e desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Formulação do Problema

2.1 Considerações iniciais

A par da madeira, a alvenaria é um dos materiais de construção há mais tempo utilizado pelo Homem, tendo ainda hoje em dia uma ampla utilização. Apesar destes aspectos, muitas dúvidas persistem sobre o seu comportamento.

Neste capítulo, para além da formulação das equações fundamentais do problema em estudo, pretende-se caracterizar o comportamento mecânico das alvenarias regulares, assim como indicar alguns métodos numéricos já desenvolvidos para a análise de estruturas de alvenaria.

2.2 Equações fundamentais

Para efectuar a análise estrutural de um sólido é necessário definir as variáveis deslocamentos, deformações, forças e esforços e relacioná-las através de três equações fundamentais: condições de equilíbrio, condições de compatibilidade e relação constitutiva.

Nesta secção apresentam-se as relações fundamentais que governam o problema em estudo. As relações apresentadas são relativas a um referencial Cartesiano, não estando contemplada a existência de tensões e deformações residuais antes da aplicação de qualquer carregamento

ou deslocamento imposto. No caso particular de um estado plano de tensão, os operadores e as grandezas que se definem de seguida encontram-se no anexo A.

2.2.1 Equilíbrio

As equações de equilíbrio no domínio V e na fronteira estática Γ_σ de um elemento são as seguintes:

$$\mathbf{D}\sigma + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } V, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{N}\sigma = \mathbf{t}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (2.2)$$

A matriz \mathbf{D} representa o operador diferencial de equilíbrio e o vector \mathbf{b} as componentes das forças de massa. A matriz \mathbf{N} lista as componentes do vector unitário normal à fronteira e o vector \mathbf{t}_γ as componentes da tensão aplicada na fronteira do elemento. Por último, o vector σ lista as componentes independentes do tensor das tensões.

2.2.2 Compatibilidade

Admitindo válida a hipótese da linearidade geométrica, a relação de compatibilidade que relaciona o vector ε , que agrupa as componentes independentes do tensor das deformações, com o vector dos deslocamentos independentes é a seguinte:

$$\varepsilon = \mathbf{D}^*\mathbf{u} \quad \text{em } V. \quad (2.3)$$

A matriz \mathbf{D}^* representa o operador diferencial de compatibilidade. Os operadores diferenciais \mathbf{D}^* e \mathbf{D} são adjuntos, isto é:

$$\mathbf{D}^*_{ij} = -\mathbf{1}^{n+1}\mathbf{D}_{ji}, \quad (2.4)$$

onde n representa a ordem do operador diferencial.

Na fronteira cinemática Γ_u , para incluir a possibilidade de existirem deslocamentos impostos $\bar{\mathbf{u}}$, terá que ser respeitada a condição de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (2.5)$$

2.2.3 Relação constitutiva

A relação constitutiva que relaciona as deformações com as tensões, assumindo um comportamento elástico linear é dada pela equação:

$$\varepsilon = \mathbf{F}\sigma. \quad (2.6)$$

O operador \mathbf{F} é designado por matriz de flexibilidade.

A relação inversa de (2.6) é:

$$\sigma = \mathbf{K}\varepsilon. \quad (2.7)$$

Ao operador \mathbf{K} é dada a designação de matriz de rigidez.

2.3 Comportamento das alvenarias regulares [Gago, 2004]

1

A alvenaria é um material que resulta da assemblagem de diversos elementos (tijolos, pedras, blocos, etc), que poderão ser aglomerados através de uma argamassa de assentamento.

Nos últimos anos tem-se assistido a um grande desenvolvimento dos modelos numéricos para simulação do comportamento não linear de estruturas de betão e de alvenaria. No entanto, na caracterização experimental desses materiais, particularmente no que diz respeito às alvenarias, essa evolução foi mais lenta e nem sempre estão disponíveis resultados experimentais para aferir os parâmetros requeridos pelos modelos numéricos. Apenas recentemente a comunidade científica começou a realizar campanhas de ensaios experimentais com o objectivo de caracterizar as alvenarias regulares, de tijolos ou blocos, sendo raros ensaios noutra tipo

¹Secção baseada na recolha de informação do trabalho de [Gago, 2004]

de alvenarias. No entanto, as características fundamentais das alvenarias ensaiadas podem ser traduzidas para qualquer tipo de alvenaria ou material, onde a adesão, coesão e atrito entre unidades constituam as características básicas do comportamento mecânico. Assim sendo, ainda que haja uma insuficiente caracterização das alvenarias antigas, os resultados referentes a alvenarias recentes permitem aferir os parâmetros necessários para os modelos numéricos.

Dependendo dos materiais utilizados, das dimensões, natureza e geometria das unidades, do seu arranjo e das dimensões das juntas, a designação alvenaria poderá representar uma imensa variedades de materiais compósitos. No entanto, todas as alvenarias têm características em comum:

- fraca resistência a esforços de tracção;
- razoável resistência a esforços de compressão;
- exibem anisotropia (características mecânicas dependentes da direcção considerada);
- resistência ao corte das juntas traduzidas por leis do tipo Coulomb;
- existência de superfícies de descontinuidade;
- existência de um ramo de amolecimento nas relações constitutivas, própria dos materiais quasi-frágeis como são o betão, as argamassas, os tijolos cerâmicos, a pedra e a rocha.

Para níveis de tensão normal de compressão moderados (que não provoquem esmagamento das unidades e/ou das argamassas), a tensão tangencial máxima em juntas argamassadas, ou secas, pode ser traduzida pela lei de Coulomb:

$$\tau = c_u + \sigma \tan \phi, \quad (2.8)$$

onde c_u representa a tensão residual de corte ou coesão, ϕ o ângulo de atrito interno da junta, σ a tensão normal de compressão e τ a tensão tangencial máxima admissível. Para juntas secas, o valor da coesão é naturalmente nulo.

O fenómeno de amolecimento representa um decréscimo gradual da resistência mecânica do material, quando este é submetido a um incremento contínuo de deformação. A nível

microscópico, o amolecimento resulta de uma progressiva propagação de defeitos internos aquando da aplicação gradual de um carregamento. Mas mesmo antes do início do carregamento, esses materiais apresentam uma micro-fendilhação interna, devida a fenómenos de retracção ou de arrefecimento durante a sua formação. As tensões residuais e as micro-fendas, bem como as variações internas de rigidez e resistência geram um aumento progressivo da dimensão das fendas, quando o material é submetido a um aumento gradual do carregamento. A princípio, as microfendas são estáveis, o que significa que elas apenas aumentam quando há um aumento do carregamento. Nas imediações da carga de pico, há uma aceleração da propagação das microfendas, dando-se origem então a fendas macroscópicas. Estas são instáveis, pelo que a intensidade da carga aplicada terá de diminuir para se evitar o seu crescimento descontrolado. Num ensaio de carga com controlo de deformação, o crescimento das fendas macroscópicas resulta num amolecimento da resposta e na localização da fendilhação numa pequena zona do espécime, enquanto que as restantes zonas descarregam elasticamente [Lourenço, 1996].

O amolecimento surge em espécimes de alvenaria quando os solicitamos à tracção, corte e compressão, verificando-se no caso da compressão uma forte dependência do amolecimento das condições de fronteira e dimensões do espécime.

A partir da análise das Figuras 2.1, 2.2, 2.3, que representam respectivamente diagramas tensão-deslocamento em ensaios de tracção, de compressão e de corte de espécimes de alvenaria, podemos identificar um conjunto de parâmetros representativos do comportamento da alvenaria, que são a rigidez elástica, a tensão de pico e a energia de fractura que caracteriza a curva de amolecimento.

A tensão de pico é considerada como um parâmetro fundamental na caracterização do comportamento mecânico dos materiais. Mas atingida a tensão de pico, torna-se necessário estabelecer uma lei de evolução da abertura de fenda, a qual pode ser conseguida através do conceito de energia de fractura. A energia de fractura (G_f) define a quantidade de energia necessária para criar uma fenda de superfície unitária, sendo representada pela área limitada pelo diagrama tensão-deslocamento das Figuras 2.1, 2.2 e 2.3. No caso dos ensaios de tracção e corte, a forma da curva de amolecimento é independente das dimensões dos espécimes e das condições de fronteira, pelo que pode considerar-se que as correspondentes energias de fractura são parâmetros materiais.

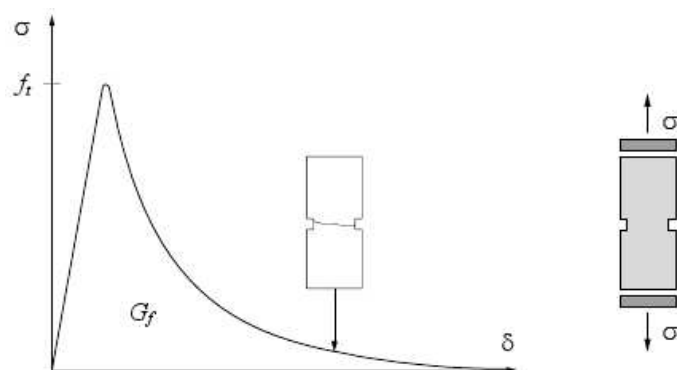


Figura 2.1: Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de tracção.

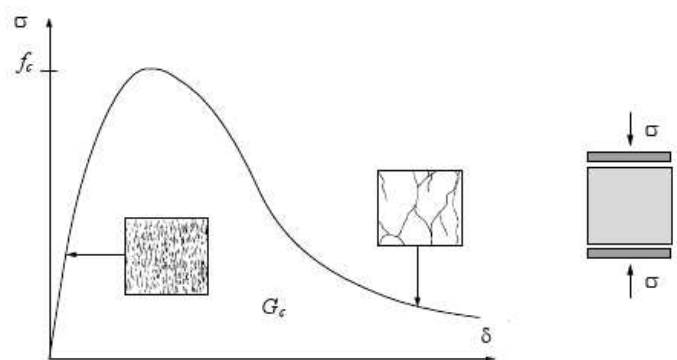


Figura 2.2: Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de compressão.

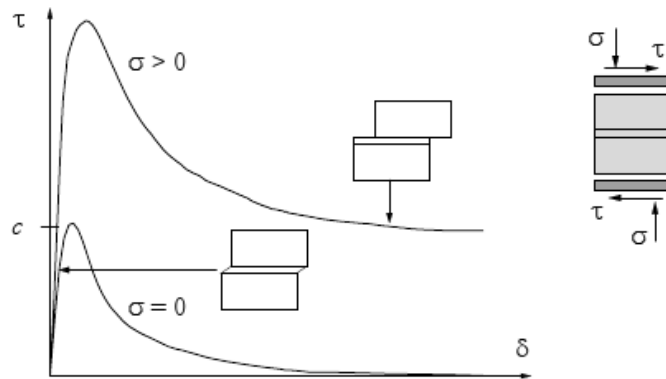


Figura 2.3: Comportamento qualitativo de um espécime de alvenaria submetido a um ensaio de corte.

Para um compêndio de vários resultados experimentais relativos a tensões de pico e energias de fractura recomenda-se a consulta dos trabalhos [Gago, 2004] e [Lourenço, 1996]. No entanto, destaca-se a fórmula proposta pelo investigador Rots, que propõe para alvenarias regulares em tijolo cerâmico com juntas argamassadas a seguinte relação exponencial para a curva de amolecimento em tracção:

$$\sigma = \mathbf{f}_t \exp \frac{-\mathbf{f}_t}{\mathbf{G}_f} \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

em que σ é a tensão normal de tracção, \mathbf{f}_t a correspondente tensão de pico, \mathbf{G}_f a energia de fractura em modo de tracção directa e \mathbf{u} a abertura de fenda.

2.3.1 Comportamento das alvenarias em compressão uniaxial

Antes da introdução dos métodos numéricos na modelação das alvenarias, a resistência à compressão uniaxial na direcção normal às juntas horizontais era a mais relevante informação estrutural.

A resposta a solicitações de compressão das alvenarias é condicionada pela diferença relativa das propriedades elásticas das unidades e da argamassa. Devido às diferenças de rigidez, quando se comprime uma alvenaria, a argamassa tende a expandir lateralmente, mais do que as unidades. Assim sendo, a ligação por atrito e coesão entre a argamassa e as unidades

conduz a um confinamento lateral da argamassa, que desenvolve esforços de corte na interface e produz um estado de tensão triaxial de compressão na argamassa, e um estado biaxial de compressão e tracção na unidade. Como consequência deste complexo estado de tensão, ocorrem no provete fendas paralelas à direcção de carregamento, que se desenvolvem com o aumento da carga, originando o seu colapso.

Como já foi dito, as propriedades das alvenarias são dependentes das características dos seus componentes. No caso particular da resistência à compressão da alvenaria, esta dependência está bem vincada na expressão proposta pelo Eurocódigo 6 [Roberts e Brooker, 2007], que indica para efeitos de dimensionamento de paredes a seguinte expressão para o cálculo da resistência à compressão da alvenaria:

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{k} \mathbf{f}_b^\alpha \mathbf{f}_m^\beta, \quad (2.10)$$

onde \mathbf{f}_k representa a resistência à compressão característica da alvenaria, \mathbf{k} uma constante inferior à unidade dependente do tipo de unidade e argamassa, α e β constantes inferiores à unidade dependentes do tipo de argamassa e da espessura das juntas, e \mathbf{f}_b e \mathbf{f}_m a resistências à compressão das unidades e da argamassa, respectivamente [Roberts e Brooker, 2007].

2.3.2 Comportamento das alvenarias em tracção uniaxial

Quando se submete um espécime de alvenaria a tracção uniaxial, o colapso poderá estar associado à rotura das superfícies de adesão unidade-argamassa ou à rotura das unidades, dependendo da relação relativa das resistências à tracção desses componentes. Porém existem outras situações em que o colapso se dá pela fractura indistinta das unidades e das áreas de adesão.

O investigador [Backes, 1985] efectuou uma série de ensaios de tracção em alvenarias, tendo identificado vários modos de colapso, dependentes da diferença relativa das resistências à tracção dos componentes. Num dos modos em que as fendas se propagaram pelas juntas entre unidades, verificou-se haver na curva de resposta uma resistência residual (Figura 2.5), sendo o comportamento pós-pico governado pelas superfícies de adesão verticais e horizontais. Num outro modo em que as fendas se propagaram de forma aproximadamente vertical, o comportamento pós-pico conduz a uma resistência nula, sendo o comportamento governado

simultaneamente pelo comportamento das juntas e das unidades, ou seja, pelas energias de fractura das unidades e juntas verticais.

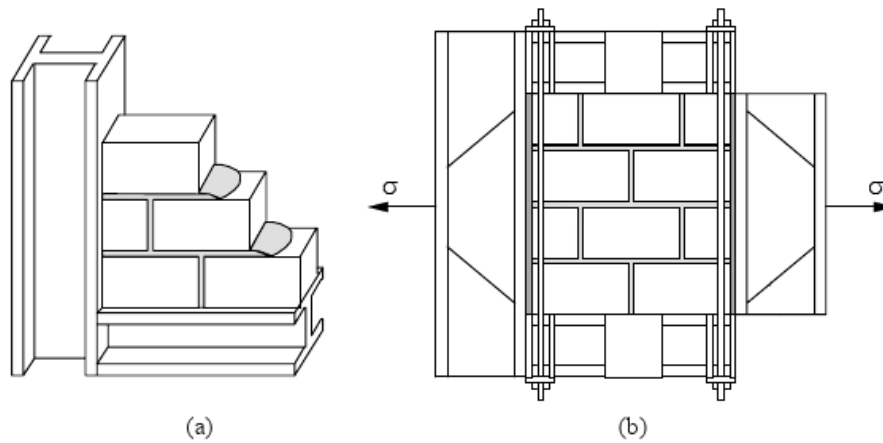


Figura 2.4: Ensaio de tracção uniaxial [Backes, 1985] paralelamente às juntas horizontais: (a) construção do espécime; (b) aspecto do espécime antes de sofrer uma rotação de 90° e se dar início ao teste.

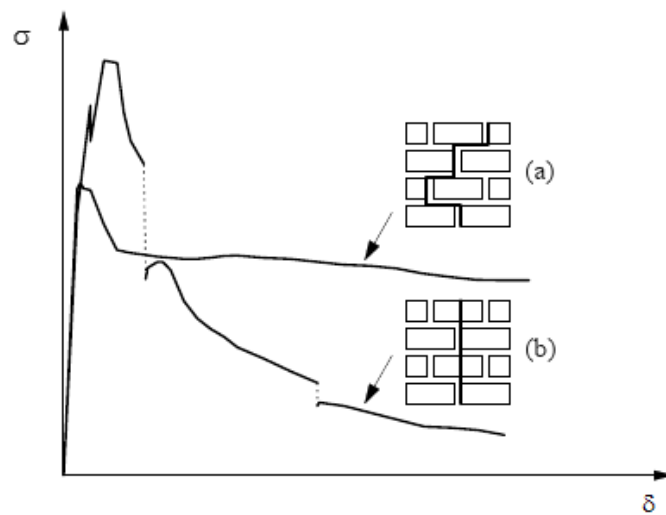


Figura 2.5: Representação qualitativa das curvas tensão-deslocamento obtidas no ensaio de tracção uniaxial: com argamassa de menor resistência (a); com argamassa de maior resistência (b) [Backes, 1985].

2.3.3 Comportamento das alvenarias sob estados de tensão biaxiais

As alvenarias apresentam um comportamento mecânico diferenciado consoante a direcção das solicitações, dado que existem juntas que constituem superfícies de debilidade do material e poderem haver unidades que apresentam um comportamento anisotrópico. Assim sendo, a resistência das alvenarias é dependente da orientação das tensões principais relativamente aos eixos materiais (ou seja, a orientação das juntas e unidades), não sendo possível descrever o comportamento constitutivo da alvenaria sob acções biaxiais através das suas características em regime uniaxial.

O investigador Page [Page, 1981, 1983] submeteu alguns painéis de alvenaria regular de tijolos cerâmicos a estados de tensão biaxial, levando-os à rotura (Figura 2.6), sendo de salientar a variação dos resultados com a alteração dos ângulos entre a direcção de solicitação e os eixos materiais.

Na Figura 2.7 estão representados diferentes modos de colapso para diversas direcções de solicitação. Por análise desta mesma figura, podemos verificar que em tracção uniaxial a rotura ocorre por fractura das juntas verticais e/ou deslizamento das juntas horizontais. Quando a resistência das juntas é significativa, a rotura também se pode dar por fractura das unidades. A fractura das unidades será mais pronunciada quanto maior for o confinamento a que está sujeita a alvenaria na direcção perpendicular à direcção de tracção, pois este confinamento vai traduzir-se num aumento da intensidade das forças de atrito nas juntas. No entanto, se a tensão de confinamento for muito elevada poderão ocorrer danos internos (micro-fendilhação e micro-deslizamento) que resultarão na diminuição da resistência à tracção na direcção perpendicular. Em carregamentos biaxiais de compressão dá-se um aumento de resistência comparativamente aos ensaios uniaxiais, ocorrendo no colapso a separação lateral a meio da espessura do painel, independentemente da orientação das tensões principais. O aumento da resistência no estado de compressão biaxial está relacionado com o aumento do atrito nas juntas e atrito interno nas unidades.

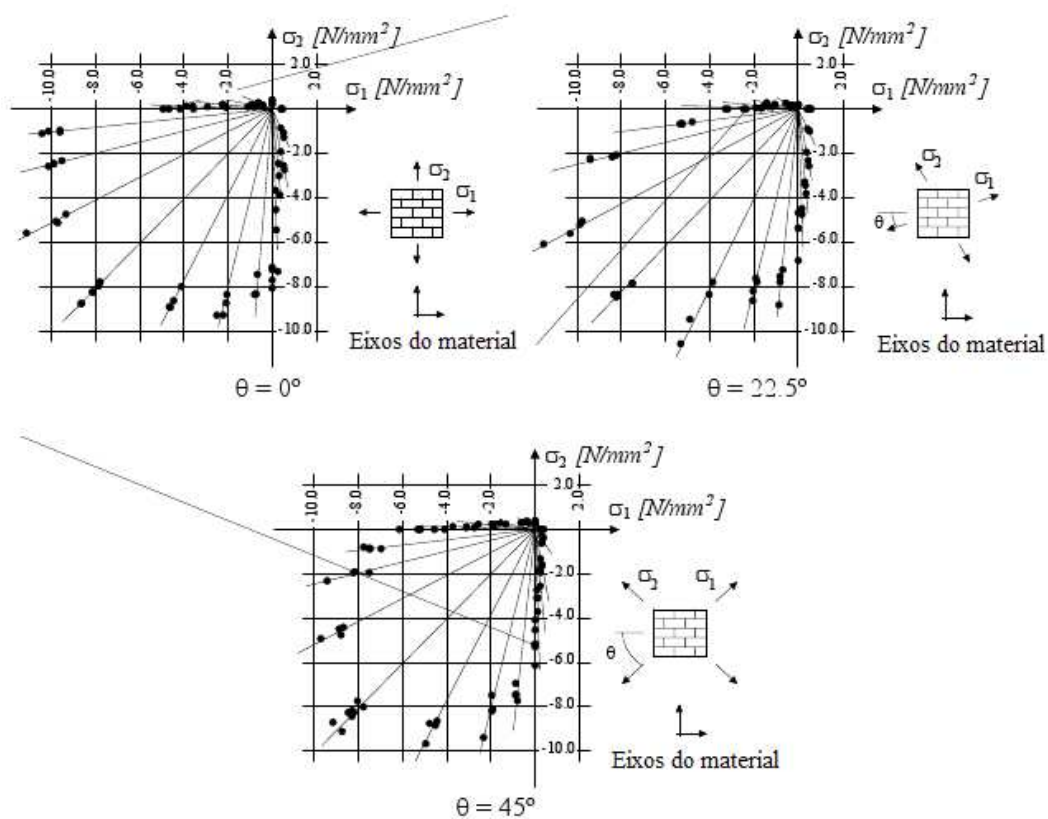


Figura 2.6: Resultados experimentais de ensaios biaxiais em painéis de alvenaria [Page, 1981, 1983].

2.4 Metodologias de análise numérica em estruturas de alvenaria

2.4.1 Elementos estruturais e macro-elementos

A metodologia numérica mais simples de modelação de estruturas de alvenaria baseia-se nas técnicas correntes de modelação de estruturas pelo método convencional dos elementos finitos. Nesta metodologia as várias componentes da estrutura são modeladas através da combinação de elementos estruturais (elementos de viga, laje ou de casca), admitindo geralmente um comportamento elástico linear. Por vezes, para se simular simplificadaamente efeitos não lineares são introduzidas artificialmente articulações ou módulos de elasticidade reduzidos.

Ângulo θ	Tensão Uniaxial	Tensão/Compressão	Compressão Uniaxial	Compressão Biaxial
0°				
22.5°				
45°				
67.5°				
90°				

Figura 2.7: Modos de colapso de painéis de alvenaria sob estados biaxiais [Dhanasekar, 1985].

Estes modelos simplificados de análise permitem obtermos informações úteis sobre o comportamento global de uma estrutura.

No caso em que as estruturas dos edifícios são constituídas por paredes de grandes dimensões, e onde é admissível considerar em determinadas áreas distribuições de tensão uniformes e que certos painéis se comportam como corpos rígidos, é possível modelar os edifícios através de macro-elementos, reduzindo-se o número de graus de liberdade do modelo, e consequentemente, o esforço computacional.

2.4.2 Modelos contínuos

Nos modelos contínuos, a alvenaria é modelada como um meio homogêneo e contínuo.

A simulação de um painel de alvenaria regular, constituída por arranjos periódicos de unidades e argamassa, através da modelação explícita de todos os componentes pode tornar-se uma tarefa impraticável, caso o painel apresente uma dimensão considerável. Assim sendo, é neste contexto que surgem as técnicas de homogeneização, que permitem modelar um meio descontínuo periódico através de elementos contínuos e homogéneos, com características mecânicas equivalentes.

Nas teorias de homogeneização, o comportamento global do meio homogeneizado é obtido a partir do comportamento de cada um dos componentes, geralmente em dois passos sucessivos de homogeneização, cada um deles correspondente a uma orientação distinta das juntas. No entanto esta técnica apresenta algumas dificuldades em traduzir a realidade, porque as juntas verticais não são totalmente contínuas e porque a distribuição de extensões nas unidades quando se dá a fendilhação na alvenaria é extremamente não uniforme [Borrell, 1996].

Aproveitando os estudos sobre o comportamento não linear do betão foram desenvolvidos alguns modelos de análise não linear para meios contínuos, sendo os modelos de elasto-plasticidade, de fenda distribuída e de dano aqueles que podem ser utilizados na simulação do comportamento não linear das alvenarias em modelos contínuos.

Os modelos elasto-plásticos têm sido largamente utilizados na caracterização do comportamento não-linear do betão comprimido. O escoamento plástico é associado a alterações na estrutura interna do material, que são principalmente devidas à propagação da microfendilhação. Este fenómeno constitui também nas alvenarias comprimidas o principal factor de não-linearidade.

Os modelos elasto-plásticos podem ser associados a outros modelo não lineares que descrevam o comportamento sob tracção, nomeadamente os modelos de fenda distribuída.

Para simular o comportamento do material fendilhado há que utilizar modelos específicos, geralmente designados de modelos de fendilhação. Neste contexto evidenciam-se duas formulações distintas associadas ao uso do método convencional dos elementos finitos:

- modelo de fenda discreta: o conceito de fenda discreta, associado à concepção natural de fractura, modela a fenda (ou junta, no caso de alvenarias constituídas por blocos) explicitamente através da separação dos nós pertencentes aos elementos adjacentes, introduzindo-se assim, uma superfície de descontinuidade na malha de elementos finitos;

- modelo de fenda distribuída: os modelos de fenda distribuída representam o sólido fendilhado como um meio contínuo em que o efeito da fendilhação é modelado através da modificação das relações constitutivas definidas para o material. A utilização destes modelos é bastante vantajosa no que diz respeito ao esforço computacional, uma vez que admite a formação de fendas com localização e orientação genéricas, evitando ter que haver modificações na topologia da malha de elementos finitos. Este modelo é naturalmente apto para modelar fendilhação difusa, típica de alvenarias antigas. Para alvenarias regulares de blocos é difícil incorporar neste modelo a influência das juntas no comportamento fissurado da alvenaria.

Por último, os modelos de dano (ver capítulo 3) têm sido bastante utilizados na análise do comportamento do betão para descrever a progressiva degradação das propriedades mecânicas do material, verificada numa fase anterior ao desenvolvimento de fendas macroscópicas. A experiência da aplicação destes modelos a estruturas de alvenaria é bastante reduzida, salientando-se os estudos desenvolvidos por [Oñate et al., 1996; Creazza et al., 2002].

2.4.3 Modelos descontínuos

Nos modelos descontínuos, o comportamento global da alvenaria é obtido por uma discretização geométrica muito detalhada, adoptando-se relações constitutivas não-lineares para cada componente da alvenaria e sendo o problema resolvido através do método convencional dos elementos finitos. No geral, a aplicação deste tipo de modelos requer um enorme esforço computacional, devido às malhas muito refinadas e pelos algoritmos iterativos necessários para a resolução do problema não-linear. Por este facto, a utilização deste tipo de metodologia é geralmente reservada à análise de painéis isolados de alvenaria [Borrell, 1996].

Nos modelos descontínuos, as unidades e as juntas argamassadas são simuladas separadamente. Para as unidades são usados elementos finitos contínuos, enquanto que para as juntas existem duas abordagens possíveis [Borrell, 1996]:

- modelo descontínuo detalhado: as juntas são modeladas como elementos finitos contínuos e as áreas de adesão argamassa-unidade simuladas através de elementos de interface de espessura nula;
- modelo descontínuo simplificado: as juntas são modeladas através de um único ele-

mento de interface de espessura nula e as unidades são modeladas com elementos finitos contínuos.

A abordagem simplificada distingue-se da detalhada por não ser capaz de simular a deformabilidade lateral da junta quando comprimida entre as unidades. Este efeito não é significativo na maioria dos casos práticos, pois raramente o comportamento à compressão é condicionante.

O elemento fundamental em qualquer uma das abordagens descritas é o elemento de interface, que representa uma superfície potencial de fractura por tracção e/ou corte. Verifica-se que a consideração de modelos em que a deformação inelástica é concentrada totalmente nos elementos de interface conduz a modelos convencionais de elementos finitos robustos, capazes de simular de forma bastante satisfatória o carregamento da estrutura de alvenaria [Lourenço, 1996].

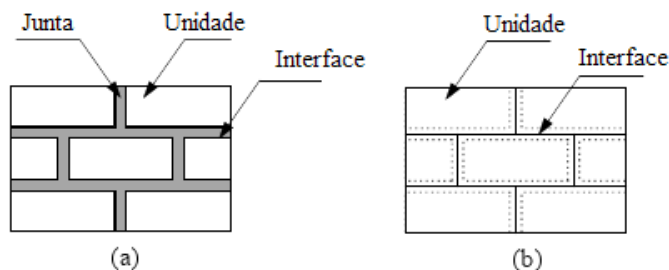


Figura 2.8: Modelação descontínua de paredes de alvenaria regular com elementos finitos convencionais: (a) modelação detalhada; (b) modelação simplificada.

No caso das alvenarias regulares existentes nas construções antigas, em que as juntas apresentam resistências significativamente inferiores às unidades, é de prever que o percurso da fractura se efectue através das juntas, pelo que nestes casos é admissível admitir para os elementos de contínuo que simulam as unidades um comportamento elástico linear.

Quanto às alvenarias recentes, em que a resistência das juntas se aproxima da resistência das unidades, é possível que as fendas se propaguem também nas unidades, pelo que nestes casos se poderá considerar um modelo não linear para os elementos contínuos que modelam os blocos.

2.4.4 Modelos de elementos discretos

O método dos elementos discretos é um método numérico de análise de estruturas que se caracteriza principalmente por permitir a ocorrência de deslocamentos e rotações finitas de corpos discretos, e por permitir durante uma análise, o reconhecimento de novos contactos entre corpos e a eliminação de contactos obsoletos. Os corpos discretos podem ser modelados como rígidos ou deformáveis, mas a hipótese de corpos rígidos é bastante realista em situações em que o nível de deformação dos blocos é baixo quando comparado com a deformação das juntas. Nos casos em que se considere a deformabilidade dos corpos discretos, este método aproxima-se dos modelos descontínuos de elementos finitos convencionais com modelação simplificada das juntas entre unidades. À parte das técnicas de solução de ambos os métodos, eles distinguem-se na modelação do contacto entre unidades: no método dos elementos finitos convencionais consideram-se elementos de interface e no método dos elementos discretos contactos pontuais.

Capítulo 3

Modelos de Dano

"L'endommagement, comme le diable, invisible mais redoutable."[Lemaitre e Chaboche, 1985]

3.1 Considerações iniciais

Quando afirmamos que existe dano, estamos a dizer que o material se encontra num estado em que as suas propriedades mecânicas, nomeadamente ao nível da rigidez e resistência, são diferentes das do material são. A Mecânica do Dano Contínuo teve a sua génese quando [Kachanov, 1958] introduziu o conceito de dano no contexto da rotura por fluência. Posteriormente, a ideia de considerar a redução da rigidez inicial do material devido à existência de dano e a introdução da definição de tensão efectiva deve-se a [Rabotnov, 1968]. Mais tarde, [Lemaitre e Chaboche, 1985] formulam com mais rigor a Mecânica do Dano Contínuo.

3.2 Aspectos fenomenológicos

Considere-se um volume representativo de um material com dimensões suficientemente grandes para conter um número representativo de defeitos, e ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que possa ser associado a um determinado ponto material.

Considere-se ainda que S é a área total de uma secção genérica de normal exterior \vec{n} no

interior do elemento e $\tilde{\mathbf{S}}$ a área contida em \mathbf{S} efectivamente resistente. Segundo [Lemaitre e Chaboche, 1985], a variável de dano local \mathbf{d}_n associada ao plano de normal \vec{n} é definida como:

$$\mathbf{d}_n = \frac{\mathbf{S} - \tilde{\mathbf{S}}}{\mathbf{S}}. \quad (3.1)$$

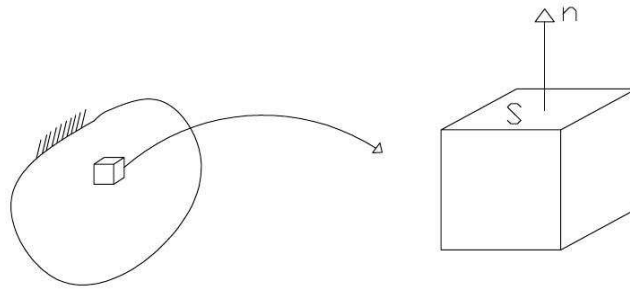


Figura 3.1: Volume representativo de um sólido com dano.

Da análise da expressão (3.1) facilmente verificamos que a variável de dano assume valores no intervalo $[0; 1]$, uma vez que quando o material está intacto $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$ e $\mathbf{d}_n = \mathbf{0}$, e quando está totalmente danificado, $\tilde{\mathbf{S}} \rightarrow \mathbf{0}$ e $\mathbf{d}_n \rightarrow \mathbf{1}$.

Outro aspecto a salientar na variável de dano local (3.1) é que tem um andamento não decrescente, como consequência de a área efectivamente resistente $\tilde{\mathbf{S}}$ ter sempre tendência a diminuir ou manter-se constante. Assim sendo, o processo de desenvolvimento do dano no material é modelado como um processo irreversível, o que está de acordo com o comportamento experimental dos materiais que exibem ramo de amolecimento.

A variável de dano depende do ponto e da direcção considerada. Caso se verifique ou se admita que a variável \mathbf{d}_n seja independente da direcção, o modelo designa-se por isotrópico. Caso contrário, designa-se por anisotrópico.

A dedução que se segue baseia-se na análise de um problema uniaxial, sendo todas as grandezas facilmente generalizáveis para outro tipo de problemas. Considere-se um elemento de material modelado como um conjunto de fibras paralelas à direcção de carga com deformação imposta constante [Rabotnov, 1968]. Assume-se que cada fibra apresenta um comportamento elástico perfeitamente frágil, isto é, que a tensão se dissipa totalmente no instante em que

se atinge a deformação resistente máxima. As fibras têm todas a mesma rigidez inicial \mathbf{E} mas deformações resistentes máximas ligeiramente diferentes. A tensão normal inicial σ no material é definida em função da força aplicada \mathbf{F} como:

$$\sigma = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{S}}. \quad (3.2)$$

À medida que as fibras menos resistentes se vão quebrando, a área resistente varia de \mathbf{S} para $\tilde{\mathbf{S}}$. Esta variação na área resistente leva a que se defina um novo conceito de tensão, a tensão efectiva $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mathbf{F}}{\tilde{\mathbf{S}}} \iff \tilde{\sigma} = \sigma \frac{\mathbf{S}}{\tilde{\mathbf{S}}}. \quad (3.3)$$

Introduzindo em (3.3) a definição da variável de dano (3.1), vem que:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathbf{1} - \mathbf{d}}. \quad (3.4)$$

Saliente-se que em (3.4) o índice "n" da variável de dano desaparece por estarmos a tratar de um problema uniaxial.

Observando a Figura 3.2, note-se que na fase intermédia temos $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}}$ e $\sigma = \tilde{\sigma}$, enquanto que na fase final, $\mathbf{S} \neq \tilde{\mathbf{S}}$ e $\sigma \neq \tilde{\sigma}$, pois $\mathbf{F} = \sigma\mathbf{S} = \tilde{\sigma}\tilde{\mathbf{S}}$.

Pelo facto de cada fibra apresentar um comportamento elástico linear até à rotura, a lei de Hooke pode ser generalizada para a tensão efectiva, resultando em:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{E}\varepsilon, \quad (3.5)$$

ou seja:

$$\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{E}\varepsilon. \quad (3.6)$$

A equação anterior representa a relação constitutiva do meio contínuo com dano.

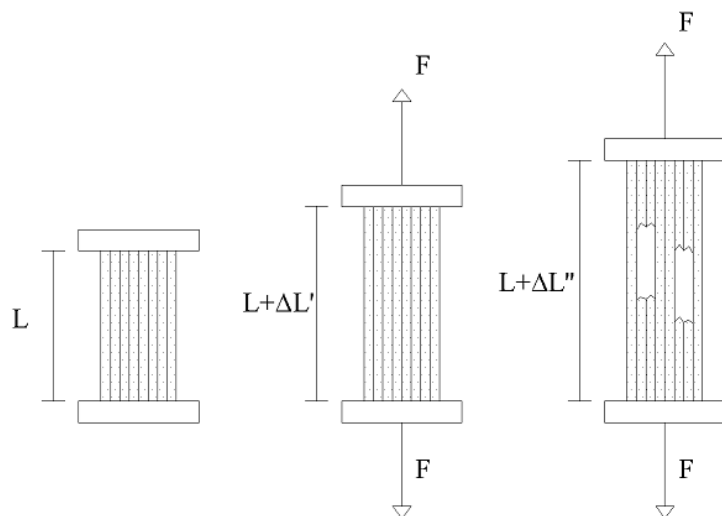


Figura 3.2: Representação esquemática de um modelo de dano uniaxial com equivalência de deformações [Rabotnov, 1968].

O raciocínio que conduz à relação constitutiva do meio contínuo com dano admite que a deformação das fibras danificadas se mantém igual à deformação das restantes fibras do material ao longo do processo. Esta hipótese corresponde ao princípio da equivalência da deformação, que para o caso geral pode ser enunciado da seguinte forma: o estado de deformação de um material com dano é obtido da lei de comportamento do material íntegro onde o tensor das tensões é substituído pelo tensor das tensões efectivas [Lemaitre e Chaboche, 1985].

3.3 Modelos de dano isotrópico

3.3.1 Modelo de dano uniaxial

De forma a simplificar a apresentação das equações de um modelo de dano, assume-se inicialmente um modelo de dano uniaxial análogo ao da Figura 3.2. A *relação constitutiva secante* local entre a tensão normal e a deformação associada corresponde à equação (3.6).

A função matemática para a *lei de evolução do dano* g pode ser obtida directamente a partir de resultados experimentais, salvaguardando que o modelo seja consistente com as

bases da termodinâmica dos processos irreversíveis.¹

Numa primeira fase a resposta do material é elástica linear. Quando a energia elástica armazenada atinge um determinado valor crítico, a variável de dano toma valores não nulos, de forma a traduzir a perda de integridade do material.

Analisemos agora a evolução da variável de dano no gráfico esquemático da Figura 3.3.

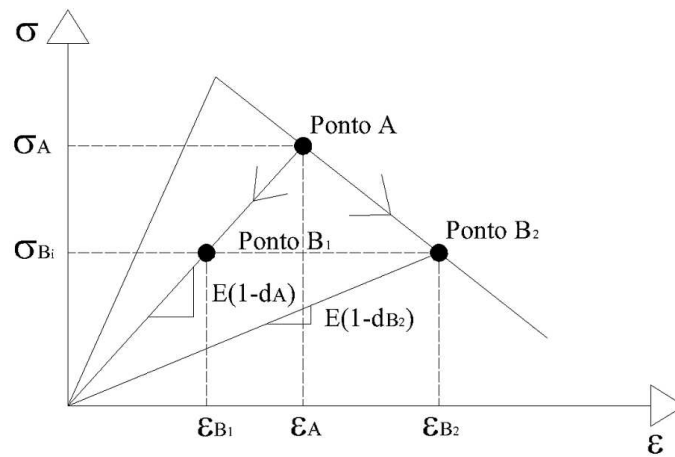


Figura 3.3: Evolução da variável interna de dano no regime de amolecimento.

O material pode entrar em descarga (Ponto **A** \rightarrow Ponto **B**₁) ou então mantém-se em carga (Ponto **A** \rightarrow Ponto **B**₂), se bem que o valor da tensão seja igual em ambos os casos. Ao compararmos o novo valor de deformação com a deformação do ponto A podemos decidir qual a nova posição no gráfico tensão-deformação, pelo que a evolução da variável de dano deveria ser calculada em função da deformação. À partida seria possível escrever:

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\varepsilon), \quad (3.7)$$

mas facilmente se verifica que esta formulação está incompleta, porque não impede diminuições no valor da variável de dano, facto este que colide com a própria definição desta grandeza.

¹Informação sobre os fundamentos termodinâmicos dos modelos de dano pode ser encontrada no trabalho de [Silva, 2006].

Assim sendo, a função \mathbf{g} deve depender não só da deformação actuante no material mas também de uma outra grandeza κ , que depende da máxima deformação a que o material já esteve sujeito. Para tal define-se:

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\kappa), \quad \text{com } \kappa(\mathbf{t}) = \max\{\max[\varepsilon(\tau), \kappa_0]\}, \quad \tau \leq \mathbf{t}, \quad (3.8)$$

onde κ_0 está associado à deformação máxima para a qual o material não apresenta dano.

A expressão (3.8) permite modelar correctamente o comportamento pretendido, uma vez que mantém a rigidez e a resistência máxima do material com dano reduzidas em situação de descarga.

O passo seguinte na análise que estamos a efectuar é o de identificar se o material se encontra em carga ou descarga. Para tal, introduz-se um *potencial de dissipação ou superfície de activação* \mathbf{f} [Silva, 2006]. Este potencial compara a deformação actuante ε com a grandeza κ para decidir se existe ou não variável de dano. Sendo:

$$\mathbf{f}(\varepsilon, \kappa) = \varepsilon - \kappa, \quad (3.9)$$

definem-se as *condições de carga-descarga de Kuhn-Tucker* como:

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\kappa} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\kappa} \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

As duas primeiras condições agora enunciadas substituem a definição de κ da expressão (3.8), garantindo que é uma grandeza não decrescente e sempre igual ou superior à deformação actuante ε . A última das condições de Kuhn-Tucker expressa que apenas pode haver evolução da grandeza κ se o potencial de dissipação for nulo, isto é, quando a deformação ε e a grandeza κ são iguais.

3.3.2 Modelo de dano multiaxial

A hipótese da isotropia traduz-se em termos matemáticos por manter as direcções principais do tensor de rigidez inicial inalteradas. Assumindo o princípio da equivalência de deformação, a relação constitutiva secante é obtida directamente da generalização da equação (3.6), mas

relacionando os tensores de segunda ordem de tensão e deformação através de um tensor constitutivo de rigidez secante elástica de quarta ordem $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\sigma = \tilde{\mathbf{K}} : \varepsilon. \quad (3.11)$$

O tensor constitutivo de rigidez do material danificado $\tilde{\mathbf{K}}$ é obtido a partir do tensor constitutivo do material intacto \mathbf{K} de uma das seguintes formas [Silva, 2006]:

- penalizando igualmente todas as componentes do tensor constitutivo por uma única variável escalar de dano, $\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{K}$;
- considerando duas variáveis escalares de dano independentes, uma que afecta igualmente todas as componentes de tensor constitutivo \mathbf{K} , \mathbf{d}_1 , e outra, \mathbf{d}_2 , que afecta apenas a parcela volumétrica de \mathbf{K} .

Neste trabalho, por simplicidade, adopta-se a forma $\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{K}$, pelo que as equações do modelo constitutivo isotrópico são:

$\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{K} : \varepsilon$	Lei secante tensão-deformação
$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathbf{1} - \mathbf{d}}$	Relação tensão efectiva-tensão
$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{k})$	Lei de evolução do dano
$\mathbf{f}(\varepsilon, \kappa) = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon) - \kappa$	Potencial de dissipação
$\mathbf{f} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\kappa} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\kappa}\mathbf{f} = \mathbf{0}$	Condições de carga/descarga

Estas equações diferem das equações do modelo de dano uniaxial basicamente na definição da grandeza κ . No modelo uniaxial κ corresponde ao valor máximo entre a deformação limite em regime elástico linear e a máxima deformação a que o material já esteve sujeito, enquanto que no modelo multiaxial, por trabalharmos com um tensor de deformação, essa atribuição não é tão óbvia. Para contornarmos este problema define-se uma *deformação equivalente* $\tilde{\varepsilon}$ que depende directamente do tensor das deformações, $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon)$.

Uma das expressões mais simples para a definição da deformação equivalente corresponde a adoptar [Silva, 2006]:

$$\tilde{\varepsilon} = \mathbf{Y} = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{K} : \varepsilon. \quad (3.12)$$

Na hipótese da equivalência de deformações, a variável \mathbf{Y} corresponde à taxa de energia de deformação elástica [Lemaitre, 1992], isto é, representa a variação da energia livre ψ causada pelo aumento da variável de dano, a temperatura e deformação constantes [Silva, 2006].

Uma outra definição para a deformação adoptada pode ser obtida normalizando a equação (3.12) do seguinte modo:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon : \mathbf{K} : \varepsilon}{\mathbf{E}}}. \quad (3.13)$$

No entanto, as expressões anteriores conduzem a um comportamento igual do material à tracção e à compressão. Como é sabido, este facto não é de todo admissível para as alvenarias. Assim sendo, se se extraírem apenas as deformações positivas, o comportamento do material à tracção e à compressão já vai ser diferente, podendo adoptar-se a expressão [Silva, 2006]:

$$\tilde{\varepsilon} = \|\langle \varepsilon \rangle\| = \sqrt{\langle \varepsilon \rangle : \langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=III} \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad (3.14)$$

onde ε_i corresponde à deformação principal na direcção i e:

$$\langle (\cdot) \rangle = \frac{1}{2} [(\cdot) + |(\cdot)|]. \quad (3.15)$$

3.4 Modelos de dano local adoptados

3.4.1 Modelo com uma variável de dano [Comi e Perego, 2001b]

O modelo que se apresenta é um modelo constitutivo simples com apenas uma variável de dano \mathbf{d} apresentado por [Comi e Perego, 2001b].

Os autores definem as seguintes equações de estado:

$$\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{K} : \varepsilon, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{1}}{2}\varepsilon : \mathbf{K} : \varepsilon, \quad (3.17)$$

$$\chi = k \ln^n \frac{c}{\mathbf{1} - \xi}, \quad (3.18)$$

sendo as variáveis de estado a deformação elástica ε , a variável de dano \mathbf{d} e a variável interna ξ . As respectivas variáveis associadas são a tensão σ , a taxa de energia de deformação elástica \mathbf{Y} e a variável χ . Os parâmetros k , n e c dependem do material.

O potencial de dissipação neste modelo é definido por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{Y} - \chi) = \mathbf{Y} - \chi = \frac{\mathbf{1}}{2}\varepsilon : \mathbf{K} : \varepsilon - \chi \leq \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

As leis de evolução das variáveis internas obtêm-se a partir do potencial de dissipação:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{Y}} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}, \quad (3.20)$$

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \chi} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}, \quad (3.21)$$

onde γ representa um escalar positivo. Da análise das equações anteriores podemos concluir que para este modelo constitutivo, o valor da variável de dano \mathbf{d} coincide com o valor da variável interna ξ e com o escalar positivo γ .

As condições de Kuhn-Tucker de carga-descarga são:

$$\mathbf{f} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{d}} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} \dot{\gamma} = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Recordando a definição de tensão efectiva $\tilde{\sigma}$, o potencial de dissipação pode ser expresso em função desta grandeza e da matriz de flexibilidade elástica do material intacto \mathbf{F} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{Y} - \chi) = \mathbf{Y} - \chi = \frac{\mathbf{1}}{2}\tilde{\sigma} : \mathbf{F} : \tilde{\sigma} - \chi. \quad (3.23)$$

No caso uniaxial, o modelo de dano adoptado apresenta um comportamento elástico linear até uma deformação $\varepsilon_0 = \sqrt{\mathbf{k} \ln \mathbf{c}^n \frac{2}{\mathbf{E}}}$, limite a partir do qual começa a surgir dano e o material entra em regime não linear.

A maior limitação deste modelo é o facto de as extensões de compressão e de tracção provocarem o mesmo tipo de dano. Para considerar que apenas existe dano para extensões de tracção, considera-se que apenas se desenvolve dano se $\text{tr} \varepsilon \geq \mathbf{0}$.

3.4.2 Modelo com duas variáveis de dano [Comi e Perego, 2001a]

O modelo proposto por [Comi e Perego, 2001a] assume que o comportamento não linear do material é controlado por dois mecanismos diferentes, um de tracção e outro de compressão. Para tal, os autores consideram duas variáveis independentes de dano, \mathbf{d}_t e $\mathbf{d}_c \in [0, 1]$.

A relação constitutiva deste modelo é dada por:

$$\sigma = 2\mu \mathbf{e} + \mathbf{k}_+(\text{tr}^+ \varepsilon) \mathbf{I} + \mathbf{k}_-(\text{tr}^- \varepsilon) \mathbf{I}, \quad (3.24)$$

onde:

- $\mu = \mu_0(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)$ corresponde ao valor do módulo de distorção do material com dano instalado, e μ_0 representa o módulo de distorção do material intacto;
- $\mathbf{e} = \varepsilon - \frac{\text{tr}(\varepsilon)}{3} \mathbf{I}$ corresponde ao tensor deviatórico das deformações, e \mathbf{I} representa o tensor identidade de segunda ordem;
- $\mathbf{k}_+ = \mathbf{k}_0(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)$ e $\mathbf{k}_- = \mathbf{k}_0(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)$ representam o módulo de compressibilidade volumétrica do material com dano, se $\text{tr}^+(\varepsilon) \geq \mathbf{0}$ e $\text{tr}^-(\varepsilon) < \mathbf{0}$, respectivamente. \mathbf{k}_0 representa o módulo de compressibilidade volumétrica do material intacto;
- $\text{tr}^+(\varepsilon) = \frac{\text{tr}(\varepsilon) + |\text{tr}(\varepsilon)|}{2}$ e $\text{tr}^-(\varepsilon) = \frac{\text{tr}(\varepsilon) - |\text{tr}(\varepsilon)|}{2}$.

Neste modelo assumem-se dois potenciais de dissipação, um para estados predominantemente de tracção, \mathbf{f}_t , e outro para estados predominantemente de compressão, \mathbf{f}_c , tal que:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{J}_2 - \mathbf{a}_t \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{b}_t \mathbf{r}_t \mathbf{I}_1 - \mathbf{k}_t \mathbf{r}_t^2 (\mathbf{1} - \alpha \mathbf{d}_c), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{J}_2 + \mathbf{a}_c \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{b}_c \mathbf{r}_c \mathbf{I}_1 - \mathbf{k}_c \mathbf{r}_c^2, \quad (3.26)$$

em que:

- $\mathbf{a}_t, \mathbf{b}_t, \mathbf{k}_t, \mathbf{a}_c, \mathbf{b}_c, \mathbf{k}_c$ e α são parâmetros não negativos do material;
- $\mathbf{I}_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ é o primeiro invariante do tensor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$ e $\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}$ representa o segundo o invariante do tensor deviatórico das tensões \mathbf{s} ;
- \mathbf{r}_c e \mathbf{r}_t correspondem às funções de evolução do dano (substituem a função \mathbf{g}) e controlam os ramos de endurecimento e amolecimento do gráfico tensão-deformação unidimensional.

As funções \mathbf{r}_c e \mathbf{r}_t podem ser calculadas do seguinte modo:

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{d}_i) = \begin{cases} \mathbf{1} - \frac{\mathbf{1} - (\frac{\sigma_e}{\sigma_0})_i}{\mathbf{d}_{0i}^2} (\mathbf{d}_{0i} - \mathbf{d}_i)^2, & \mathbf{d}_i < \mathbf{d}_{0i} \\ \{\mathbf{1} - (\frac{\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_{0i}}{\mathbf{1} - \mathbf{d}_{0i}})^{c_i}\}^{0.75}, & \mathbf{d}_i \geq \mathbf{d}_{0i} \end{cases} \quad \mathbf{i} = \mathbf{t}, \mathbf{c}, \quad (3.27)$$

onde \mathbf{d}_{0i} representa o valor da variável de dano no pico da curva tensão-deformação uniaxial associado a $\sigma = \sigma_{0i}$, e \mathbf{c}_i o parâmetro que controla o declive do ramo de amolecimento. O valor da tensão limite do regime elástico é representada por σ_{ei} , onde o índice i representa um estado de tracção (t) ou de compressão (c).

Neste ponto é importante salientar que o termo $(\mathbf{1} - \alpha \mathbf{d}_c)$ presente na equação do potencial de dissipação para estados predominantemente de tracção (3.25) permite modelar o decréscimo da resistência em tracção devido à existência de dano de compressão.

Para cada mecanismo que descreve o comportamento não linear do material as condições de Kuhn-Tucker são escritas do seguinte modo:

$$\mathbf{f}_t \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{d}}_t \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_t \dot{\mathbf{d}}_t = \mathbf{0}; \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f}_c \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{d}}_c \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{f}_c \dot{\mathbf{d}}_c = \mathbf{0}; \quad (3.29)$$

O modelo constitutivo agora apresentado tem sido usado em modelos de elementos finitos convencionais, pelo que as expressões para os potenciais de dissipação são escritas no espaço das deformações:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_t = 4\mu^2 \mathbf{J}_\varepsilon - 9\mathbf{a}_t[\mathbf{k}_+ \mathbf{tr}^+(\varepsilon) + \mathbf{k}_- \mathbf{tr}^-(\varepsilon)]^2 + 3\mathbf{b}_t \mathbf{r}_t [\mathbf{k}_+ \mathbf{tr}^+(\varepsilon) + \mathbf{k}_- \mathbf{tr}^-(\varepsilon)] - \mathbf{k}_t \mathbf{r}_t^2 (1 - \alpha \mathbf{d}_c) \\ \mathbf{f}_c = 4\mu^2 \mathbf{J}_\varepsilon + 9\mathbf{a}_c[\mathbf{k}_+ \mathbf{tr}^+(\varepsilon) + \mathbf{k}_- \mathbf{tr}^-(\varepsilon)]^2 + 3\mathbf{b}_c \mathbf{r}_c [\mathbf{k}_+ \mathbf{tr}^+(\varepsilon) + \mathbf{k}_- \mathbf{tr}^-(\varepsilon)] - \mathbf{k}_c \mathbf{r}_c^2 \end{cases} \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{J}_\varepsilon = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{e}$.

Neste trabalho, a aplicação deste modelo de dano baseia-se no conhecimento do campo de tensões efectivas (Capítulo 5). Para tal, apresentam-se de seguida as expressões dos potenciais de dissipação reescritas em função do tensor das tensões efectivas, assim como a relação entre o campo de tensões e o campo de tensões efectivas:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_t = [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)]^2 \mathbf{J}_{\tilde{\sigma}} - \mathbf{a}_t [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t) \mathbf{tr}^+(\tilde{\sigma}) + (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \mathbf{tr}^-(\tilde{\sigma})]^2 \\ \quad + \mathbf{b}_t \mathbf{r}_t [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t) \mathbf{tr}^+(\tilde{\sigma}) + (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \mathbf{tr}^-(\tilde{\sigma})] - \mathbf{k}_t \mathbf{r}_t^2 (1 - \alpha \mathbf{d}_c) \\ \mathbf{f}_c = [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)]^2 \mathbf{J}_{\tilde{\sigma}} + \mathbf{a}_c [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t) \mathbf{tr}^+(\tilde{\sigma}) + (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \mathbf{tr}^-(\tilde{\sigma})]^2 \\ \quad + \mathbf{b}_c \mathbf{r}_c [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_t) \mathbf{tr}^+(\tilde{\sigma}) + (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \mathbf{tr}^-(\tilde{\sigma})] - \mathbf{k}_c \mathbf{r}_c^2 \end{cases} \quad (3.31)$$

sendo $\mathbf{J}_{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{s}} : \tilde{\mathbf{s}}$.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{\sigma}_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

com

$$\begin{cases} \mathbf{A} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \frac{2}{3} \mathbf{d}_c) \\ \mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_t) \frac{\mathbf{d}_c}{3} \\ \mathbf{C} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \end{cases} \quad \text{se } \mathbf{tr}(\tilde{\sigma}) \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)(\mathbf{1} - \frac{2}{3}\mathbf{d}_t) \\ \mathbf{B} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_c)\frac{\mathbf{d}_t}{3} \\ \mathbf{C} = (\mathbf{1} - \mathbf{d}_t)(\mathbf{1} - \mathbf{d}_c) \end{cases} \quad \text{se } \text{tr}(\tilde{\sigma}) < \mathbf{0}.$$

Tal como descrito em [Silva, 2006], o modelo constitutivo agora apresentado obriga a um maior esforço computacional do que o modelo apenas com uma variável de dano, uma vez que no cálculo da evolução das variáveis de dano não é possível obter \mathbf{d}_c e \mathbf{d}_t analiticamente a partir das expressões dos potenciais de dissipação.

3.4.3 Modelo de dano de Mazars [Paula, 2001]

O modelo de dano apresentado originalmente em [Mazars, 1984] introduz uma variável escalar de dano \mathbf{d} .

Neste modelo constitutivo admite-se que o aparecimento e a evolução do dano decorre apenas da existência de extensões de tracção. Assim sendo, a deformação equivalente é calculada em função da parte positiva das componentes principais do tensor das deformações:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_I \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_{II} \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_{III} \rangle_+^2} = \sqrt{\sum_{i=I}^{i=III} \langle \varepsilon_i \rangle_+^2}, \quad (3.33)$$

onde $\langle (\cdot) \rangle_+ = \frac{1}{2}[(\cdot) + |(\cdot)|]$ e $\langle (\cdot) \rangle_- = \frac{1}{2}[(\cdot) - |(\cdot)|]$.

Deste modo, $\langle (\varepsilon_i) \rangle_+$ representa a i -ésima componente positiva do tensor de deformações principais, dada por:

$$\langle (\varepsilon_i) \rangle_+ = \frac{1}{2}[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|]. \quad (3.34)$$

Segundo o modelo sugerido, o dano surge quando a deformação equivalente atinge um valor de referência igual à deformação ε_{d0} , que corresponde à resistência máxima em ensaios de tracção uniaxial. Para o caso unidimensional virá:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{\mathbf{f}_t}{\mathbf{E}}, \quad (3.35)$$

onde \mathbf{f}_t é a resistência à tracção uniaxial do material.

O potencial de dissipação neste modelo é dado por:

$$\mathbf{f}(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{d}) = \tilde{\varepsilon} - \chi(\mathbf{d}) \leq \mathbf{0} \quad \text{com } \chi(\mathbf{0}) = \varepsilon_{d0}. \quad (3.36)$$

Atendendo ao princípio da irreversibilidade do processo de dano, a lei de evolução da variável \mathbf{d} é expressa por:

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad \text{se } \mathbf{f} < \mathbf{0} \quad \text{ou } \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{e } \dot{\mathbf{f}} < \mathbf{0}; \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{F}(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \quad \text{se } \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{e } \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

onde $\mathbf{F}(\tilde{\varepsilon})$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente, de modo que $\dot{\mathbf{d}} \geq \mathbf{0}$ para qualquer $\dot{\tilde{\varepsilon}} \geq 0$.

Uma característica particular do modelo de Mazars é a forma que a relação (3.38) toma para os casos mais simples de solitação, como são os casos de tracção e compressão uniaxiais. Para tal definem-se duas variáveis escalares independentes, \mathbf{d}_t e \mathbf{d}_c , que representam o dano de tracção e compressão, respectivamente. As leis de evolução destas duas variáveis são dadas por:

$$\dot{\mathbf{d}}_t = \mathbf{F}_t(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+; \quad (3.39)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_c = \mathbf{F}_c(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+, \quad (3.40)$$

sendo:

$$\mathbf{F}_t(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_t)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{\mathbf{A}_t \mathbf{B}_t}{\exp[\mathbf{B}_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}; \quad (3.41)$$

$$\mathbf{F}_c(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{d0}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_c)}{\tilde{\varepsilon}^2} + \frac{\mathbf{A}_c \mathbf{B}_c}{\exp[\mathbf{B}_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}. \quad (3.42)$$

As expressões (3.39) e (3.40) são integráveis [Paula, 2001], resultando em:

$$\mathbf{d}_t(\tilde{\varepsilon}) = \mathbf{1} - \frac{\varepsilon_{d0}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_t)}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{\mathbf{A}_t}{\exp[\mathbf{B}_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}; \quad (3.43)$$

$$\mathbf{d}_c(\tilde{\varepsilon}) = \mathbf{1} - \frac{\varepsilon_{d0}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_c)}{\tilde{\varepsilon}} + \frac{\mathbf{A}_c}{\exp[\mathbf{B}_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]}. \quad (3.44)$$

Os parâmetros \mathbf{A}_t , \mathbf{B}_t e $\tilde{\varepsilon}_{d0}$ são parâmetros característicos do material que podem ser determinados em ensaios de tracção uniaxial com deformação controlada. Quanto aos outros parâmetros característicos do material \mathbf{A}_c e \mathbf{B}_c , estes podem ser determinados em ensaios de compressão uniaxial com deformação controlada.

De forma a ser possível incluir estados de tensão mais complexos, preservando as características dos casos uniaxiais, a variável de dano \mathbf{d} correspondente é definida como uma combinação linear de \mathbf{d}_t e \mathbf{d}_c :

$$\mathbf{d} = \alpha_t \mathbf{d}_t + \alpha_c \mathbf{d}_c, \quad (3.45)$$

respeitando-se sempre $\alpha_t + \alpha_c = \mathbf{1}$. Naturalmente, em tracção uniaxial temos $\alpha_t = \mathbf{1}$, e em compressão uniaxial $\alpha_c = \mathbf{1}$.

Neste trabalho usa-se a proposta de [Perego, 1990] para a determinação dos coeficientes α_t e α_c :

$$\alpha_t = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}; \quad (3.46)$$

$$\alpha_c = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}, \quad (3.47)$$

com:

$$\varepsilon_T = \frac{\mathbf{1} + \nu}{\mathbf{E}} \langle \tilde{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{\mathbf{E}} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_+ \mathbf{I}; \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_C = \frac{\mathbf{1} + \nu}{\mathbf{E}} \langle \tilde{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{\mathbf{E}} \sum_i \langle \tilde{\sigma}_i \rangle_- \mathbf{I}, \quad (3.49)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade e $\langle \tilde{\sigma} \rangle_+$ e $\langle \tilde{\sigma} \rangle_-$ são as partes positiva e negativa do tensor das

tensões efectivas principal, calculado em função das deformações actuais aplicando a relação elástica isotrópica.

O dano escalar \mathbf{d} afecta directamente todas as componentes do tensor de rigidez elástica. Assim sendo, a relação constitutiva na forma secante pode ser escrita como:

$$\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{K} : \varepsilon. \quad (3.50)$$

3.5 Localização das deformações

A rotura nos materiais quasi-frágeis, como é o caso das alvenarias, resulta de uma microfissuração difusa que se agrupa e propaga de modo a originar uma macrofenda, isto é, existe localização da evolução das deformações numa zona restrita do material.

Consideremos um elemento representativo dum painel de alvenaria que está sujeito a um esforço de tracção (Figura 3.4). Por hipótese vamos assumir que estamos perante um meio contínuo e homogéneo, e que o material apresenta um comportamento elástico linear até a um valor de deformação ε_0 . Como é facilmente perceptível, o material nunca é totalmente homogéneo, devido à existência de vazios e de defeitos na sua microestrutura. Assim sendo, é perfeitamente natural que exista uma zona do elemento ligeiramente mais fragilizada relativamente às restantes zonas. Admitamos que essa zona tem um comprimento λ . Por simplicidade assume-se ainda que o material quando ultrapassa a deformação ε_0 entra num ramo de amolecimento que tem uma relação tensão-deformação linear.

No instante em que a zona fragilizada atinge a deformação ε_0 , imediatamente antes das restantes secções, o campo de deformações deixa de ser homogéneo, pois a zona fragilizada entra em amolecimento e as restantes zonas descarregam elasticamente. Se o modelo constitutivo for local, a resposta global da estrutura pode ser representada pelo gráfico tensão-variação de deformação da Figura 3.4, onde o ramo de amolecimento depende directamente do comprimento da zona fragilizada, λ .

Ao transpormos esta situação para um modelo de elementos finitos (Figura 3.5), verificamos que a resposta não é objectiva, isto é, depende significativamente da discretização de elementos finitos. Se considerarmos um modelo de elementos finitos convencionais com

elementos de deformação constante, a largura da zona de localização das deformações fica associada à largura do elemento finito mais danificado. Ao refinarmos esta malha, a largura do elemento finito mais danificado também vai diminuir, o que implica uma menor dissipação de energia no processo. Na situação limite de termos um número infinito de elementos finitos, o modelo reproduziria uma resposta sem dissipação de energia, o que claramente não é aceitável.

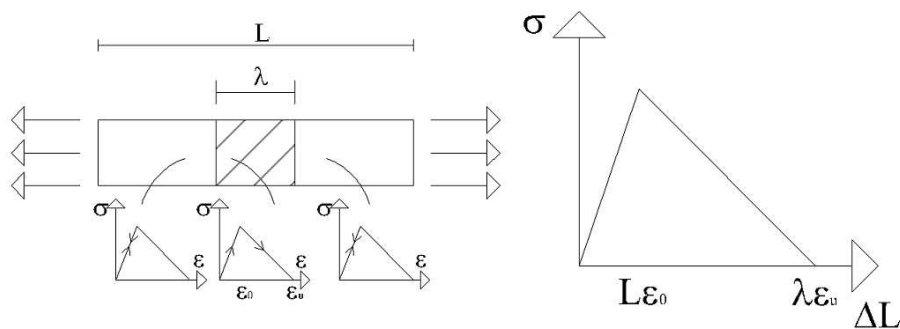


Figura 3.4: Localização das deformações: resposta de um modelo de dano local.

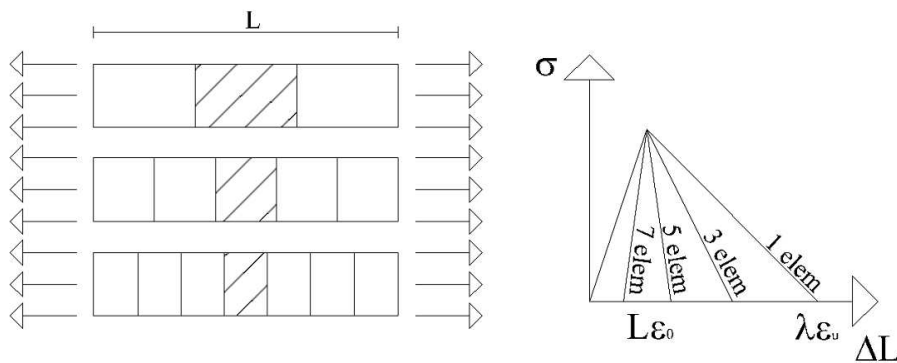


Figura 3.5: Resposta qualitativa do modelo de elementos finitos com um modelo de dano local: resposta não objectiva.

Este comportamento é originado pelo facto de o modelo local se basear na hipótese de que o material pode ser tratado como contínuo até uma escala infinitamente pequena. No entanto, nenhum material é contínuo a este nível, e no caso das alvenarias, a resposta estrutural é governada por processos irreversíveis ao nível da microestrutura. Para contornar este problema é preciso introduzir nos modelos constitutivos locais informação adicional sobre

os fenômenos que ocorrem ao nível da microestrutura. É neste contexto que aparecem os métodos de regularização.

3.6 Método de regularização adotado

Existem várias metodologias para evitar a localização das deformações numa largura infinitamente pequena e regularizar os modelos de dano local [Silva, 2006]. Neste trabalho usa-se uma metodologia conhecida por *Modelo Integral Não Local*.

Os modelos de dano não local têm de obedecer a dois princípios fundamentais: têm de respeitar a dissipação de tensões observada no modelo local e têm de coincidir com o modelo local enquanto o material se encontra em regime elástico ou quando se encontra em descarga.

No caso particular dos modelos integrais não locais, a ponderação espacial é conseguida através de um comprimento característico l . Este parâmetro é classificado por alguns autores como um parâmetro que contém informação sobre a microestrutura do material. No entanto outros há que o consideram apenas como um "limitador da localização" [Silva, 2006]. A introdução do parâmetro l permite obter um modelo não local bem formulado e deduzir um *comprimento característico não local* λ_c , que pode ser relacionado com a largura da ZPF (Zona em Processo de Fractura) em cada instante da evolução do dano no material. Num modelo de dano contínuo regularizado, o comprimento λ_c corresponde a uma largura finita, independente da discretização, que diminui com a evolução do dano de modo a simular o processo de fractura [Silva, 2006].

Um modelo integral não local introduz uma variável não local na relação constitutiva secante ou no potencial de dissipação \mathbf{f} [Silva, 2006]. A variável não local $\bar{\mathbf{a}}$ é obtida através de uma ponderação do tipo:

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \int_V \mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{a}(\mathbf{s}) dV, \quad (3.51)$$

onde $\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ é a função de ponderação. Tal como nos modelos desenvolvidos no âmbito de [Silva, 2006], o autor considera neste trabalho a função de Gauss normalizada, definida através de:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{W}_0(\mathbf{x})} \exp - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{2\mathbf{l}^2}, \quad (3.52)$$

com:

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{x}) = \int_V \exp - \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|^2}{2\mathbf{l}^2} dV, \quad (3.53)$$

A normalização através da função $\mathbf{W}_0(\mathbf{x})$ permite garantir a reprodução de um campo uniforme com o modelo não local. O comprimento característico \mathbf{l} é constante e controla a "abertura" da função de ponderação não local.

Quando se toma a função de Gauss como função de ponderação, é relativamente simples deduzir analiticamente um comprimento característico não local λ_c [Silva, 2006].

Embora o conceito de ponderação não local se apresente bastante simples e intuitivo, bastando substituir algumas variáveis locais por variáveis não locais, uma escolha errada para a variável não local pode originar problemas e não permitir reproduzir a realidade física do problema [Silva, 2006]. Neste trabalho, quando se usa o modelo de uma variável de dano de Comi e Perego [2001b] implementa-se uma regularização não local com base no valor da taxa de energia de deformação, $\bar{\mathbf{Y}}$, que se apresenta como uma opção interessante pois corresponde a ponderar espacialmente uma grandeza escalar, simplificando assim o modelo numérico.

Num modelo integral não local com $\bar{\mathbf{Y}}$, obtém-se a seguinte relação entre o comprimento característico não local λ_c e a variável de dano \mathbf{d} [Comi e Perego, 2001b]:

$$\lambda_c = \sqrt{2}\pi\mathbf{l}[-\ln \frac{\mathbf{n}}{2 \ln \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{1}-\mathbf{d}}}]^{-0.5}. \quad (3.54)$$

No modelo de Mazars [1984] usa-se uma regularização integral não local com base no valor da deformação equivalente $\bar{\varepsilon}$, e no modelo de dano de duas variáveis de Comi e Perego [2001a] escolhem-se os invariantes do tensor das tensões efectivas para regularizar o problema matemático, trabalhando-se com os potenciais de dissipação escritos em função desses invariantes (expressão (3.31)).

3.6.1 Modelo integral não local e elementos finitos não convencionais

Nos elementos finitos não convencionais, o modelo não local não se deve basear na malha de elementos finitos, pois cada elemento cobre, à partida, uma área demasiado abrangente. Assim sendo, numa formulação não convencional de elementos finitos escolhem-se sub-malhas, interiores à malha de elementos finitos global, que servem de base ao modelo não local.

No modelo integral não local associa-se esta malha à malha de pontos de integração (pontos de Lobatto nesta dissertação). A vantagem de associar o modelo integral não local à malha de pontos de integração é o evitar da construção de uma segunda malha mais refinada do que a malha de macroelementos finitos inicial. Como os pontos de integração não têm uma distribuição uniforme, torna-se necessário estudar a sua distribuição, de forma a garantir que ao longo do processo de evolução da fenda existam pelo menos 2 ou 3 pontos dentro da ZPF.

O modelo não local funciona correctamente se permitir a obtenção de respostas objectivas para discretizações envolvendo graus de aproximação e/ou número de elementos diferentes.

Capítulo 4

Elementos Finitos Híbridos e Mistos

4.1 Considerações iniciais

Hoje em dia, a maioria dos modelos numéricos para a análise de estruturas ao dispor dos projectistas são baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), na sua formulação tradicional que se baseia na aproximação do campo de deslocamentos. Estes modelos (também conhecidos por modelos de compatibilidade, por verificarem as condições de admissibilidade cinemática) são muito simples do ponto de vista conceptual e permitem ao utilizador visualizar o significado físico de todas as grandezas intervenientes no modelo, possuindo ainda uma robusta fundamentação matemática que permite estabelecer as condições para a convergência das soluções numéricas aproximadas. Estas são as principais razões pelas quais este método obteve tanto sucesso ao nível do software comercial para a análise de estruturas.

O MEF na sua vertente dos modelos de compatibilidade aproxima o campo de deslocamentos independentes, dos quais posteriormente se obterá o campo de tensões, através da aplicação da relação de compatibilidade e da relação constitutiva. Associado a este modo de proceder resulta um maior erro na aproximação do campo de tensões do que na aproximação do campo de deslocamentos. Outro aspecto a ter em conta aquando da aplicação deste tipo de modelo é o da solução do problema satisfazer todas as condições de admissibilidade ci-

nemática, pelo que o campo de tensões não verificará as condições de equilíbrio (localmente), resultando numa solução contra a segurança do ponto de vista do dimensionamento de estruturas, de acordo com o Teorema Estático da Análise Plástica Limite.

Com intuito de se ultrapassar estas limitações, tem-se vindo a desenvolver formulações alternativas aos modelos de compatibilidade, nomeadamente elementos finitos híbridos e mistos [Freitas et al., 1999].

A designação híbrida é atribuída a modelos em que se definem aproximações independentes no domínio e na fronteira do elemento finito, enquanto que numa formulação mista se define mais do que uma aproximação independente no domínio do elemento [Silva, 2006]. Ao longo deste trabalho estes tipos de formulações do MEF serão apelidados de formulações não-convencionais.

4.2 Formulações não-convencionais de elementos finitos

As formulações não-convencionais de elementos finitos partem de quatro aspectos básicos [Freitas, 1989], a saber:

- as formulações são desenvolvidas a partir dos princípios fundamentais da Mecânica;
- as variáveis generalizadas do modelo discreto podem ser definidas igualando o trabalho realizado por grandezas duais nos modelos discreto e contínuo;
- as funções de aproximação podem ser hierárquicas e a sua escolha não está condicionada pelo conceito de interpolação nodal. A existência de nós apenas tem o intuito de permitir a definição geométrica do problema em estudo;
- os teoremas da Programação Matemática permitem recuperar *a posteriori* os teoremas variacionais associados às formulações híbridas e mistas [Freitas, 1989] [Castro, 1996].

A partir destes pressupostos é possível obter três tipos de formulações de elementos finitos não-convencionais [Freitas et al., 1999]: híbrida-mista, híbrida e híbrida-Trefftz. As três formulações distinguem-se pelas condições impostas *a priori* às funções de aproximação no domínio. Na formulação híbrida-mista não se impõe qualquer restrição e todas as relações fundamentais no domínio são impostas de forma ponderada. A formulação híbrida obtém-se

da híbrida-mista quando se obriga a que a aproximação no domínio verifique o equilíbrio ou a compatibilidade. Por fim, a formulação híbrida-Trefftz deriva da formulação híbrida, impondo-se que as aproximações no domínio verifiquem simultaneamente as condições de compatibilidade, equilíbrio e as relações constitutivas.

Para cada uma destas formulações podem ser definidos modelos de tensão ou de deslocamento, distintos no que diz respeito ao tratamento das relações fundamentais no domínio e na forma utilizada para assegurar a ligação entre elementos finitos adjacentes.

Nos modelos de tensão integra-se por partes a equação que resulta da imposição ponderada da compatibilidade no domínio. No que diz respeito à ligação entre elementos adjacentes, ela é efectuada impondo ponderadamente a condição de equilíbrio na fronteira interelementar. Este modo de proceder leva à classificação dessas fronteiras como fronteiras estáticas.

Quanto aos modelos de deslocamento, a equação a ser integrada por partes é a que resulta da imposição ponderada da condição de equilíbrio no domínio. Nestes tipos de formulação a ligação entre elementos faz-se pela imposição de forma ponderada da compatibilidade na fronteira interelementar, pelo que esta fronteira é classificada como cinemática.

Uma consequência da integração por partes de uma relação fundamental no domínio é uma imposição mais fraca dessa equação. Este facto reveste-se de importância aquando da comparação destas duas formulações: enquanto que nos modelos de tensão temos uma imposição da compatibilidade mais fraca que a imposição do equilíbrio, nos modelos de deslocamento passa-se o inverso. Assim sendo, a principal vantagem dos modelos de tensão face aos de deslocamento é a de permitir obter soluções *quasi*-equilibradas localmente, do lado da segurança no dimensionamento de estruturas.

Neste ponto importa enunciar alguns aspectos positivos das formulações não convencionais [Silva, 2006]:

- no caso dos híbridos mistos de tensão existe grande flexibilidade na escolha das funções de aproximação.

Qualquer sistema completo de funções pode ser utilizado para aproximação dos campos de tensões e/ou deslocamentos. Assim sendo, podem-se escolher funções cujas propriedades permitam melhorar o desempenho numérico dos modelos;

- como se relaxam os constrangimentos de conformidade, é possível trabalhar com macro-

elementos e adoptar preferencialmente um refinamento tipo- p em detrimento de um refinamento tipo- h ¹. Assim sendo, não é necessário utilizar malhas com muitos elementos e é desnecessário efectuar remalhagens ao longo de uma análise incremental;

- as aproximações dos diferentes campos são definidas de forma independente, o que permite ter aproximações de graus diferentes para os vários campos;
- este tipo de formulações é pouco sensível à distorção da malha de elementos;
- nos modelos de tensão o equilíbrio entre elementos finitos é imposto de forma ponderada, o que se traduz numa contribuição bastante significativa para a qualidade do campo estático.

No entanto, estas vantagens face aos elementos finitos tradicionais não são suficientes para mitigar as suas desvantagens, razão pela qual os programas comerciais de análise de estruturas continuam a utilizar a formulação tradicional.

Entre as principais desvantagens dos elementos finitos não-convencionais destacam-se [Silva, 2006]:

- as formulações são conceptualmente mais complicadas no que diz respeito ao tipo de aproximações definidas;
- como se abandona o conceito de interpolação nodal, as variáveis discretas perdem o significado físico de grandezas nodais, uma das grandes vantagens do MEF tradicional, que é dotado de uma simplicidade e elegância bastante apreciada pelos utilizadores;
- devido às várias aproximações independentes e ao carácter hierárquico das funções de aproximação, os sistemas governativos resultam com muitos graus de liberdade, mas ainda assim altamente esparsos ². Este facto obriga a que sejam utilizados algoritmos especialmente desenhados para lidar com este tipo de sistemas;

¹Um refinamento tipo- h consiste num aumento do número de elementos mantendo o grau das aproximações, enquanto que um refinamento tipo- p consiste em aumentar o grau das aproximações mantendo constante o número de elementos.

²A esparsidade é uma vantagem, porque permite a utilização de técnicas muito eficazes para a resolução de sistemas de equações.

- é necessário uma atenção especial na escolha dos graus das várias aproximações de modo a minimizar o aparecimento de modos espúrios, os quais correspondem a dependências no sistema de equações;
- o modelo misto não assegura o equilíbrio nem a compatibilidade, pelo que a análise dos resultados tem que ser feita de forma "consciente". Este cuidado poderá ser pouco confortável para o utilizador;
- a matriz do sistema governativo não é positiva definida. Apesar disto, é possível resolver o sistema de equações, e só existem singularidades caso existam dependências.

4.3 Formulações não-convencionais adoptadas

No âmbito deste trabalho aplicar-se-ão as formulações não-convencionais de elementos finitos utilizando uma relação constitutiva baseada na Mecânica do Dano Contínuo.

Recuperando algumas das conclusões enunciadas em [Silva, 2006], para este tipo de análise, uma variante à formulação híbrida-mista de tensão (baseada na aproximação de tensões efectivas) e a formulação híbrida de deslocamento conduzem a modelos numéricos estáveis, robustos e que convergem de forma mais rápida que o método dos elementos finitos tradicional.

Assim sendo, estas duas formulações serão as adoptadas neste estudo.

Neste capítulo apresenta-se a formulação híbrida-mista de tensão (HMT) e híbrida de deslocamento (HD) para análises elásticas lineares. No caso da formulação HD também se apresentam as modificações que têm que ser introduzidas no modelo para permitir a execução de análises fisicamente não-lineares. Quanto à formulação HMT, as alterações necessárias para a execução deste tipo de análises são mais profundas, pelo que se dedica o Capítulo 5 a este modelo.

4.4 Modelos híbridos-mistos de tensão para análise elástica linear

4.4.1 Definição das aproximações

Nos modelos híbridos-mistos de tensão é necessário aproximar simultaneamente e de forma independente os campos de tensões e de deslocamentos no domínio de cada elemento finito, bem como o campo de deslocamentos ao longo das fronteiras elementares não restringidas cinematicamente. A necessidade de aproximar os campos de deslocamentos no domínio (\mathbf{V}) e na fronteira advém do facto de não se verificar à partida o equilíbrio, quer no domínio, quer na fronteira, pelo que este terá que ser imposto de forma ponderada.

A imposição ponderada do equilíbrio nas fronteiras não restringidas cinematicamente fará com que essas fronteiras sejam classificadas como fronteiras estáticas (Γ_σ).

Assim sendo, as aproximações efectuadas podem ser sintetizadas em:

$$\sigma = \mathbf{S}\mathbf{X} \quad \text{em } V, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v \quad \text{em } V, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\gamma \mathbf{q}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (4.3)$$

O vector σ agrupa as componentes independentes do tensor das tensões e o vector \mathbf{u} os deslocamentos independentes a aproximar. As matrizes \mathbf{S} , \mathbf{U}_v e \mathbf{U}_γ contêm, respectivamente, as funções de aproximação das tensões no domínio, dos deslocamentos no domínio e dos deslocamentos na fronteira. Os vectores \mathbf{X} , \mathbf{q}_v e \mathbf{q}_γ listam os pesos das funções de aproximação a que estão associados. É comum designar-se por tensões generalizadas as componentes do vector \mathbf{X} , deslocamentos generalizados no domínio a \mathbf{q}_v , e deslocamentos generalizados na fronteira a \mathbf{q}_γ .

4.4.2 Sistema governativo de um elemento finito híbrido-misto de tensão

O sistema governativo de um elemento finito híbrido-misto de tensão é obtido impondo ponderadamente, no sentido de Galerkin, o equilíbrio, a compatibilidade e a relação constitutiva no domínio do elemento, bem como o equilíbrio na fronteira estática.

4.4.2.1 Imposição ponderada do equilíbrio no domínio

Da imposição ponderada do equilíbrio no domínio do elemento finito vem:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}\sigma + \mathbf{b}) dV = 0. \quad (4.4)$$

Substituindo na equação (4.4) a aproximação do campo de tensões (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{b}) dV &= 0 \\ \int_V [\mathbf{U}_v^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{U}_v^T \mathbf{b}] dV &= 0 \\ \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{D}\mathbf{S} dV \mathbf{X} &= - \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Definindo o operador de compatibilidade no domínio \mathbf{A}_v e o vector de forças generalizadas no domínio \mathbf{Q}_v como:

$$\mathbf{A}_v = \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_v dV, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{Q}_v = \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV, \quad (4.7)$$

a equação (4.5) pode vir escrita deste modo:

$$\mathbf{A}_v^T \mathbf{X} = -\mathbf{Q}_v. \quad (4.8)$$

4.4.2.2 Imposição ponderada do equilíbrio na fronteira estática

Ao impormos ponderadamente o equilíbrio na fronteira estática do elemento finito vem:

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}\sigma - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma = 0. \quad (4.9)$$

Substituindo na equação (4.9) a aproximação do campo de tensões (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}\mathbf{S}\mathbf{X} - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma &= 0 \\ \int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{N}\mathbf{S}\mathbf{X} - \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma] d\Gamma_\sigma &= 0 \\ \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{N}\mathbf{S} d\Gamma_\sigma \mathbf{X} &= \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Definindo o operador de compatibilidade na fronteira \mathbf{A}_γ e o vector de forças generalizadas na fronteira \mathbf{Q}_γ como:

$$\mathbf{A}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}\mathbf{S})^T \mathbf{U}_\gamma d\Gamma_\sigma, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Q}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma, \quad (4.12)$$

a equação (4.10) pode vir escrita deste modo:

$$\mathbf{A}_\gamma^T \mathbf{X} = \mathbf{Q}_\gamma. \quad (4.13)$$

4.4.2.3 Imposição ponderada da relação constitutiva

A imposição ponderada da relação constitutiva no domínio do elemento finito, assumido comportamento elástico linear, permite escrever:

$$\int_V \mathbf{S}^T (\varepsilon - \mathbf{F}\sigma) dV = 0. \quad (4.14)$$

Substituindo na equação (4.14) a aproximação do campo de tensões (4.1) obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{X}) dV &= 0 \\
\int_V [\mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}^T \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{X}] dV &= 0 \\
\int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV &= \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{F}\mathbf{S} dV \mathbf{X}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Definindo o operador de flexibilidade generalizado \mathbb{F} e as deformações generalizadas no domínio \mathbf{e} como:

$$\mathbb{F} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{F}\mathbf{S} dV, \tag{4.16}$$

$$\mathbf{e} = \int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV, \tag{4.17}$$

a equação (4.15) pode vir escrita no seguinte modo:

$$\mathbf{e} = \mathbb{F}\mathbf{X}. \tag{4.18}$$

4.4.2.4 Imposição ponderada da compatibilidade

Da imposição ponderada da compatibilidade no elemento finito vem:

$$\int_V \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0. \tag{4.19}$$

O desenvolvimento da equação (4.19) conduz a:

$$\int_V \mathbf{S}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV. \tag{4.20}$$

Atendendo à definição (4.17), a continuação do desenvolvimento de (4.20) leva a:

$$\mathbf{e} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV. \tag{4.21}$$

Integrando por partes o segundo termo da equação (4.21), para incluir a condição de Dirichlet, vem:

$$\mathbf{e} = - \int_V (\mathbf{DS})^T \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{NS})^T \mathbf{u} d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{NS})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (4.22)$$

Substituindo a aproximação do campo de deslocamentos no domínio (4.2) e na fronteira estática (4.3) em (4.22) obtemos:

$$\mathbf{e} = - \int_V (\mathbf{DS})^T \mathbf{U}_v dV \mathbf{q}_v + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{NS})^T \mathbf{U}_\gamma d\Gamma_\sigma \mathbf{q}_\gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{NS})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u. \quad (4.23)$$

Definindo o vector das deformações generalizadas associadas aos deslocamentos impostos na fronteira cinemática $\bar{\mathbf{e}}$ como:

$$\bar{\mathbf{e}} = \int_{\Gamma_u} (\mathbf{NS})^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u, \quad (4.24)$$

e atendendo às definições (4.6) e (4.11), a equação (4.23) pode vir escrita do seguinte modo:

$$\mathbf{e} = -\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}. \quad (4.25)$$

Se recuperarmos a equação obtida aquando da imposição ponderada da relação constitutiva (4.18), a equação (4.25) virá escrita do seguinte modo:

$$\mathbb{F}\mathbf{X} = -\mathbf{A}_v \mathbf{q}_v + \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma + \bar{\mathbf{e}}. \quad (4.26)$$

4.4.2.5 Sistema governativo do modelo híbrido-misto

O sistema governativo do elemento finito híbrido misto, escrito em forma matricial, resulta da junção das equações (4.8), (4.13) e (4.26):

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{A}_v^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\gamma^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ -\mathbf{Q}_v \\ -\mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Na análise de uma estrutura constituída por vários elementos finitos, a ligação entre elementos adjacentes será estabelecida através da partilha da aproximação do campo de deslocamentos na fronteira interelementar. Assim sendo, à excepção do operador de compatibilidade na fronteira \mathbf{A}_γ , haverá independência entre todas as matrizes estruturais, quer seja ao nível de cada elemento finito, quer seja ao nível do sistema governativo global. No trabalho de [Castro, 1996], entre outros, existem exemplos ilustrativos do processo de construção do sistema governativo global a partir dos sistemas elementares.

4.5 Modelos híbridos de deslocamento

4.5.1 Definição das aproximações

Nos modelos híbridos de deslocamento são aproximados o campo de deslocamentos no domínio do elemento finito e o campo de tensões aplicadas na sua fronteira cinemática. A necessidade de se aproximar o campo de deslocamentos no domínio (\mathbf{V}) e o campo de tensões aplicadas na fronteira advém do facto de não se verificar à partida o equilíbrio no domínio e a compatibilidade na fronteira, pelo que estas condições terão que ser impostas de forma ponderada.

A imposição ponderada da compatibilidade na fronteira entre elementos adjacentes fará com que essas fronteiras sejam classificadas como fronteiras cinemáticas (Γ_u).

Assim sendo, as aproximações efectuadas podem ser sintetizadas em:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_v \mathbf{q} \quad \text{em } V, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{p} \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (4.29)$$

4.5.2 Sistema governativo de um elemento finito híbrido de deslocamento

O sistema governativo de um elemento finito híbrido de deslocamento é obtido impondo ponderadamente, no sentido de Galerkin, o equilíbrio no domínio e a compatibilidade na fronteira cinemática.

4.5.2.1 Imposição ponderada do equilíbrio no domínio

Da imposição ponderada do equilíbrio no domínio do elemento finito vem:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}\sigma + \mathbf{b}) dV = 0. \quad (4.30)$$

Se continuarmos a desenvolver a equação (4.30) obtemos:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{D}\sigma dV + \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV = 0. \quad (4.31)$$

Definindo o vector de de forças generalizadas \mathbf{Q}_v como:

$$\mathbf{Q}_v = \int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{b} dV, \quad (4.32)$$

e substituindo em (4.31), virá:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T \mathbf{D}\sigma dV + \mathbf{Q}_v = 0. \quad (4.33)$$

Se integrarmos por partes o primeiro termo da equação (4.33) obtemos:

$$-\int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \sigma dV + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_u + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_\sigma = -\mathbf{Q}_v \quad (4.34)$$

Se introduzirmos a relação constitutiva na equação (4.34), assim como a equação de compatibilidade no domínio, a equação de equilíbrio na fronteira e as aproximações do campo de deslocamentos no domínio e do campo de tensões na fronteira cinemática, obtemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \varepsilon dV + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}^T \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_u + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^T \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_\sigma = -\mathbf{Q}_v \\
& - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \mathbf{D}^* \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}_v^T \mathbf{T} \mathbf{p} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_v^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma = -\mathbf{Q}_v \\
& - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV \mathbf{q} + \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}_v^T \mathbf{T} d\Gamma_u \mathbf{p} + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_v^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma = -\mathbf{Q}_v \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Definindo o operador de rigidez generalizado \mathbb{K} , o operador de equilíbrio no domínio \mathbf{B} e o vector das cargas generalizadas aplicadas na fronteira \mathbf{Q}_Γ como:

$$\mathbb{K} = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{B} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{U}_v^T \mathbf{T} d\Gamma_u, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{Q}_\Gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_v^T \mathbf{t}_\gamma d\Gamma_\sigma, \quad (4.38)$$

a equação (4.35) toma o seguinte aspecto:

$$\mathbb{K} \mathbf{q} - \mathbf{B} \mathbf{p} = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_\Gamma \quad \text{em } V. \quad (4.39)$$

4.5.2.2 Imposição ponderada da compatibilidade na fronteira cinemática

Da imposição ponderada da compatibilidade na fronteira cinemática resulta:

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_u = 0. \quad (4.40)$$

Substituindo a aproximação do campo de deslocamentos (4.28) em (4.40) vem:

$$\int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{U}_v \mathbf{q} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma_u = 0. \quad (4.41)$$

Definindo o vector \mathbf{v} como:

$$\mathbf{v} = \int_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma_u, \quad (4.42)$$

e atendendo à definição (4.37), a relação (4.41) virá escrita da seguinte forma:

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{q} = -\mathbf{v} \quad \text{em } \Gamma_u. \quad (4.43)$$

4.5.2.3 Sistema governativo do modelo híbrido de deslocamento

O sistema governativo dum elemento finito híbrido de deslocamento é obtido a partir da junção das equações (4.39) e (4.43):

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_\Gamma \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Da análise de uma estrutura constituída por vários elementos finitos, a ligação entre elementos contíguos será estabelecida através da partilha da aproximação do campo de tensões na fronteira cinemática. Assim sendo, à excepção do operador \mathbf{B} , haverá independência entre todas as matrizes estruturais, quer seja ao nível de cada elemento finito, quer seja ao nível do sistema governativo global [Silva, 2006].

Quando o material entra em regime não-linear, a relação constitutiva altera-se. Substituindo a nova relação constitutiva na equação resultante da imposição ponderada do equilíbrio no domínio, o operador \mathbb{K} é substituído pelo operador de rigidez generalizado em regime não-linear $\tilde{\mathbb{K}}$, que é dado por:

$$\tilde{\mathbb{K}} = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T (\mathbf{1} - \mathbf{d}) \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV. \quad (4.45)$$

4.6 Implementação do modelo híbrido-misto de tensão para análise elástica linear e do modelo híbrido de deslocamento

Na implementação de modelos finitos não-convencionais é necessário definir à partida as funções de aproximação para cada campo. Embora se possa enriquecer o grau da aproximação

para cada campo de forma independente, a escolha do grau máximo da aproximação para cada campo tem que ser criteriosa, de forma a minimizar o aparecimento de modos espúrios [Silva, 2006].

O segundo passo na aplicação destas formulações consiste no cálculo dos operadores estruturais intervenientes no sistema governativo.

O programa de elementos finitos híbridos-mistos de tensão para análise elástica linear e o programa de elementos finitos híbridos de deslocamento a utilizar neste trabalho definem a geometria da estrutura baseada na consideração de elementos mestres definidos no espaço (ξ, η) , $\xi, \eta \in [-1; 1]$, tal como no caso dos elementos finitos isoparamétricos numa formulação tradicional de deslocamento [Pereira, 2004].

4.6.1 Funções de aproximação

Como foi anteriormente referido, as formulações híbrida-mista de tensão e híbrida de deslocamento permitem uma grande flexibilidade na escolha das funções de aproximação. Neste trabalho usam-se séries completas de polinómios ortonormais de Legendre para efectuar todas as aproximações definidas nestas duas formulações.

Os polinómios de Legendre possibilitam a obtenção de expressões analíticas para o cálculo dos operadores lineares do sistema governativo, o que permite economizar tempo de processamento e assegurar uma elevada precisão nos cálculos efectuados [Pereira, 1993]. Outra característica dos polinómios de Legendre é a de possibilitarem a obtenção de sistema governativos altamente esparsos em análises fisicamente lineares, consequência da sua ortogonalidade. No entanto, esta característica perde-se quando se efectua uma análise fisicamente não linear em que os operadores estruturais são não lineares. Por último, é relevante notar que os polinómios de Legendre contribuem para a estabilidade numérica da solução, ao não apresentarem a principal desvantagem das funções de aproximação polinomiais, que é o não haver uma distinção numérica de funções de grau diferente, quando estes graus são elevados.

Os polinómios de Legendre a utilizar encontram-se definidos num elemento mestre. Num problema de estado plano de tensão, os polinómios unidimensionais de Legendre são utilizados para definir as aproximações dos campos ao longo das fronteiras. Quanto às aproximações no domínio elas obtêm-se do produto cartesiano de polinómios unidimensionais de Legendre

definidos em ξ e η , obtendo-se funções polinomiais do tipo $P_i(\xi) \times P_j(\eta)$, $\xi, \eta \in [-1; 1]$.

A descrição pormenorizada da construção das matrizes de aproximação pode ser encontrada no trabalho de [Silva, 2006].

4.6.2 Cálculo dos operadores estruturais

As funções de aproximação dos diferentes campos estáticos e cinemáticos são definidas no referencial do elemento mestre. No entanto, os operadores matriciais dos sistemas governativos são definidos no referencial global, pelo que é necessário efectuar uma mudança de coordenadas que permita relacionar o referencial global da estrutura com o referencial local do elemento mestre [Pereira, 1993].

Nas formulações híbrida-mista de tensão para análise elástica linear e híbrida de deslocamento baseadas na utilização de polinómios de Legendre alguns operadores podem ser calculados analiticamente e uma única vez no início da modelação numérica. Esses operadores são:

- os operadores \mathbb{F} , \mathbf{A}_v , \mathbf{A}_γ , \mathbf{Q}_v , \mathbf{Q}_γ e $\bar{\mathbf{e}}$ da formulação híbrida-mista de tensão;
- os operadores \mathbf{v} , \mathbf{Q}_v , \mathbf{Q}_γ e \mathbf{B} da formulação híbrida de deslocamento.

No caso da formulação híbrida de deslocamento existe o operador $\tilde{\mathbb{K}}$ que tem que ser calculado numericamente e actualizado em cada iteração do método incremental de análise, pois é um operador não linear que depende do valor actual das grandezas envolvidas na análise do problema.

A descrição do cálculo destes operadores pode ser encontrada no trabalho de [Silva, 2006]. Já o cálculo detalhado dos coeficientes de cada operador pode ser encontrado no trabalho de [Castro, 1996].

4.6.3 Aspectos particulares da análise com o modelo híbrido de deslocamento em regime não-linear [Silva, 2006]

O método iterativo utilizado na resolução do sistema não linear é o método de Newton-Raphson, e o algoritmo adoptado é análogo ao apresentado na Secção 5.3.

Como o material em estudo apresenta um comportamento fisicamente não linear, a matriz de rigidez generalizada $\tilde{\mathbb{K}}$ varia ao longo da análise, correspondendo a uma matriz potencialmente cheia. A matriz de rigidez generalizada é a matriz de maior dimensão do sistema governativo, e em regime elástico não linear o número de coeficientes não nulos a calcular e armazenar é bastante superior ao que se verifica no regime elástico linear [Silva, 2006].

O uso de uma matriz de rigidez generalizada cheia pode tornar-se incomportável do ponto de vista computacional, pelo que se adoptou uma metodologia que permite otimizar o tempo de cálculo e a memória requerida pela formulação híbrida de deslocamento implementada.

Tendo em conta que $\sigma = [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) - (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n)]\mathbf{K}\varepsilon$, onde \mathbf{d}_n é um determinado valor da variável de dano, a expressão (4.34) pode ser reescrita como se segue:

$$- \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) - (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n)] \mathbf{K} \varepsilon dV + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_u + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T \sigma d\Gamma_\sigma = -\mathbf{Q}_v \quad (4.46)$$

Se introduzirmos a equação de compatibilidade no domínio, a equação de equilíbrio na fronteira e as aproximações do campo de deslocamentos no domínio e do campo de tensões na fronteira cinemática na expressão (4.46), obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T [(\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) - (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n)] \mathbf{K} \varepsilon dV + \mathbf{B} \mathbf{p} = -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_\Gamma \\ & - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T (\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV \mathbf{q} + \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \varepsilon (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n) dV + \mathbf{B} \mathbf{p} = -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_\Gamma \\ & - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T (\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{p} = -\mathbf{Q}_v - \mathbf{Q}_\Gamma - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \varepsilon (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n) dV \end{aligned} \quad (4.47)$$

Definindo os seguintes operadores:

$$\tilde{\mathbb{K}}_n = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T (\mathbf{1} - \mathbf{d}_n) \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV; \quad (4.48)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_* = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \varepsilon (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n) dV, \quad (4.49)$$

a expressão (4.47) pode vir escrita no seguinte formato:

$$\tilde{\mathbb{K}}_n \mathbf{q} - \mathbf{B}\mathbf{p} = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_\Gamma + \overline{\mathbf{Q}}_* \quad \text{em } V. \quad (4.50)$$

Para resolver o sistema governativo não linear procede-se à actualização do operador $\tilde{\mathbb{K}}$ na iteração 0 do passo de carga n quando o número de iterações no passo de carga ($n - 1$) é superior a um determinado valor constante fixado pelo utilizador (nesta dissertação tomou-se o valor de 50 iterações). Então, o sistema governativo do modelo discreto para esta implementação vem expressa por:

$$\tilde{\mathbb{K}}_n^0 \mathbf{q} - \mathbf{B}\mathbf{p} = \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_\Gamma + \overline{\mathbf{Q}}_* \quad \text{em } V; \quad (4.51)$$

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{q} = -\mathbf{v} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (4.52)$$

em que:

$$\tilde{\mathbb{K}}_n^0 = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T (\mathbf{1} - \mathbf{d}_n^0) \mathbf{K} (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v) dV; \quad (4.53)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_* = \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{K} \varepsilon (\mathbf{d} - \mathbf{d}_n^0) dV. \quad (4.54)$$

Capítulo 5

Elementos Finitos HMT com Aproximação de Tensões Efectivas

5.1 Considerações iniciais

O estudo apresentado em [Silva, 2006] revela que uma formulação HMT com aproximação de tensões não contém informação suficiente para modelar de forma satisfatória a evolução do dano no material em estruturas de betão . Este insucesso é consequência da evolução do campo principal de tensões não permitir por si só identificar se o material em amolecimento se encontra em carga ou descarga. A juntar a este facto, o campo de deslocamentos aproximado deixa de ser suficientemente preciso a partir de determinado instante, quando se tem apenas evolução da deformação numa zona muito localizada da estrutura, correspondente à existência de uma microfenda. Este resultado é de alguma forma expectável, uma vez que as condições de compatibilidade são impostas de forma ponderada. Uma possível solução para este problema podia assentar num refinamento local da aproximação. No entanto, esta abordagem não tira partido das vantagens de utilizar macro-elementos associada à formulação HMT.

Assim sendo, uma alternativa competitiva para análise deste tipo de problemas aproveitando as potencialidades da formulação HMT assenta na substituição da aproximação do campo de tensões σ por uma aproximação do campo de tensões efectivas, $\tilde{\sigma}$.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\mathbf{1} - \mathbf{d}}. \quad (5.1)$$

Num modelo de dano baseado na hipótese de equivalência de deformações, o campo de tensões num ponto depende do valor da variável interna de dano e do valor do campo das deformações nesse ponto:

$$\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\mathbf{E}\varepsilon, \quad (5.2)$$

enquanto que o campo de tensões efectivas depende apenas do campo de deformações:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{E}\varepsilon. \quad (5.3)$$

Perante estes factos, a partir do campo de tensões efectivas podemos facilmente obter o campo de deformações e definir univocamente a lei de evolução de dano, e ao contrário do que acontece com o campo de tensões, uma variação do campo de tensões efectivas permite definir univocamente a nova solução para a distribuição do dano no material, uma vez que a uma variação positiva da tensão efectiva corresponde necessariamente um aumento da variável de dano.

Como é facilmente perceptível, em regime elástico linear a formulação HMT com aproximação de tensões e a sua congénere com aproximação de tensões efectivas coincidem, já que a variável de dano toma um valor nulo. As duas formulações apenas passam a ser distintas a partir do momento em que há a activação do mecanismo de dano no material.

É importante salientar que nesta formulação alternativa as vantagens dos modelos HMT em relação à qualidade do campo estático se mantêm verdadeiras, uma vez que as equações fundamentais no domínio e na fronteira são impostas de forma análoga. No entanto, é natural que o equilíbrio no domínio não seja imposto de forma tão forte, uma vez que o campo de tensões na nova formulação não apresenta um andamento polinomial, estando este andamento reservado para o campo de tensões efectivas.

5.2 Modelo de elementos finitos

As novas aproximações nesta formulação são definidas por:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{X}} \quad \text{em } V, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_v \mathbf{q}_v \quad \text{em } V, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_\gamma \mathbf{q}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (5.6)$$

As matrizes \mathbf{S} , \mathbf{U}_v e \mathbf{U}_γ contêm, respectivamente, as funções de aproximação das tensões efectivas generalizadas no domínio, dos deslocamentos no domínio e dos deslocamentos na fronteira. Os vectores das variáveis generalizadas $\tilde{\mathbf{X}}$, \mathbf{q}_v e \mathbf{q}_γ listam os pesos das funções de aproximação dos campos a que estão associados.

Como já foi referido anteriormente, na ausência de dano as tensões efectivas coincidem com as tensões e o modelo proposto coincide com o modelo HMT com aproximação de tensões. A partir deste ponto, todas as expressões apresentadas são relativas a material com presença de dano.

Assumindo a hipótese de equivalência de deformações, o campo de tensões efectivas é proporcional ao campo de deformações (5.1). Assim sendo, impondo a mesma dissipação de energia pelo modelo contínuo e o discreto, vem que:

$$\int_V \tilde{\sigma}^T \varepsilon dV = \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{e} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{e} = \int_V \mathbf{S}^T \varepsilon dV. \quad (5.8)$$

É importante salientar neste instante que embora a expressão do vector das deformações generalizadas \mathbf{e} coincida com a expressão (4.17) apresentada na formulação HMT com aproximação de tensões, o significado físico de \mathbf{S} nesta nova formulação é distinto, pois está associado ao campo de tensões efectivas e não ao campo de tensões.

Tal como discutido no Capítulo 4, definem-se as forças generalizadas no domínio \mathbf{Q}_v (4.7) e as forças generalizadas na fronteira estática \mathbf{Q}_γ (4.12).

O sistema governativo num elemento com dano é obtido impondo ponderadamente, na forma de resíduos pesados, as condições fundamentais do problema. Para tal, é necessário reescrever as relações fundamentais do problema em função das grandezas conhecidas em cada fase do processo. Como consequência, para conhecer o campo de tensões em cada ponto temos que o calcular em função do campo de tensões efectivas aproximado e do dano:

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{\Omega})\tilde{\sigma}, \quad (5.9)$$

onde $\mathbf{\Omega}$ é a representação matricial do tensor de dano de quarta ordem e \mathbf{I} corresponde à matriz identidade.

Na situação de os modelos de dano disponíveis assumirem um comportamento isotrópico, a relação (5.1) é válida. No entanto esta relação nem sempre é válida, pelo que se opta por deduzir uma formulação perfeitamente geral baseada na expressão (5.9).

Assim sendo, da imposição na forma de resíduos pesados das equações fundamentais virá que:

$$\int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}[(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega})\tilde{\sigma}] + \mathbf{b}) dV = 0 \quad \text{Equilíbrio no domínio } V, \quad (5.10)$$

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}[(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega})\tilde{\sigma}] - \mathbf{t}_\gamma) d\Gamma_\sigma = 0 \quad \text{Equilíbrio na fronteira } \Gamma_\sigma, \quad (5.11)$$

$$\int_V \mathbf{S}^T (\varepsilon - \mathbf{D}^* \mathbf{u}) dV = 0 \quad \text{Compatibilidade no domínio } V, \quad (5.12)$$

$$\int_V \mathbf{S}^T (\varepsilon - \mathbf{F}\tilde{\sigma}) dV = 0 \quad \text{Relação constitutiva no domínio } V. \quad (5.13)$$

Substituindo nas condições de equilíbrio a aproximação das tensões efectivas (5.4) obtemos as equações de equilíbrio do modelo discreto:

$$\mathbf{M}_v \tilde{\mathbf{X}} = -\mathbf{Q}_v \quad \text{em } V, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{M}_\gamma \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma. \quad (5.15)$$

Os operadores \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ são definidos por:

$$\mathbf{M}_v = \int_V \mathbf{U}_v^T (\mathbf{D}[(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega})\mathbf{S}]) dV, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{M}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}[(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega})\mathbf{S}]) d\Gamma_\sigma. \quad (5.17)$$

Neste ponto torna-se importante salientar que na ausência de dano se tem que $(\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}) = \mathbf{I}$, o que implica que $\mathbf{M}_v = \mathbf{A}_v^T$ e $\mathbf{M}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma^T$, onde o operador \mathbf{A}_v e \mathbf{A}_γ são os operadores definidos pelas equações (4.6) e (4.11), respectivamente. No caso de modelos de dano isotrópico onde é válida a relação $\sigma = (\mathbf{1} - \mathbf{d})\tilde{\sigma}$, podemos obter:

$$\mathbf{M}_v = - \int_V (\mathbf{D}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{S} (\mathbf{1} - \mathbf{d}) dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{N}^* \mathbf{U}_v)^T \mathbf{S} (\mathbf{1} - \mathbf{d}) d\Gamma_\sigma, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{M}_\gamma = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{U}_\gamma^T (\mathbf{N}\mathbf{S}) (\mathbf{1} - \mathbf{d}) d\Gamma_\sigma. \quad (5.19)$$

A expressão (5.18) é obtida através da integração por partes da relação (5.16).

A equação de compatibilidade não depende do campo de tensões nem do campo de tensões efectivas, pelo que nesta nova formulação a equação de compatibilidade do modelo discreto coincide com a equação (4.25), embora mais uma vez seja importante salientar que o significado físico da matriz \mathbf{S} é distinto nas duas formulações.

O termo das deformações generalizadas definidas pela expressão (5.8) pode ser eliminado da equação de compatibilidade (4.25) através da introdução da relação constitutiva ponderada (5.13), resultando:

$$\mathbb{F}\tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{A}_v \mathbf{q}_v - \mathbf{A}_\gamma \mathbf{q}_\gamma = \bar{\mathbf{e}}, \quad (5.20)$$

onde:

$$\mathbb{F} = \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{F} \mathbf{S}_v dV. \quad (5.21)$$

Da conjugação das relações (5.14), (5.15) e (5.20) obtemos o sistema governativo para cada elemento finito:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{M}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}} \\ -\mathbf{Q}_v \\ -\mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Como é visível pela análise da expressão (5.22), quando se desenvolve dano num elemento finito, o sistema governativo elementar (e global, por consequência) torna-se não simétrico. No entanto, o índice de esparsidade mantém-se muito elevado, sendo mesmo mais elevado do que na formulação original HMT com aproximação das tensões [Silva, 2006].

Outra vantagem numérica da formulação proposta relativamente à formulação HMT com aproximação de tensões é que evita a divisão por $(\mathbf{1} - \mathbf{d})$, que se pode apresentar problemática quando \mathbf{d} toma valores elevados. O mau condicionamento do sistema governativo da nova formulação torna-se relevante apenas quando existe um elemento finito com a variável de dano $\mathbf{d} \approx \mathbf{1}$ em todo o seu domínio [Silva, 2006].

5.3 Implementação

As aproximações base do modelo de elementos finitos são definidas com séries completas de polinómios ortonormais de Legendre ([Silva, 2006]).

Os operadores \mathbb{F} , \mathbf{A}_v , \mathbf{A}_γ , \mathbf{Q}_v , \mathbf{Q}_γ e $\bar{\mathbf{e}}$ são calculados uma única vez no início da análise. Pelo contrário, os operadores \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_γ têm de ser actualizados em cada iteração do processo de carga.

Para a resolução do problema não linear, após termos obtido convergência no passo de carga n , o algoritmo para a resolução do problema não-linear pode ser apresentado da seguinte forma [Silva, 2006]:

1. Erro = $10 \times$ tolerância e iter= 1;
2. Enquanto Erro > tolerância
 - \mathbf{sol}_j , no início do processo iterativo no novo passo de carga, representa o vector solução do anterior passo de carga. Nas iterações seguintes representa o vector

solução da iteração anterior. As variáveis independentes do vector solução correspondem às grandezas generalizadas $\tilde{\mathbf{X}}$, \mathbf{q}_v e \mathbf{q}_γ ;

- Obter o vector dos resíduos \mathbf{R} , depois do cálculo de $\bar{\mathbf{e}}$, \mathbf{Q}_v e \mathbf{Q}_γ no passo de carga em questão:

$$\mathbf{R}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{A}_v\mathbf{q}_{vj} - \mathbf{A}_\gamma\mathbf{q}_{\gamma j} - \bar{\mathbf{e}} \\ \mathbf{M}_{vj}\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{Q}_v \\ -\mathbf{M}_{\gamma j}\tilde{\mathbf{X}}_j + \mathbf{Q}_\gamma \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

- actualizar a variável Erro a partir do valor do vector dos resíduos \mathbf{R} , assumindo que $\text{Erro} = \frac{\|\mathbf{R}\|}{C}$, em que C é uma constante de normalização;
- Obter a evolução do vector solução:

$$\mathbf{A}_j \Delta \mathbf{sol} = -\mathbf{R}_{j+1}, \quad (5.24)$$

onde \mathbf{A} representa a matriz secante ao sistema governativo, que se obtém calculando as primeiras derivadas dos resíduos em ordem às variáveis independentes do sistema.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} & \mathbf{A}_v & -\mathbf{A}_\gamma \\ \mathbf{M}_v & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{X}} \\ \Delta \mathbf{q}_v \\ \Delta \mathbf{q}_\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}_1 \\ -\mathbf{R}_2 \\ -\mathbf{R}_3 \end{bmatrix}_{j+1} \quad (5.25)$$

- Cálculo do novo vector solução: $\mathbf{sol}_{j+1} = \mathbf{sol}_j + \Delta \mathbf{sol}$;
- actualizar a grandeza não local em cada ponto de integração usando a função de ponderação da expressão (3.52). A malha base do modelo não local coincide com a malha dos pontos de integração (ver 3.6.1);
- validar as condições de Kuhn-Tucker de modo a obter os novos valores da variável de dano em cada ponto de integração;
- com base nos novos valores da variável de dano, actualizar a matriz do sistema governativo \mathbf{A} ;
- $\text{iter} = \text{iter} + 1$.

3. Guardar a solução do incremento $(n+1)$ e avançar para o incremento seguinte.

Capítulo 6

Casos de Estudo

6.1 Considerações iniciais

Neste capítulo apresentam-se os resultados das análises numéricas realizadas em quatro casos de estudo.

O primeiro caso de estudo é uma parede quadrangular que foi experimentalmente testada na Technische Universiteit Eindhoven. Esta estrutura foi analisada com os três modelos constitutivos apresentados nesta dissertação, tendo o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] sido implementado com as formulações HMT com aproximação de tensões efectivas e HD. A análise da estrutura com os restantes modelos constitutivos foi levada a cabo com a formulação HMT com aproximação de tensões efectivas. No caso particular do modelo de [Mazars, 1984] fez-se também um estudo comparativo entre o refinamento tipo- p e tipo- h .

De seguida analisou-se uma parede rectangular que foi experimentalmente testada na Eigenössische Technische Hochschule Zürich, tendo-se adoptado os três modelos constitutivos apresentados em conjunto com a implementação HMT com aproximação de tensões efectivas.

O terceiro caso em análise foi testado experimentalmente em conjunto com a parede quadrangular do primeiro caso. As dimensões das duas paredes são iguais, embora esta nova estrutura apresente uma abertura ligeiramente descentrada. No âmbito desta dissertação, a

parede foi analisada com os modelos constitutivos de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] e de [Mazars, 1984], adoptando-se a implementação HMT com aproximação de tensões efectivas.

Por fim, o último caso de estudo é um arco cilíndrico a que se aplica uma carga concentrada a um quarto de vão. Esta estrutura foi analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b], adoptando-se a implementação HMT com aproximação de tensões efectivas.

Nesta dissertação procurou-se assegurar que todos os modelos de dano utilizados reproduzissem o mesmo comportamento uniaxial de tracção e compressão (à excepção do modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b], pois apenas considera dano à tracção). Tal facto foi razoavelmente atingido, com pequenas diferenças inerentes à grande dificuldade de expressões matemáticas distintas reproduzirem as mesmas funções.

6.2 Análise da parede da TU Eindhoven

Uma série de ensaios experimentais realizados em paredes de alvenaria de tijolo cerâmico maciço na Technische Universiteit Eindhoven (TU Eindhoven) e descritos, por exemplo, em [Lourenço, 1996], serviram de base para o estudo numérico apresentado nesta secção. A geometria da parede está representada na Figura 6.1, e a espessura é de 100mm.

As solicitações impostas à parede subdividem-se em duas fases, a saber:

- aplicação de uma carga vertical uniformemente distribuída no topo da parede ($0.30N/mm^2$, $1.21N/mm^2$, $2.12N/mm^2$), com o sentido da gravidade;
- aplicação de um deslocamento imposto no topo da parede, paralelamente à base.

Neste trabalho não foi possível calibrar os parâmetros dos modelos de dano de forma a reproduzir os resultados experimentais. No entanto, a não calibração dos parâmetros não invalida que se extraíam conclusões válidas sobre a metodologia usada para a análise de estruturas de alvenaria, pelo que se adoptaram relações constitutivas consideradas "razoáveis".

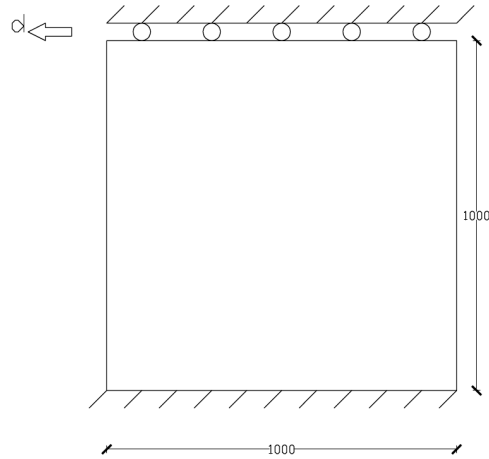


Figura 6.1: Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).

Outra das simplificações adoptadas foi a não consideração do peso próprio e das cargas impostas no topo da parede, já que esta primeira fase do carregamento obrigaria a alterar as condições de apoio do bordo superior, tendo que se desenvolver novos programas informáticos para que tal alteração fosse possível, o que seria certamente impraticável no período de tempo disponível para a realização da dissertação. Sendo assim, o bordo superior foi considerado como encastrado, o que impede a aplicação do peso próprio, pois tal solicitação causaria tracções na metade superior da parede.

Para podermos comparar as distribuições de dano obtidas, representa-se na Figura 6.2 o modo como a parede atingiu o colapso¹, obtida pelo investigador [Lourenço, 1996] numa análise descontínua (através do método dos elementos finitos convencionais) com recurso à teoria da plasticidade. O modo de colapso obtido por [Lourenço, 1996] encontra-se de acordo com as evidências experimentais.

Na Figura 6.3 estão representados os diagramas carga-deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente por [Lourenço, 1996].

¹O caso exposto corresponde à aplicação da carga vertical de $0.30kN/mm^2$, por ser a menor das cargas (logo mais próximo dos casos analisados nesta dissertação).

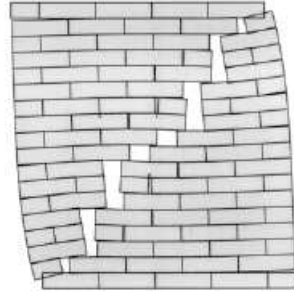


Figura 6.2: Modo de colapso da parede TU Eindhoven ([Lourenço, 1996]).

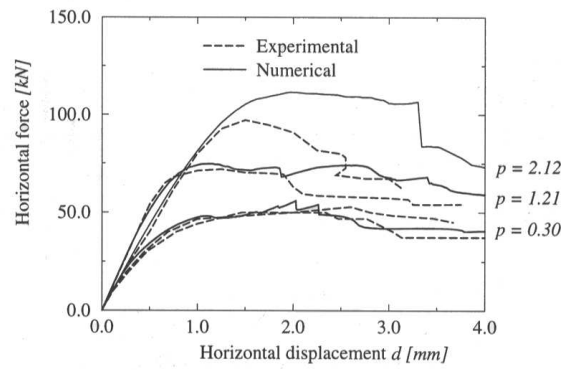
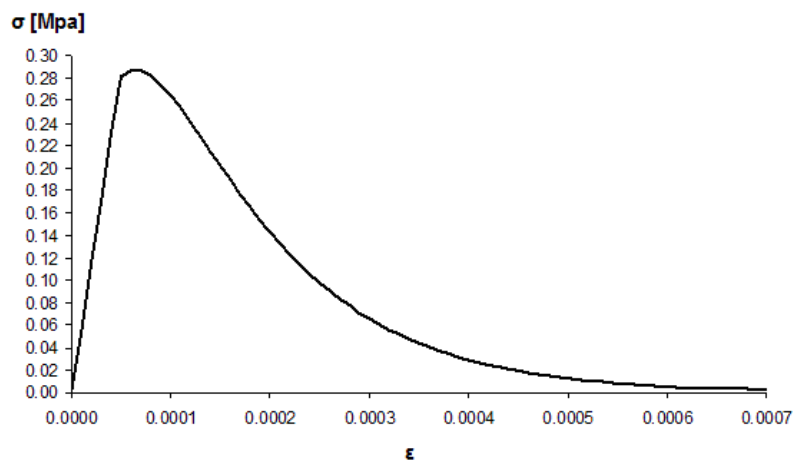


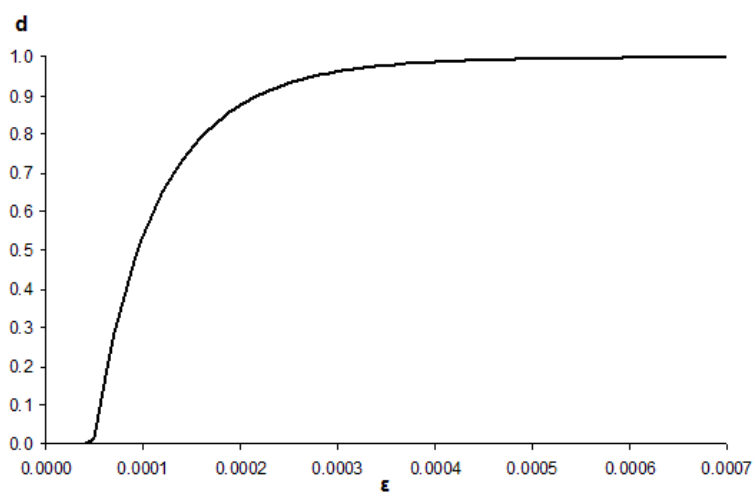
Figura 6.3: Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].

6.2.1 Modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]

Para se analisar a parede TU Eindhoven considerou-se que o comportamento alvenaria pode ser descrito pelo modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] com os parâmetros $\mathbf{E} = 5700\text{MPa}$, $\nu = 0.25$, $k = 6.87 \times 10^{-6}\text{MPa}$, $c = 2.72$ e $n = 2.5$, que conduzem à relação constitutiva uniaxial de tracção apresentada na Figura 6.4.



(a) Relação tensão-deformação



(b) Relação deformação-dano

Figura 6.4: Comportamento uniaxial de tracção no modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] adoptado.

6.2.1.1 Estudo da variação do comprimento característico

A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.1. A diferença entre os diversos casos centra-se no comprimento característico usado, que tomou os valores de 25, 50, 100, 150 e 200mm.

Número de elementos finitos	1
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	10
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	9
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	9
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Número de passos de carga	40
Deslocamento imposto	0.50mm

Tabela 6.1: Características da discretização utilizada no estudo da parede de Eindhoven.

A primeira constatação do estudo efectuado é a de que o aparecimento de dano na estrutura surge para diferentes passos de carga (logo também para diferentes valores de deslocamento imposto) consoante o valor do comprimento característico adoptado. Esta informação encontra-se sintetizada na Tabela 6.2.

Comprimento característico [mm]	Passo de carga	Deslocamento imposto [mm]
25	8	0.10
50	10	0.13
100	12	0.15
150	14	0.18
200	15	0.19

Tabela 6.2: Passo de carga em que surgiu dano na estrutura.

Como foi referido na Secção 3.6.1, a malha base do modelo não local coincide com a malha dos pontos de integração, pelo que quanto maior é o comprimento característico, mais pontos são usados para o cálculo do valor da taxa de energia de deformação elástica não local, \bar{Y} . Atentemos ao exemplo qualitativo unidimensional da figura 6.5. Os traços verticais a negro

representam a taxa de energia de deformação elástica \mathbf{Y} em cada ponto de integração, e a recta a tracejado representa o valor máximo a partir do qual se desenvolve dano. As curvas a vermelho, verde e magenta representam a ponderação da taxa de energia de deformação elástica considerando a função de Gauss normalizada, usando 3, 5 e 7 pontos, respectivamente. Como se pode ver, quanto maior o número de pontos usados na ponderação, menor é o valor de $\bar{\mathbf{Y}}$ no ponto central, pelo que quanto maior for o comprimento característico utilizado, maior é o valor de deslocamento imposto para o qual surge dano, e vice-versa, como se pode observar na Figura 6.6. Outro aspecto que se pode observar é que quanto maior é o comprimento característico, maior é a zona danificada. Este facto é consequência de a curva ponderada da taxa de energia de deformação ser mais achatada à medida que se aumenta o valor do comprimento característico, o que tem por consequência existirem mais pontos com uma taxa de energia de deformação não local superior ao valor a partir do qual se desenvolve dano.

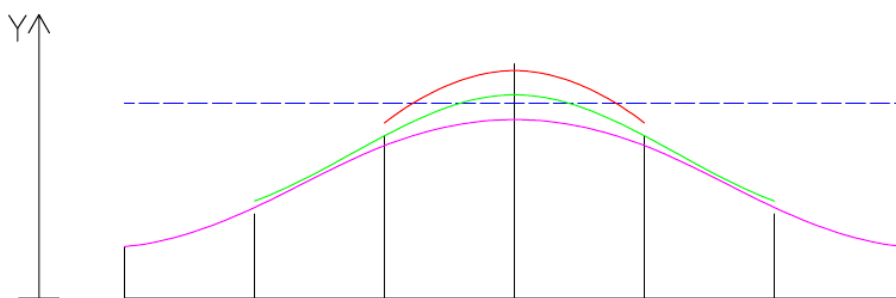
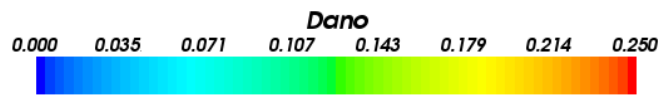
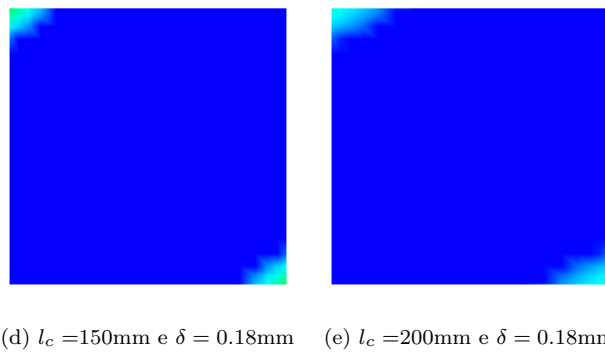
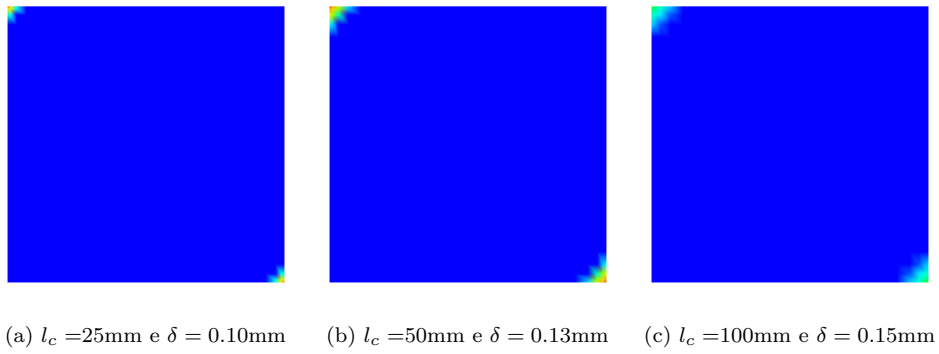


Figura 6.5: Exemplo qualitativo unidimensional de ponderação da taxa de energia de deformação elástica.

Os diferentes comprimentos característicos testados conduzem a distribuições de dano distintas, para a aplicação do deslocamento imposto de 0.50mm. Por análise da Figura 6.7, mais uma vez verificamos que quanto maior é o comprimento característico adoptado, maior é a área que apresenta dano. Sendo assim, é facilmente compreensível que o comprimento característico de 25mm tenha originado uma localização do dano, comparativamente com os outros comprimentos testados.

Como referido na Secção 3.6, o comprimento característico é considerado por alguns autores como um parâmetro do modelo de dano. Este aspecto fica bem vincado com a análise efectuada, pois cada comprimento característico utilizado conduziu a diferentes soluções. Mas também a interpretação apresentada por outros autores, que consideram o comprimento ca-



(f) Escala de cores

Figura 6.6: Distribuição de dano no primeiro passo de carga em que surge dano.

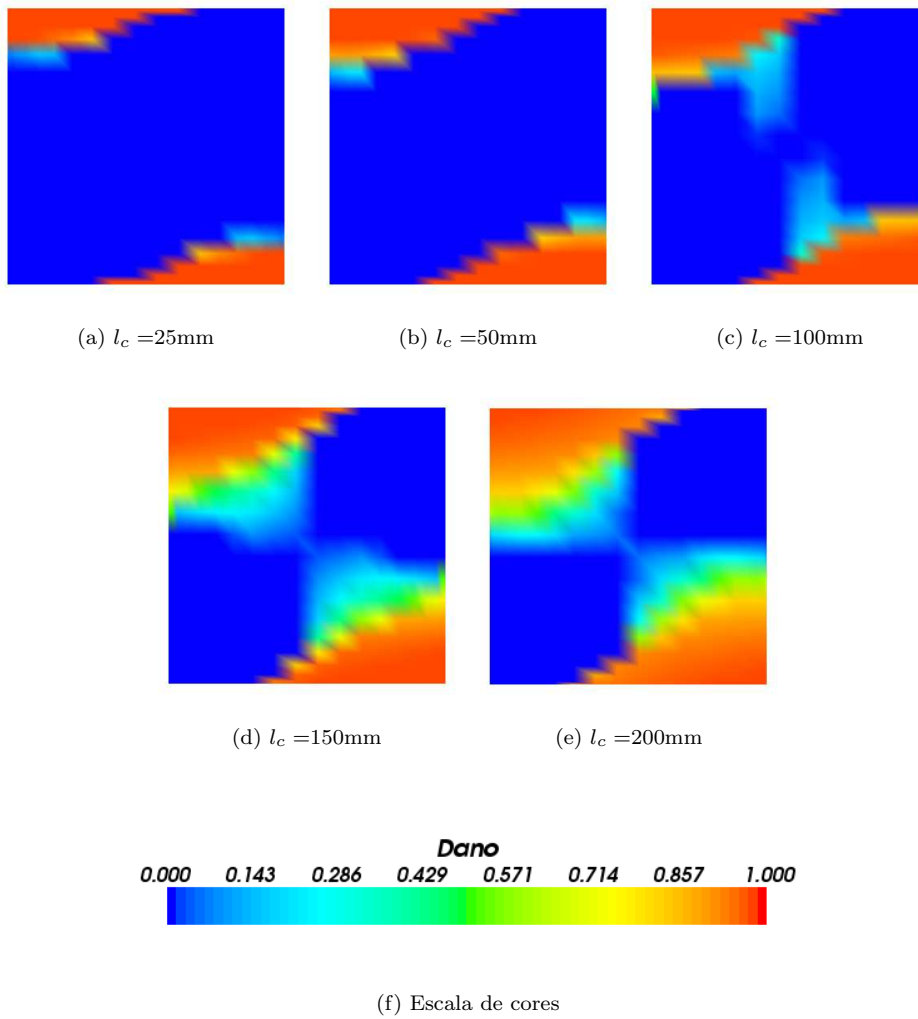


Figura 6.7: Distribuição de dano no final da aplicação do deslocamento imposto de 0.50mm.

racterístico um limitador da localização do dano pode ser aceite, uma vez que efectivamente o comprimento característico delimita o número de pontos que são usados para o cálculo das grandezas não locais.

6.2.1.2 Análise com um modelo HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]

A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.3.

Número de elementos finitos	1
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.02mm

Tabela 6.3: Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.

Neste caso usou-se o modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] já apresentado na Figura 6.4, mas adoptando um comprimento característico de 75mm.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.8.

Atentando ao diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com a distribuição de dano obtida (Figura 6.9), podemos verificar que a primeira não linearidade a surgir no diagrama carga-deslocamento é devida ao aparecimento de dano nas zonas situadas nos bordos encastrados, onde se registou experimentalmente o desenvolvimento de fendas de tracção. A segunda quebra de linearidade deve-se ao espalhamento da zona danificada para as regiões interiores da parede, não sendo possível estabelecer uma relação entre este espalhamento e algum fenómeno físico que se tenha verificado experimentalmente. Mas a principal constatação a retirar deste exemplo é a de que, após estas duas quebras de linearidade, o diagrama carga-deslocamento entra indefinidamente em regime linear. Para melhor entendermos o porquê

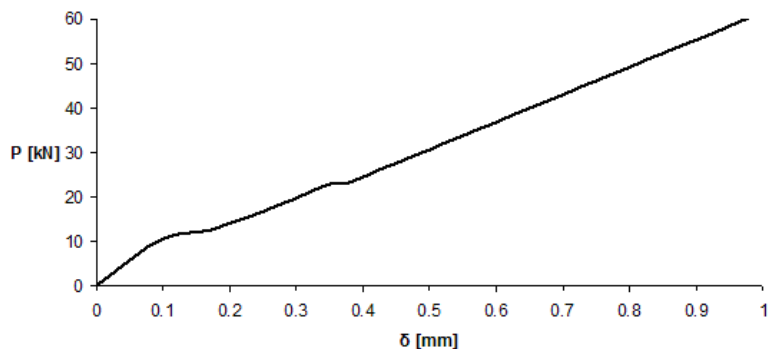


Figura 6.8: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

deste resultado, recordemos que estamos a efectuar uma análise geometricamente linear e que a alvenaria é modelada como tendo uma resistência infinita à compressão. Assim sendo, após o surgimento de dano nas zonas já identificadas, a estrutura entra em regime linear pois é capaz de equilibrar o carregamento que lhe é imposto através de uma biela de compressão, não alterando a distribuição de dano.

Quanto ao dano residual que aparece na estrutura, é a consequência de o traço do tensor das tensões efectivas nessas zonas ser positivo (ver Figura 6.10, onde se apresentam as direcções principais do tensor das tensões efectivas, as quais se relacionam directamente com as direcções principais do tensor das deformações) e obviamente, de a taxa de energia de deformação ser superior ao valor de referência para o qual surge dano. No entanto, este dano residual não evolui ao longo do processo, pois a formação da biela de compressão torna o traço do tensor das deformações nessa zona negativo, o que impede a evolução do dano.

Da análise deste exemplo ressalta ainda que a consideração deste modelo de dano não possibilita a recuperação do comportamento real da estrutura para valores de deslocamento imposto superior a um determinado valor.

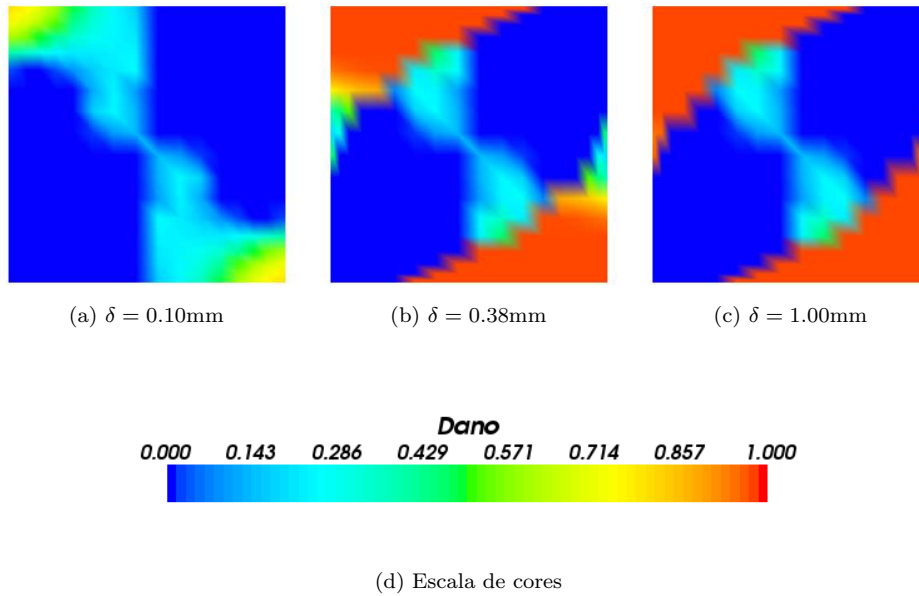


Figura 6.9: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

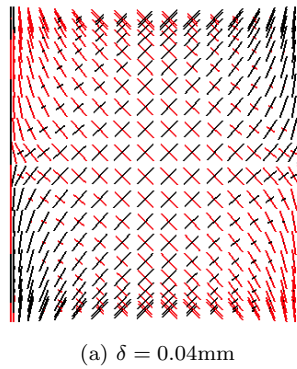


Figura 6.10: Direcções principais do tensor das tensões efectivas na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] (vermelho corresponde a tracção e preto a compressão).

6.2.1.3 Análise HD com o modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]

A análise do caso em estudo com um modelo híbrido de deslocamento foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.4.

Número de elementos finitos	1
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	5
Grau da aproximação das tensões na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.02mm

Tabela 6.4: Características da análise com a implementação híbrida de deslocamento.

Neste caso usou-se o modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] já apresentado na Figura 6.4, adoptando um comprimento característico de 75mm, tal como no caso da Secção 6.2.1.2.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.11, onde também se apresenta a solução obtida com o modelo HMT discutido na Secção 6.2.1.2.

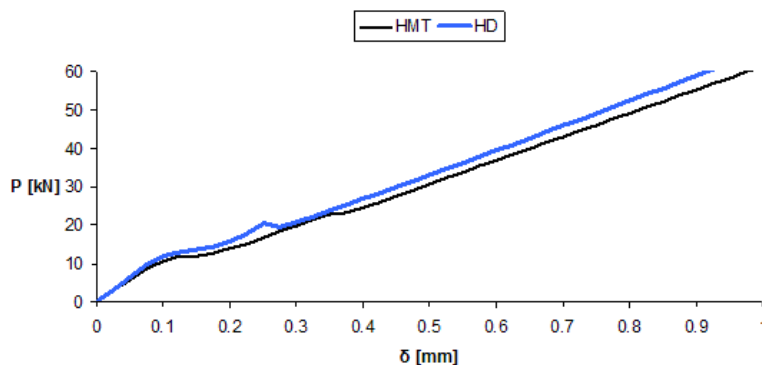


Figura 6.11: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com as implementações HD e HMT.

Embora não se possa afirmar que os graus das aproximações na implementação HD e HMT confirmam a mesma qualidade de aproximação, a análise da Figura 6.11 permite verificar que para o mesmo valor de força a implementação HMT conduz a um maior valor para o deslocamento do que o modelo HD. Quando os modelos são de tensão puros e de deslocamento puros, os primeiros são mais flexíveis que os segundos, pelo que é perfeitamente natural que tal também se verifique nas formulações híbridas.

A distribuição de dano obtida na implementação HD está representada na Figura 6.12. Ao relacionarmos a distribuição de dano com o comportamento do diagrama, o seu comportamento pode ser explicado pelos mesmos motivos já referidos na implementação HMT (Secção 6.2.1.2). Saliente-se apenas o facto de a distribuição final de dano na implementação HD diferir ligeiramente da implementação HMT. Parece não existir nenhuma explicação física que justifique esta pequena diferença de resultados. Apenas o diferente grau de aproximação para os campos estáticos e a diferença de comportamento entre os modelos de elementos finitos em comparação permite justificar essa discrepância.

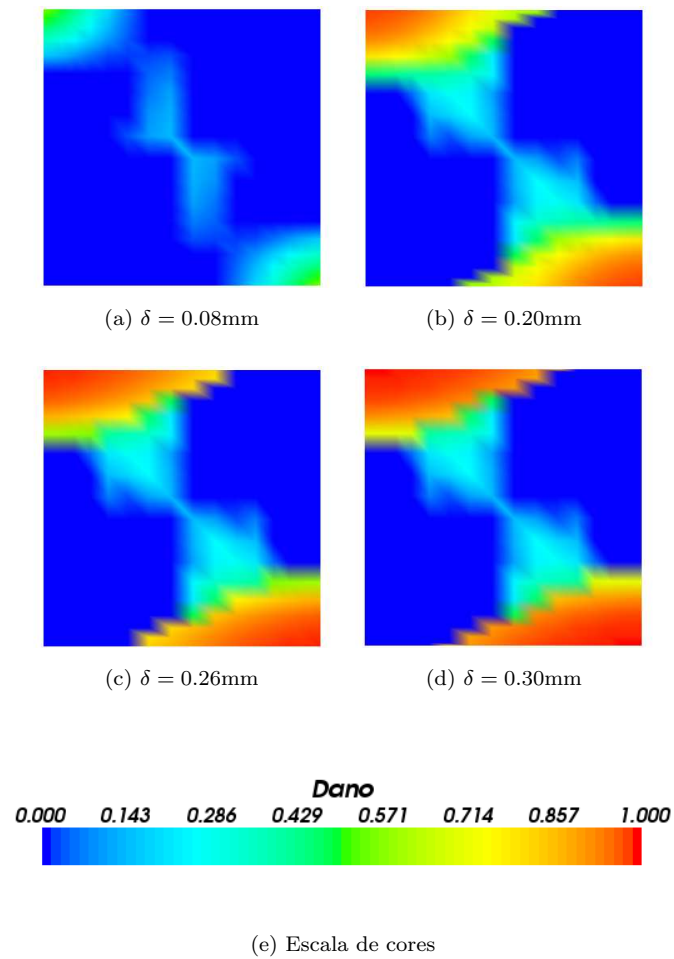


Figura 6.12: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com a implementação HD

6.2.2 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]

Perante o relativo insucesso do modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] para descrever o comportamento da parede de TU Eindhoven, decidiu-se adoptar o modelo constitutivo de [Mazars, 1984], pois o aparecimento de dano para fenómenos de compressão está englobada na sua formulação.

A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.5.

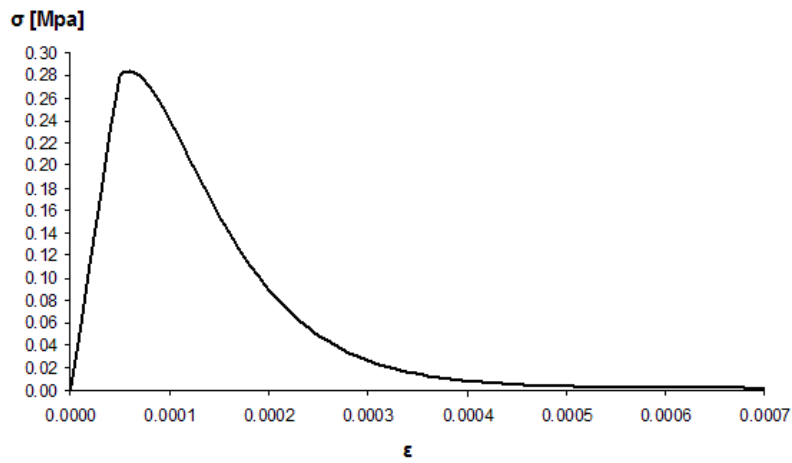
Número de elementos finitos	1
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.05mm

Tabela 6.5: Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.

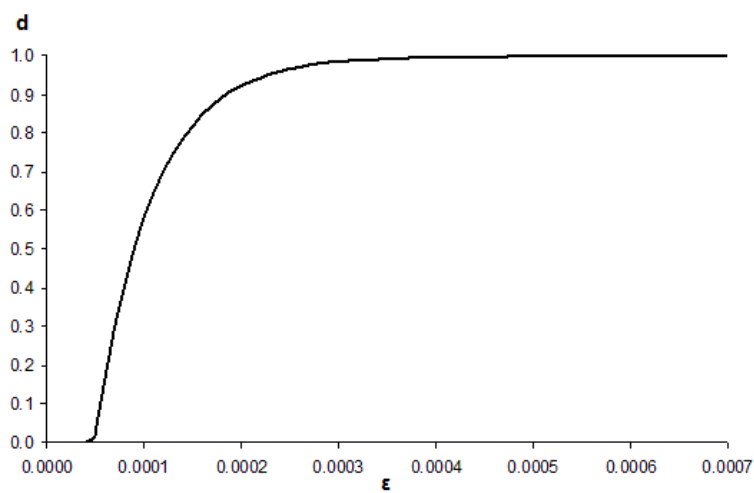
Para a aplicação deste modelo constitutivo adoptaram-se os parâmetros de $\mathbf{E} = 5700\text{MPa}$, $\nu = 0.25$, $\varepsilon_{d0} = 4.91 \times 10^{-5}$, $\mathbf{A}_t = 0.99$, $\mathbf{B}_t = 17000$, $\mathbf{A}_c = 1$, $\mathbf{B}_c = 720$ e $l_c = 75\text{mm}$, que conduzem às relações constitutivas uniaxiais representadas nas Figuras 6.13 e 6.14.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.15.

Atentando ao diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com a distribuição de dano obtida (Figura 6.16), podemos verificar que quando o deslocamento imposto atinge o valor de 0.2mm , existe uma quebra de rigidez da resposta, causada pelo aparecimento de dano nas zonas situadas nos bordos encastrados, onde se verificou experimentalmente o surgimento de fendas de tracção.

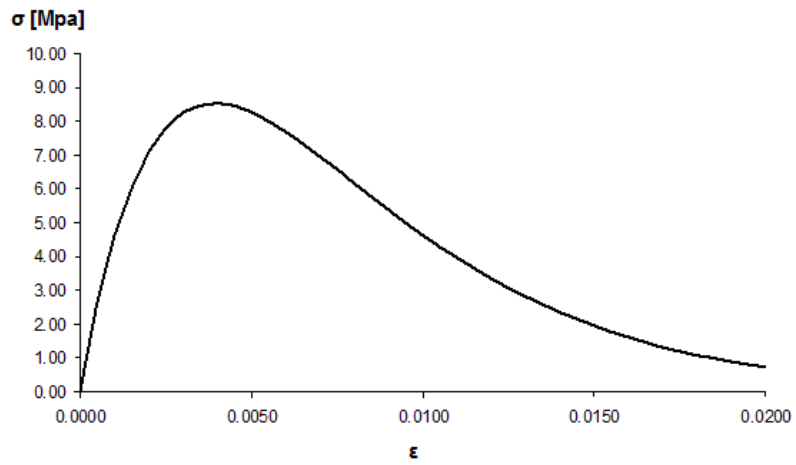


(a) Relação tensão-deformação

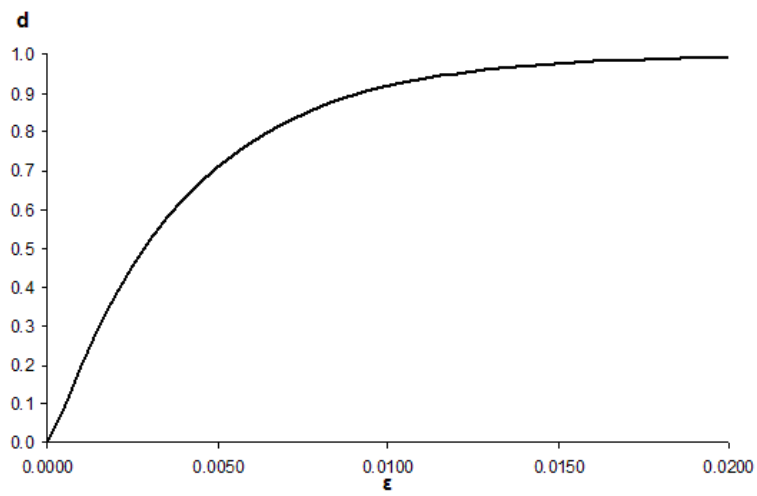


(b) Relação deformação-dano

Figura 6.13: Comportamento uniaxial de tracção no modelo de dano de [Mazars, 1984] adoptado.



(a) Relação tensão-deformação



(b) Relação deformação-dano

Figura 6.14: Comportamento uniaxial de compressão no modelo de dano de [Mazars, 1984] adoptado.

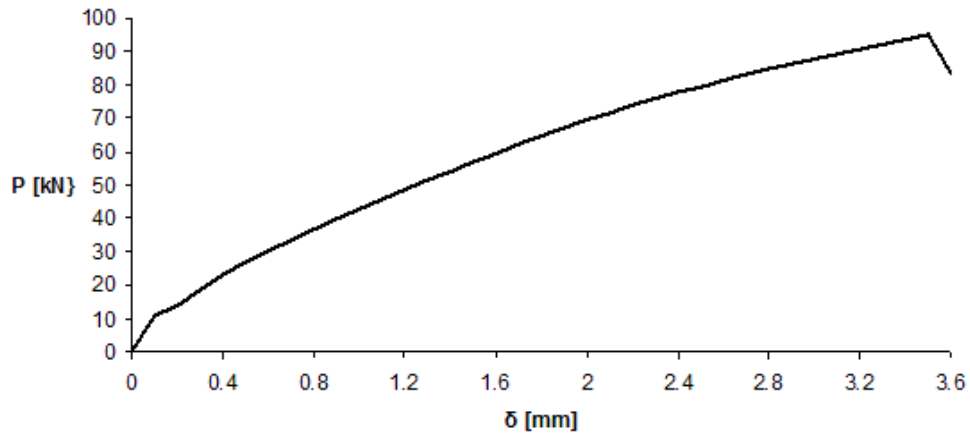
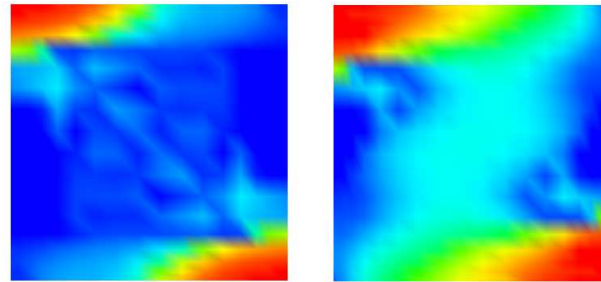


Figura 6.15: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

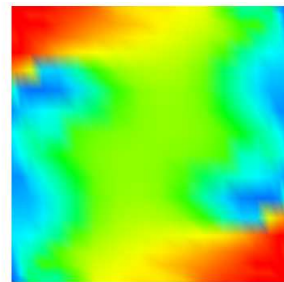
A restante fase de desenvolvimento da curva do diagrama carga-deslocamento apresenta claramente um comportamento não-linear crescente, até que atinge o valor de deslocamento imposto de 3.50mm . Associada a esta não-linearidade do diagrama, está inicialmente o aumento da zona danificada respeitante à fenda de tracção já mencionada. Note-se que durante o restante desenvolvimento do carregamento (a partir do deslocamento imposto de 0.5mm) não existe expansão deste fenómeno. O prosseguimento da não-linearidade deve-se ao surgimento de dano na diagonal da parede, tal como verificado nos ensaios experimentais, e conseqüente expansão de área danificada e valor da variável de dano.

Quando se atinge o deslocamento de 3.50mm o modelo deixa de ser capaz de obter convergência na resolução do sistema não-linear, perdendo-se o sentido da análise.

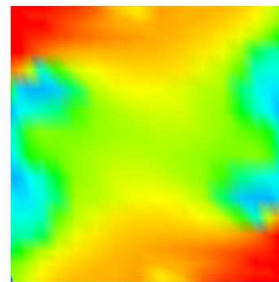


(a) $\delta = 0.20\text{mm}$

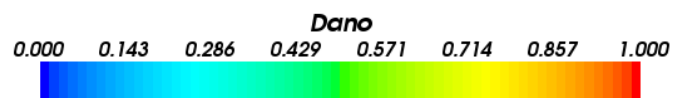
(b) $\delta = 0.50\text{mm}$



(c) $\delta = 1.80\text{mm}$



(d) $\delta = 3.50\text{mm}$



(e) Escala de cores

Figura 6.16: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

6.2.3 Estudo de refinamento tipo- h e tipo- p na análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]

Nesta secção faz-se o estudo do efeito do refinamento tipo- h e tipo- p na análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]. Para tal consideram-se os cinco casos de estudo descritos na Tabela 6.6.

Características	Teste 1	Teste 2	Teste 3	Teste 4	Teste 5
Número de elementos finitos	1	1	1	4	4
Grau de \mathbf{S}	3	5	10	2	3
Grau de \mathbf{U}_v	2	4	9	1	2
Grau de \mathbf{U}_γ	2	4	9	1	2
Pontos de Lobbato/elemento/direcção	20	20	20	20	20
Pontos de Lobbato na fronteira	20	20	20	20	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.05mm	0.05mm	0.05mm	0.05mm	0.05mm

Tabela 6.6: Discretizações utilizadas para o estudo do refinamento tipo- h e tipo- p .

Os diagramas carga-deslocamento obtidos para cada um dos testes encontram-se na Figura 6.17, onde "grau" corresponde ao grau da aproximação das tensões efectivas no domínio. Em todos os testes quando se atinge um determinado deslocamento, o modelo deixa de ser capaz de obter convergência na resolução do sistema não-linear, perdendo-se o sentido da análise.

A análise da Figura 6.17 permite constatar que o máximo grau de aproximação em \mathbf{S} no teste 1 torna-se insuficiente para modelar correctamente o campo das tensões efectivas, quer no que respeita ao valor de pico quer em termos de andamento da curva. Esta insuficiência na aproximação é facilmente corrigida com um refinamento tipo- p ou tipo- h , tendo os testes 2, 3 e 5 convergido para soluções muito próximas. A discretização associada ao teste 4 utiliza um grau de aproximação muito baixo para o campo de tensões efectivas. A solução obtida afasta-se de novo do comportamento verificado com as restante discretizações.

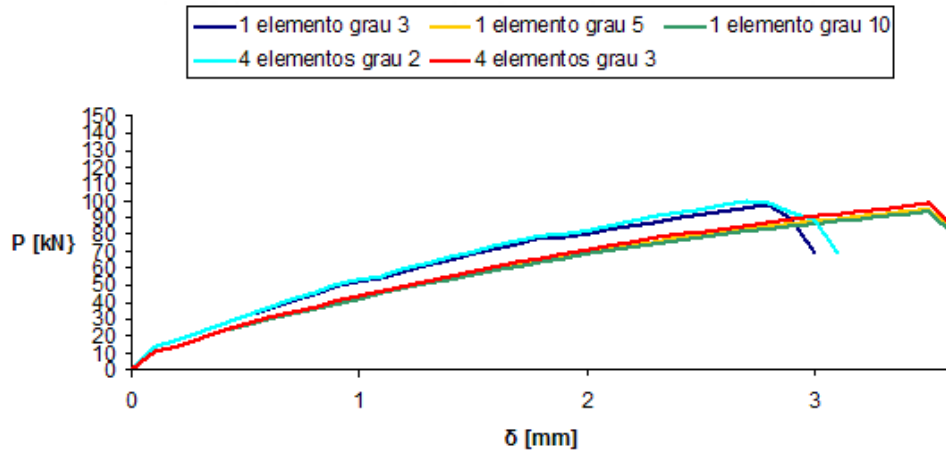


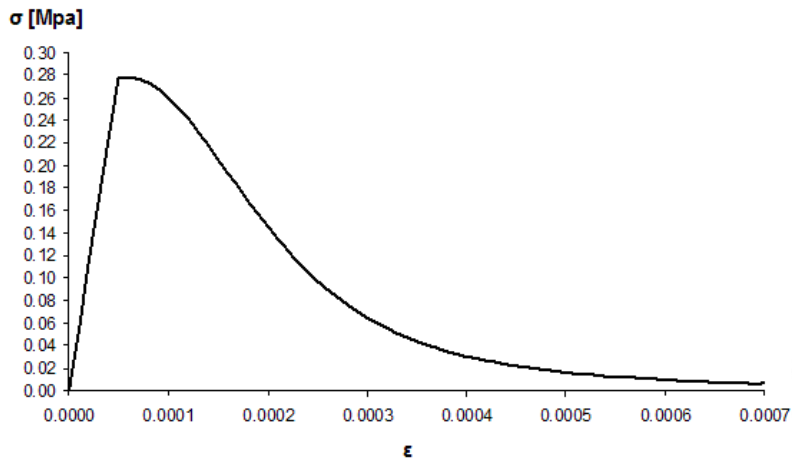
Figura 6.17: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] para cada teste.

6.2.4 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a]

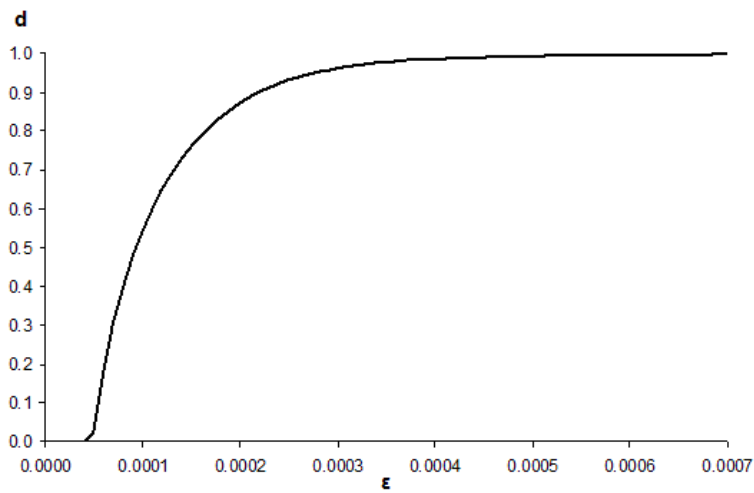
A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.7.

Para a aplicação deste modelo constitutivo adoptaram-se os parâmetros de $E = 5700\text{MPa}$, $\nu = 0.25$, $a_c = 1.4$, $b_c = 8.0\text{MPa}$, $k_c = 80.0\text{MPa}^2$, $c_c = 4.0$ e $(\frac{\sigma_c}{\sigma_0})_c = 0.7$, $d_{0c} = 0.3$, $a_t = 0.002$, $b_t = 3.5\text{MPa}$, $k_t = 1.0\text{MPa}^2$, $c_t = 4.0$, $(\frac{\sigma_c}{\sigma_0})_t = 1.0$, $d_{0c} = 0.0$ e $l_c = 75\text{mm}$. A adopção destes parâmetros conduz às relações constitutivas uniaxiais apresentadas nas Figuras 6.18 e 6.19.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.20.

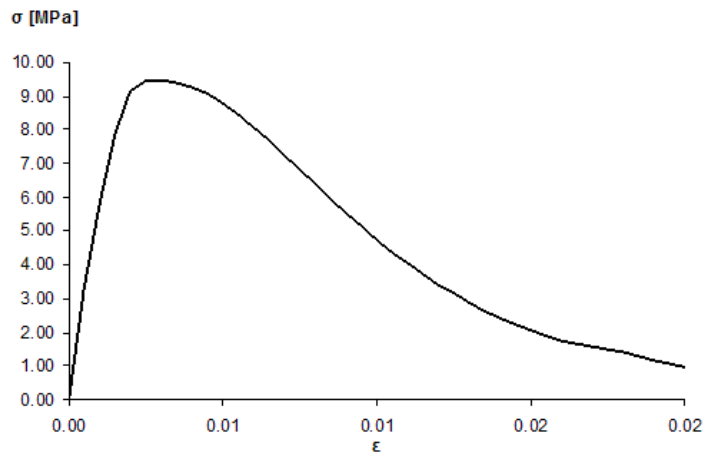


(a) Relação tensão-deformação

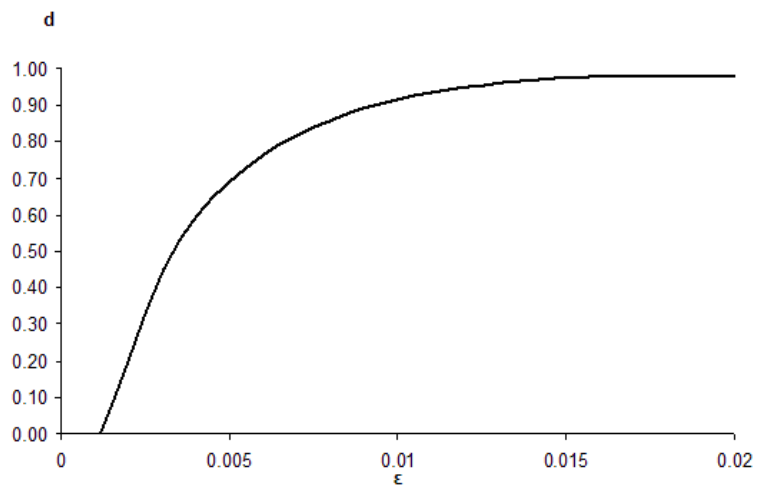


(b) Relação deformação-dano

Figura 6.18: Comportamento uniaxial de tracção no modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] adoptado.



(a) Relação tensão-deformação



(b) Relação deformação-dano

Figura 6.19: Comportamento uniaxial de compressão no modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] adotado.

Número de elementos finitos	1
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.05mm

Tabela 6.7: Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo com duas variáveis de dano.

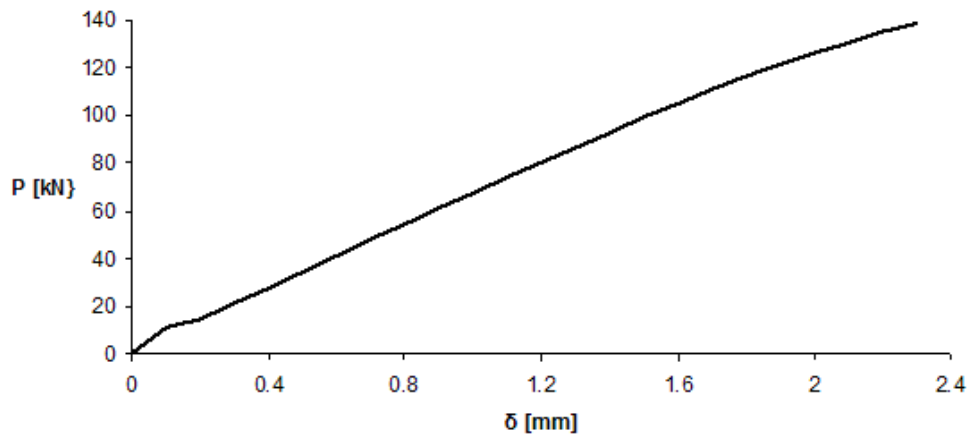
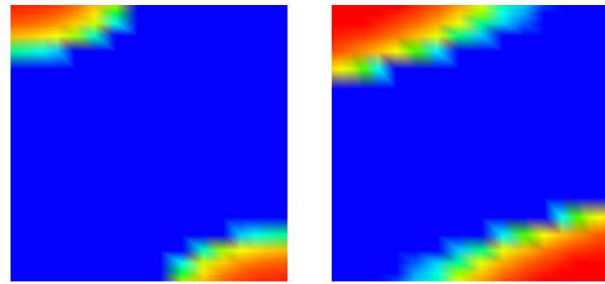


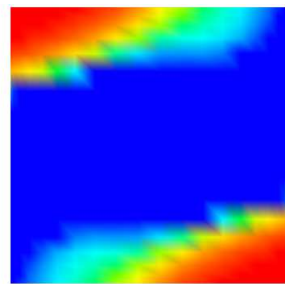
Figura 6.20: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 75\text{mm}$.

Atentando ao diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com as distribuições de dano obtidas (Figura 6.21), podemos verificar que quando o deslocamento imposto atinge o valor de $0.2mm$, existe uma quebra de rigidez da resposta, causada pelo aparecimento de dano de tracção nas zonas situadas nos bordos encastrados, onde se verificou experimentalmente o surgimento de fendas de tracção. O restante comportamento do diagrama é ligeiramente não-linear, como consequência do alastramento da zona danificada junto dos encastramentos. Quando se atinge o deslocamento imposto de $1.5mm$, surge dano de compressão junto dos bordos encastrados, tal como verificado experimentalmente. Deste ponto até ao deslocamento imposto de $2.3mm$, o dano de compressão aumenta ligeiramente e dá-se o alastramento do dano de tracção, até que surgem zonas com os dois tipos de dano. Quando tal se verifica, o método de cálculo usado pelo programa para a determinação da evolução dos dois tipos de dano é incapaz de convergir para uma solução, impossibilitando a resolução do sistema não-linear (recorde-se que cada um dos potenciais de dissipação escrito em função das tensões efectivas depende de d_t e d_c).

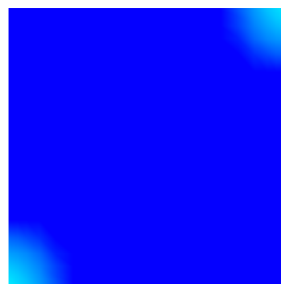


(a) d_t para $\delta = 0.20\text{mm}$

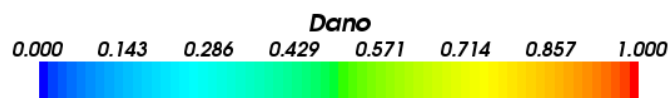
(b) d_t para $\delta = 1.50\text{mm}$



(c) d_t para $\delta = 2.30\text{mm}$



(d) d_c para $\delta = 2.30\text{mm}$



(e) Escala de cores

Figura 6.21: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 75\text{mm}$.

Perante este facto, experimentou-se usar o mesmo modelo, mas considerando um comprimento característico superior, por forma a retardar o aparecimento do dano de compressão. Para este efeito, tomou-se o valor de 150mm . O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.22.

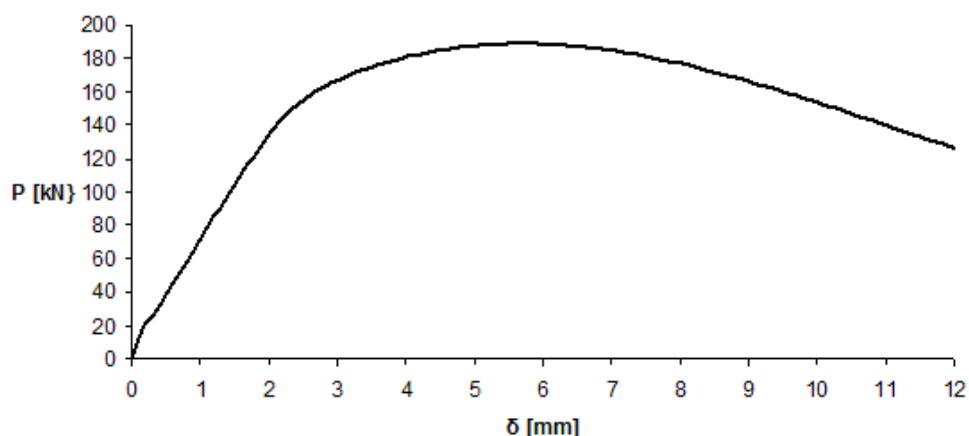


Figura 6.22: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 150\text{mm}$.

Analisando o diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com as distribuições de dano obtidas (Figura 6.23), podemos verificar que a primeira quebra de linearidade se deve à formação de zonas danificadas junto dos bordos encastrados. O resto do comportamento do diagrama carga-deslocamento deve-se ao aparecimento de dano de compressão (verificado experimentalmente) e a generalização do dano de tracção, não se podendo definir com clareza a que tipo de dados experimentais corresponde este dano. Outro aspecto que importa salientar é a não evolução ao longo do processo do dano de compressão, pelo que a dissipação de energia na formação desta zona danificada é suficiente para haver uma redistribuição de esforços que impede a evolução do dano de compressão.

Por último, importa referir que é com estranheza que se constata que o programa não registou problemas de convergência para esta discretização, mesmo havendo zonas com os

dois tipos de dano activo. Para tentar explicar melhor este comportamento, vários testes envolvendo discretizações e comprimentos característicos diferentes foram efectuados. No entanto, os mesmos problemas de convergência surgiram na maioria das situações. Este facto parece indicar que o modelo de [Comi e Perego, 2001a] apresenta algumas fragilidades quando se estudam estruturas para as quais há zonas onde num determinado instante do processo de carga se encontraram activos os dois modos de dano considerados. Esta dificuldade deverá ser alvo de estudo cuidado em trabalhos futuros.

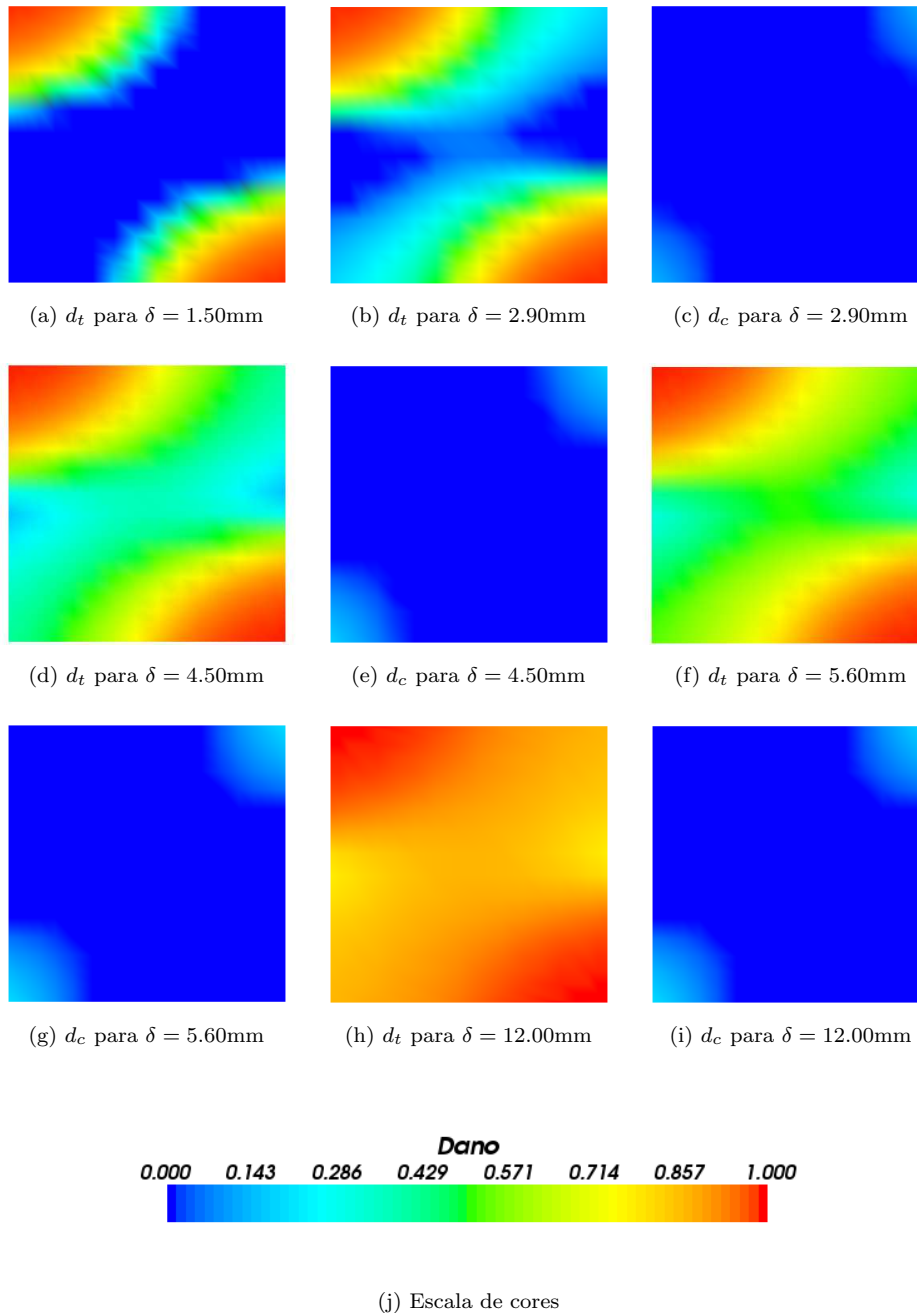


Figura 6.23: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a] com $l_c = 150\text{mm}$.

6.2.5 Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas

O modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] é claramente inadequado para a análise da parede de TU Eindhoven, pois permite que haja uma forma de equilibrar o carregamento de forma elástica linear, depois do surgimento de dano nos bordos encastrados.

O modelo de [Mazars, 1984] revelou-se uma hipótese interessante para reproduzir os fenómenos físicos que se observaram experimentalmente. No entanto, como não se calibraram os parâmetros do modelo e não se aplicou o mesmo carregamento que foi utilizado nos ensaios experimentais, é perfeitamente natural que o valor de pico atingido pelo modelo não esteja de acordo com as evidências experimentais. Outro aspecto que importa salientar é que o modelo não foi capaz de apresentar um patamar em que o aumento de deslocamento não implica um aumento da força aplicada. A juntar aos factos já expostos, esta diferença pode também ser consequência de a parede não ter as dimensões que permitam que uma análise como meio contínuo possa ser realizada, pois no estudo publicado por [Lourenço, 1996], o investigador apenas foi capaz de reproduzir o comportamento experimental da parede TU Eindhoven em termos de diagrama carga-deslocamento, quando introduziu no modelo contínuo elastoplástico ortotrópico um factor de escala interno, que diminui a resistência à compressão à medida que a resistência à tracção também diminui. Esta metodologia permitiu que diagonal danificada da parede tendesse para um estado de resistência nula, e assim pôde simular o comportamento real da parede, que tende para a individualização de dois corpos distintos. Por este facto, [Lourenço, 1996] recomenda que os modelos contínuos para a análise de alvenarias apenas sejam utilizados em estruturas que possam ser classificadas de "grandes dimensões", isto é, cujo comportamento global não esteja dependente de umas quantas unidades e juntas.

Quanto ao modelo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a], os deslocamentos obtidos encontram-se muito distintos do registado experimentalmente, e em termos de valor de carga de pico, registou-se o dobro do valor obtido na análise com o modelo de [Mazars, 1984]. Uma vez mais, o facto de o modelo não se encontrar calibrado, o facto de não se aplicar o mesmo carregamento e o facto da parede não ter dimensões que permitam uma análise como meio contínuo podem estar na origem deste facto. No entanto, este facto não explica a diferença entre valores entre os dois modelos, pois as curvas tensão-deformação utilizadas nos dois casos são muito semelhantes. Uma vez que o programa não convergiu em diversas situações, somos obrigados a encarar estes resultados com alguma reserva.

Por último, a hipótese da isotropia dos modelos de dano utilizados é claramente irrealista em estruturas de alvenaria regular de pequenas dimensões, pois claramente estamos a tratar de estruturas que exibem comportamento ortotrópico, tanto do ponto de vista das propriedades elásticas como do ponto de vista do processo de dano.

6.3 Análise da parede da ETH Zurich

Uma série de ensaios experimentais realizados numa parede de alvenaria de tijolo cerâmico oco na Eigenössische Technische Hochschule Zürich (ETH Zurich) e descritos, por exemplo, em [Lourenço, 1996], foi usada para o estudo numérico realizado nesta secção. A geometria da parede está representada na Figura 6.24, e a espessura é de 150mm.

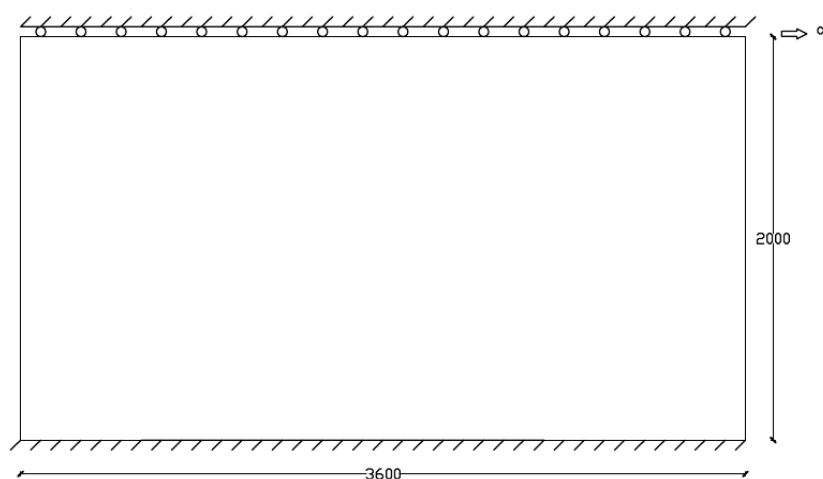


Figura 6.24: Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).

As solicitações impostas à parede subdividem-se em duas fases, a saber:

- aplicação de uma carga vertical uniformemente distribuída no topo da parede ($0.61N/mm^2$), com o sentido da gravidade;
- aplicação de um deslocamento imposto no topo da parede, paralelamente à base.

Uma vez mais, como já explicitado e justificado na Secção 6.2, apenas se procederá à análise da aplicação do deslocamento imposto, não considerando a primeira fase do carregamento e as forças de massa.

Para podermos comparar as distribuições de dano obtidas, representa-se na Figura 6.25 o padrão de fendilhação da parede no colapso, obtida pelo investigador [Lourenço, 1996] numa análise contínua com um modelo elastoplástico ortotrópico (através do método dos elementos finitos convencionais, e em que não foi necessário introduzir parâmetros internos de escala). Opta-se por apresentar o padrão obtido por [Lourenço, 1996] em detrimento dos padrões obtidos experimentalmente porque as fotografias disponíveis não são claramente perceptíveis, e porque o padrão numérico de [Lourenço, 1996] está de acordo com as evidências experimentais.

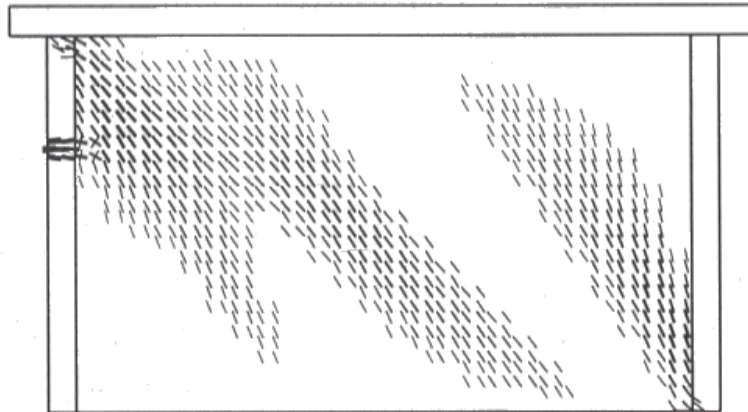
Na Figura 6.26 estão representados os diagramas carga-deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente por [Lourenço, 1996].

A malha de elementos finitos utilizada em todos os casos desta secção pode ser obtida pela divisão da parede a meio, em cada direcção, por forma a obtermos 4 elementos rectangulares com a mesmas dimensões (Figura 6.27).

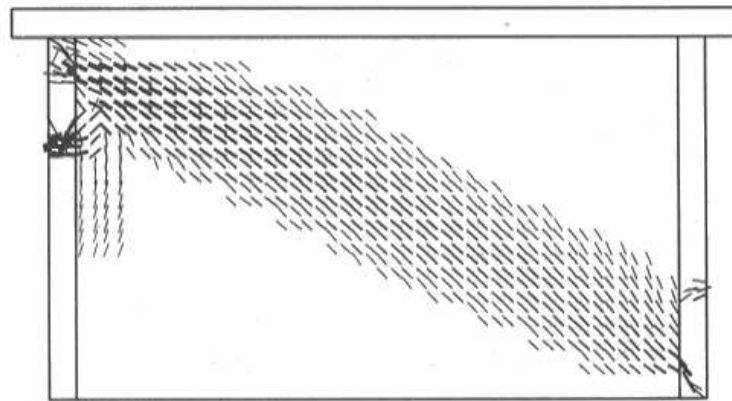
A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.8.

Número de elementos finitos	4
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.02mm

Tabela 6.8: Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.



(a) $\delta = 0.2\text{mm}$



(b) colapso (sem representação dos padrões da figura (a))

Figura 6.25: Padrão de fendilhação na parede ETH Zurich ([Lourenço, 1996]).

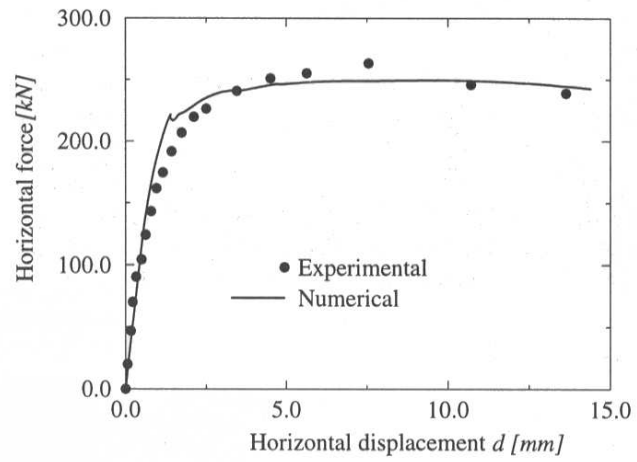


Figura 6.26: Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].

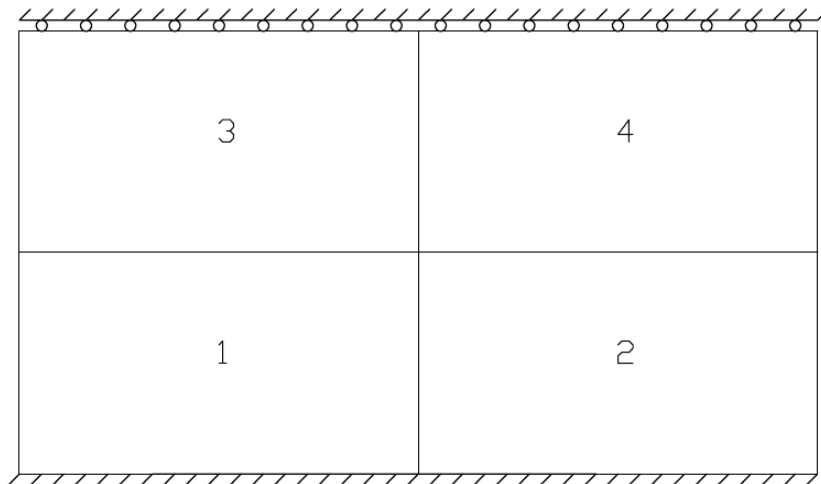


Figura 6.27: Malha de elementos finitos utilizada.

6.3.1 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]

Neste caso usou-se o modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] já apresentado na Figura 6.4 da Secção 6.2.1.2. Para o valor do comprimento característico tomou-se o valor de 75mm.

Analisando conjuntamente o diagrama carga-deslocamento (Figura 6.28) e as distribuições de dano obtidas (Figura 6.29), podemos verificar que a perda de linearidade do diagrama carga-deslocamento se deve ao aparecimento de dano junto dos bordos encastrados, tal como se verificou experimentalmente.

Mais uma vez, tal como discutido na Secção 6.2.1.2, verifica-se que depois do desenvolvimento do dano nas zonas já citadas, o modelo entra em regime linear, dado estarmos a efectuar uma análise geometricamente linear e a estrutura ser capaz de equilibrar o carregamento através de uma biela de compressão.

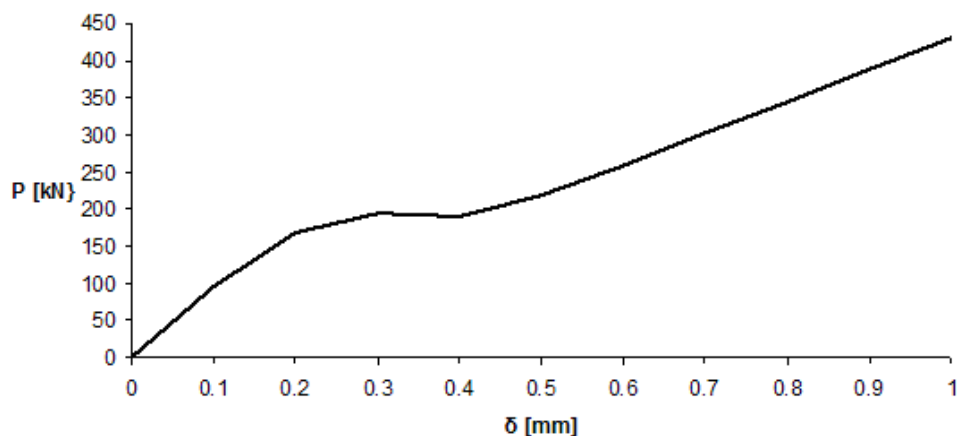
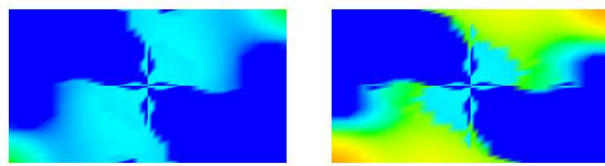
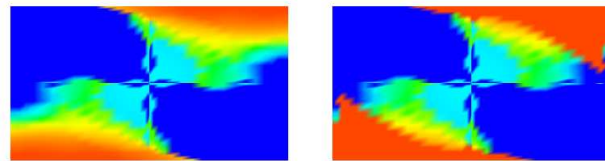


Figura 6.28: Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].



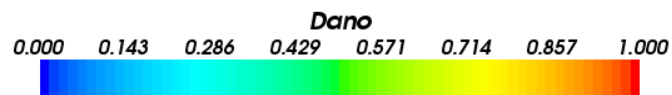
(a) $\delta = 0.20\text{mm}$

(b) $\delta = 0.30\text{mm}$



(c) $\delta = 0.40\text{mm}$

(d) $\delta = 1.00\text{mm}$



(e) Escala de cores

Figura 6.29: Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

6.3.2 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]

O modelo constitutivo adoptado é o de [Mazars, 1984] que já foi apresentado nas Figuras 6.13 e 6.14. O valor do comprimento característico adoptado foi de 75mm.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.30.

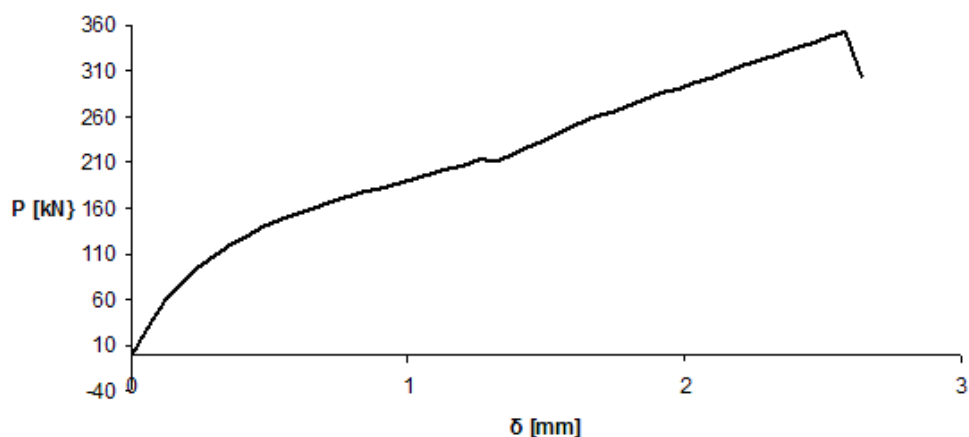


Figura 6.30: Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

Analisando o diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com a distribuição de dano obtida (Figura 6.31), podemos verificar que quando o deslocamento imposto atinge o valor de 0.2mm existe uma quebra de rigidez da resposta, causada pelo aparecimento de dano nas zonas situadas nos bordos encastrados, indicando a formação de fendas de tracção.

A restante fase de desenvolvimento da curva do diagrama carga-deslocamento apresenta claramente um comportamento não-linear crescente, até que se atinge o valor de deslocamento imposto de 1.26mm . Associada a esta não-linearidade do diagrama, está inicialmente o aumento da zona danificada respeitante à fenda de tracção já mencionada, seguindo-se o surgimento de dano na diagonal da parede, tal como verificado nos ensaios experimentais. No

intervalo de 1.26mm a 1.32mm o diagrama sofre uma variação de rigidez, que apenas pode ser relacionada com o agravamento do dano na diagonal da parede e não com o surgimento experimental de um novo fenómeno físico.

A partir do deslocamento imposto 1.32mm o diagrama apresenta um comportamento ligeiramente não-linear, resultado da generalização do dano pela parede, até que para o deslocamento de 2.58mm o modelo deixa de ser capaz de obter convergência na resolução do sistema não-linear.

Outro aspecto relevante para a análise é o entendimento do(s) tipo(s) de fenómeno(s) a que corresponde a distribuição de dano final. Por análise da Figura 6.32, podemos perceber que α_t toma valores mais significativos na diagonal e junto das extremidades encastradas, indicando que essas zonas estão sujeitas predominantemente a danos de tracção. Quanto ao valor de α_c , é nas zonas junto aos bordos encastrados (na extremidade oposta à fenda de tracção) que o fenómeno de compressão é mais relevante, tal como foi observado experimentalmente e relatado por [Lourenço, 1996].

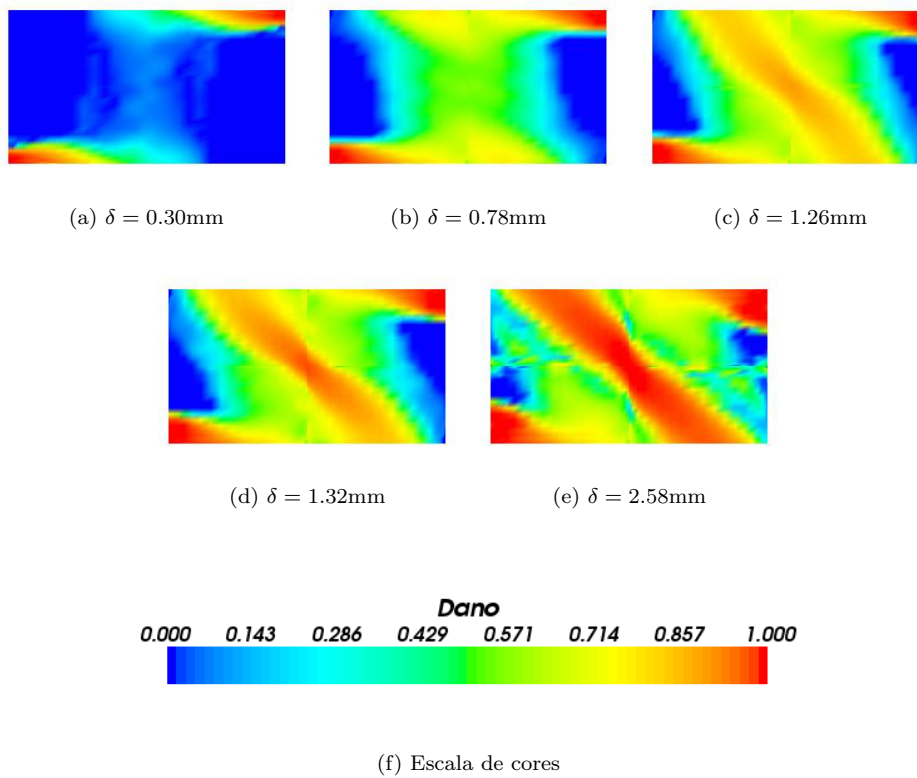


Figura 6.31: Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

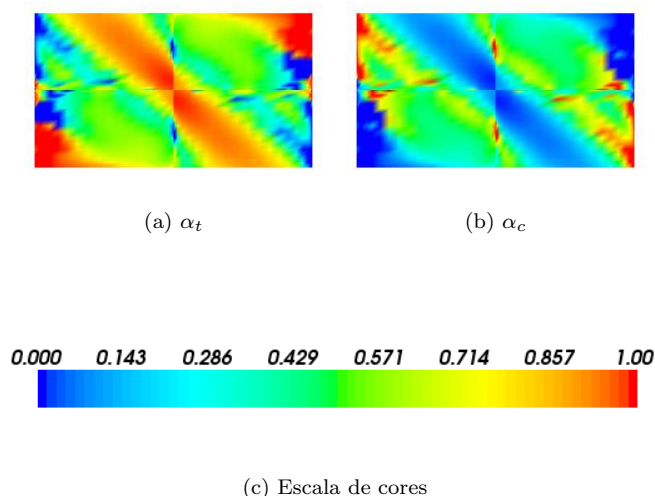


Figura 6.32: Distribuição de α_t e α_c na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] para $\delta = 2.58\text{mm}$.

6.3.3 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a]

O modelo constitutivo adoptado é o modelo de dano de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a] que já foi apresentado nas Figuras 6.18 e 6.19. O valor do comprimento característico adoptado foi de 75mm. Uma vez mais, o programa apenas convergiu para certas malhas de elementos finitos, certos graus de aproximação e certos comprimentos característicos.

Analisando conjuntamente o diagrama carga-deslocamento (Figura 6.33) e a distribuição de dano (Figura 6.34), o comportamento não linear da resposta é consequência da formação de dano de tracção junto dos bordos encastrados e de dano de compressão do lado oposto do dano de tracção. No entanto a análise foi interrompida quando houve sobreposição de dano de compressão e de tracção, como foi justificado na Secção 6.2.4.

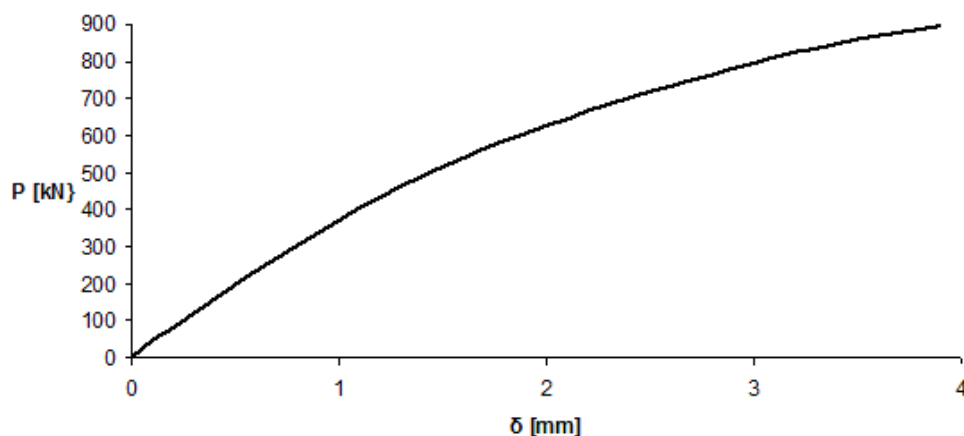


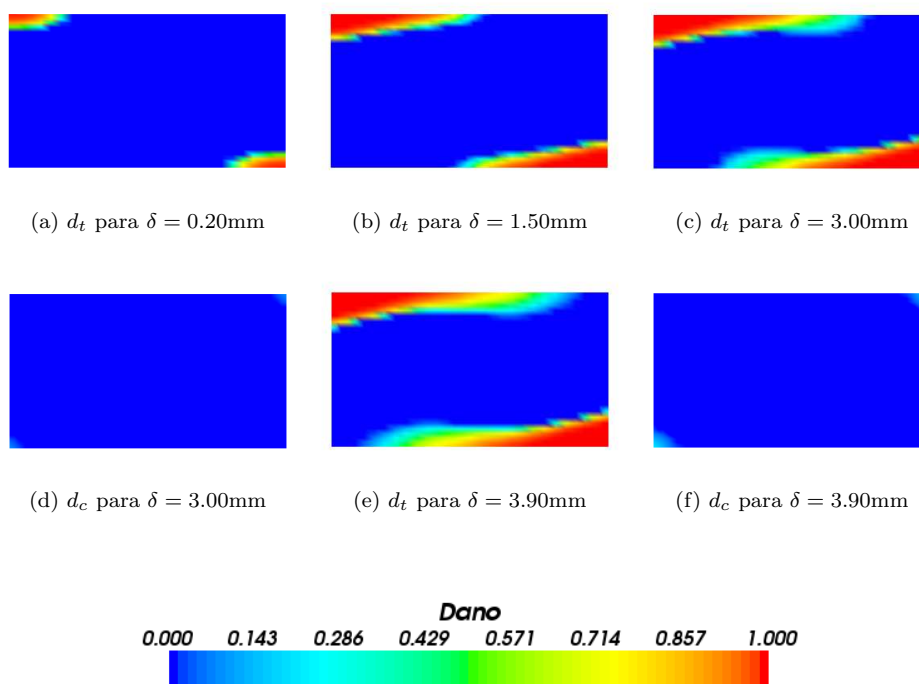
Figura 6.33: Diagrama carga-deslocamento da parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a].

6.3.4 Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas

O modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] é claramente inadequado para a análise da parede de ETH Zurich, pois permite que haja uma forma de equilibrar o carregamento de forma elástica linear, depois do surgimento de dano nos bordos encastrados.

O modelo de [Mazars, 1984] revelou-se uma hipótese interessante para reproduzir os fenómenos físicos que se observaram experimentalmente. No entanto, como não se calibraram os parâmetros do modelo e não se aplicou o mesmo carregamento que foi utilizado nos ensaios experimentais, é perfeitamente natural que o valor de pico atingido pelo modelo não esteja de acordo com as evidências experimentais, embora não se encontre muito distante. No que diz respeito aos deslocamentos, o modelo não foi capaz de exibir o comportamento dúctil observado experimentalmente, embora as justificações já apresentadas para o valor da carga de pico estejam certamente a contribuir para este facto.

Quanto ao modelo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a], os deslocamentos obtidos encontram-se muito distintos do registado experimentalmente e em termos de valor de carga de pico, registou-se praticamente o triplo do valor obtido na análise com o modelo



(g) Escala de cores

Figura 6.34: Distribuição de dano na parede de ETH Zurich analisada com o modelo de dano de duas variáveis de [Comi e Perego, 2001a].

de [Mazars, 1984]. Uma vez mais, o facto de o modelo não se encontrar calibrado e de não se aplicar o mesmo carregamento podem estar na origem deste facto. Por si só esta situação não explica a diferença de valores entre os dois modelos, pois as curvas tensão-deformação uniaxiais são muito semelhantes nos dois casos. Por último, e recuperando as conclusões da Secção 6.2.4, uma vez que o programa não convergiu em diversas situações, somos obrigados a encarar estes resultados com alguma reserva.

6.4 Análise da parede da TU Eindhoven com abertura

Outro caso de estudo usado nesta tese tem por base uma série de ensaios experimentais realizados em paredes de alvenaria na TU Eindhoven e descritos em [Lourenço, 1996]. A geometria da parede está representada na Figura 6.35, e a espessura é de 100mm.

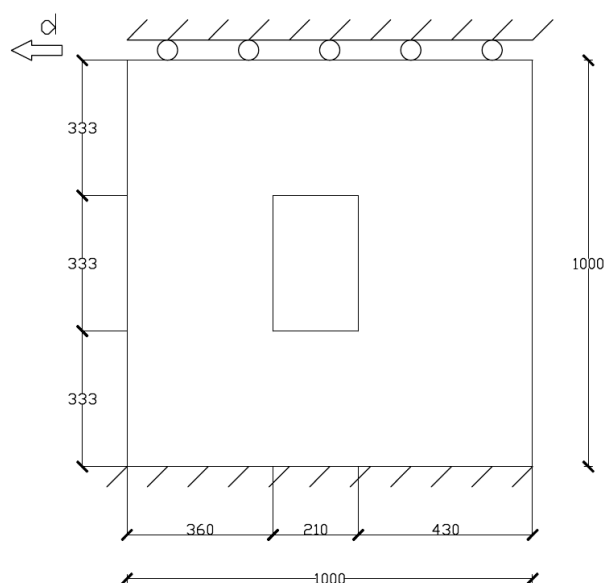


Figura 6.35: Parede de alvenaria em análise (dimensões em mm).

As solicitações impostas à parede subdividem-se em duas fases, a saber:

- aplicação de uma carga vertical uniformemente distribuída no topo da parede (0.30N/mm^2);
- aplicação de um deslocamento imposto no topo da parede, paralelamente à base.

Uma vez mais, como já explicitado e justificado na Secção 6.2, apenas se procederá à análise da aplicação do deslocamento imposto, não se considerando a primeira fase do carregamento e as forças de massa.

Para podermos comparar as distribuições de dano obtidas, representa-se na Figura 6.36 o padrão de fendilhação da parede (dois testes em duas paredes semelhantes, J2G e J3G) no colapso, extraído directamente dos ensaios experimentais e descrito em [Lourenço, 1996].

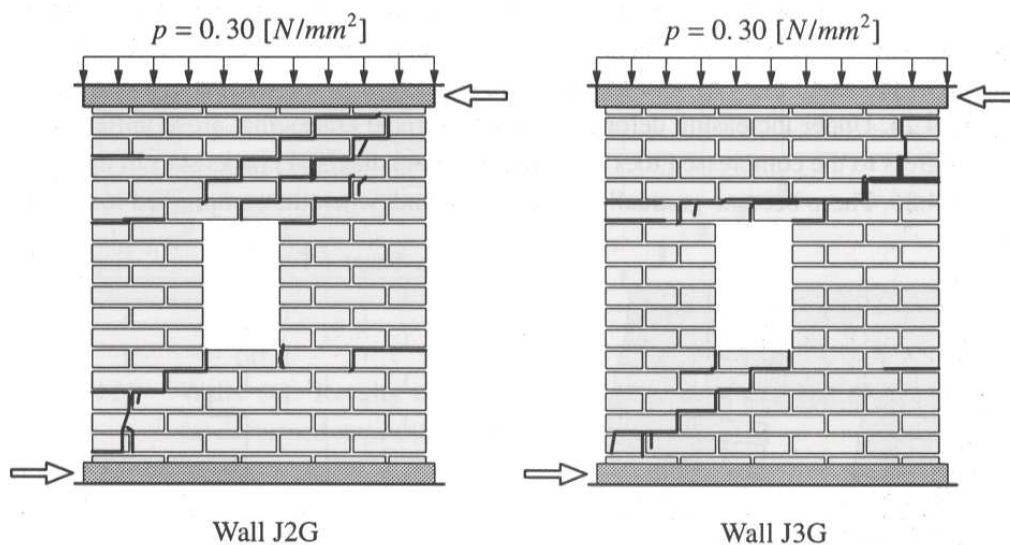


Figura 6.36: Padrão de fendilhação experimental da parede TU Eindhoven com abertura ([Lourenço, 1996]).

Na Figura 6.37 estão representados os diagramas carga-deslocamento obtidos experimentalmente e numericamente por [Lourenço, 1996], através de uma análise descontínua com elementos finitos convencionais.

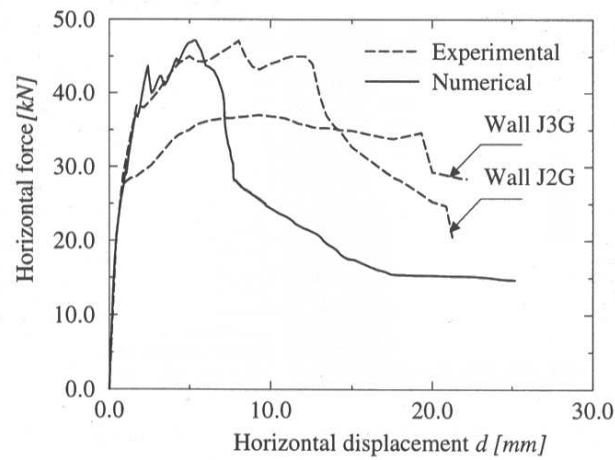


Figura 6.37: Diagramas carga-deslocamento experimentais e numéricos obtidos por [Lourenço, 1996].

A malha de elementos finitos utilizada em todos os casos testados nesta secção encontra-se representada na Figura 6.38. A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.9.

Número de elementos finitos	8
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.01mm

Tabela 6.9: Discretização utilizada no estudo da parede de TU Eindhoven com abertura.

6	7	8
4		5
1	2	3

Figura 6.38: Malha de elementos finitos utilizada.

6.4.1 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b]

Neste caso usou-se o modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] já apresentado na Figura 6.4, adoptando um comprimento característico de 75mm.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.39.

Relacionando o diagrama carga-deslocamento com a distribuição de dano obtida (Figura 6.40), podemos verificar que a primeira não linearidade que surge no diagrama carga-deslocamento é devida ao desenvolvimento de dano nas zonas situadas nos bordos encastrados e na diagonal. O surgimento de dano junto dos bordos encastrados não se encontra de acordo com as evidências experimentais, pois as fendas que ocorrem fora da diagonal dão-se relativamente perto das zonas junto dos bordos encastrados, mas ao nível da transição das zonas mais largas para as zonas mais estreitas. A primeira descarga que se pode verificar no diagrama está relacionada com o agravamento do dano na diagonal, logo seguida do agravamento do dano junto dos bordos. A partir deste ponto a resposta é elástica linear, à excepção da ligeira

quebra por volta do deslocamento imposto de 0.90mm, não relacionável com nenhum novo fenómeno que se tenha verificado experimentalmente, apenas pelo agravamento do dano junto dos bordos. A justificação para se obter de novo uma resposta linear volta a ser o facto de, por estarmos a efectuar uma análise geometricamente linear e por modelarmos a alvenaria como um material de resistência infinita à compressão, a estrutura ser capaz de equilibrar o carregamento que lhe é imposto através de duas bielas de compressão, não alterando a distribuição de dano a partir de um certo valor para o deslocamento imposto.

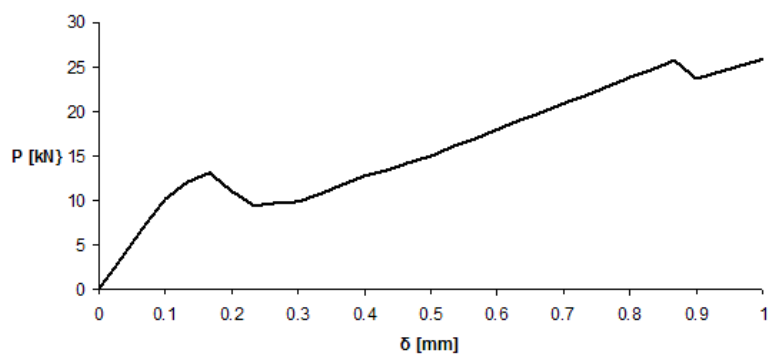


Figura 6.39: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

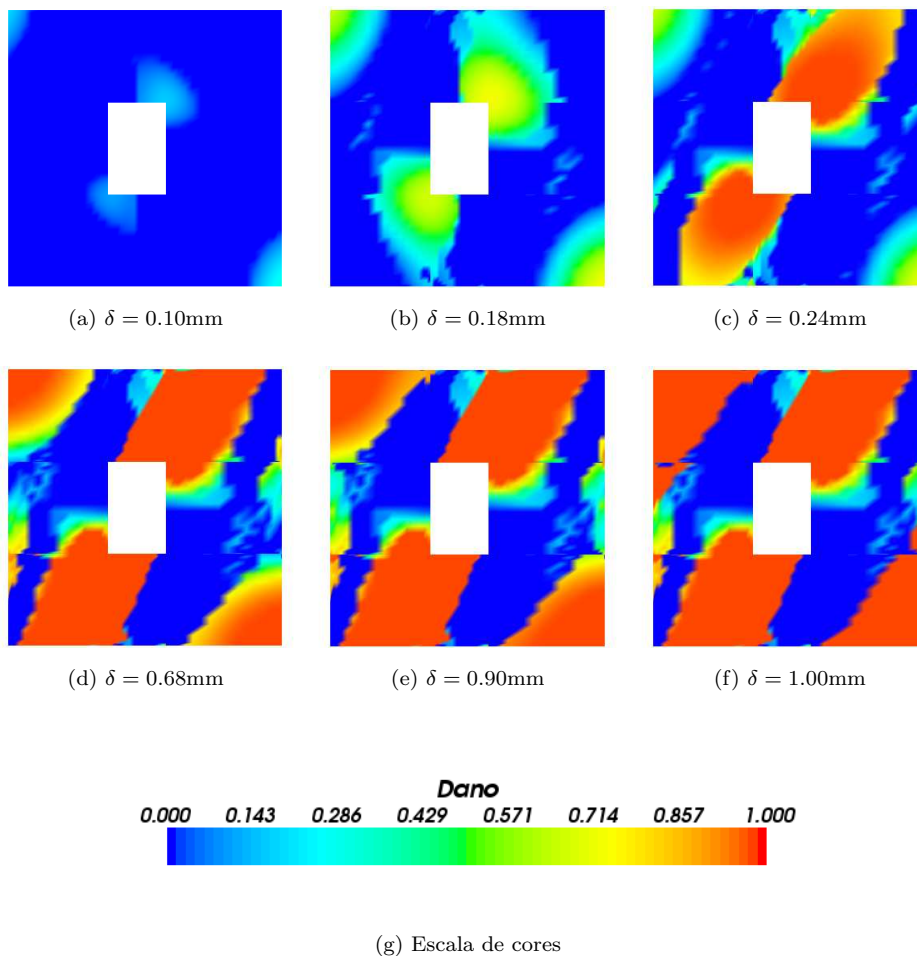


Figura 6.40: Distribuição de dano na parede analisada de TU Eindhoven com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

6.4.2 Análise HMT com aproximação de tensões efectivas e modelo constitutivo de [Mazars, 1984]

O modelo constitutivo adoptado é o de [Mazars, 1984] que já foi apresentado nas Figuras 6.13 e 6.14. O valor do comprimento característico adoptado foi de 75mm.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.41.

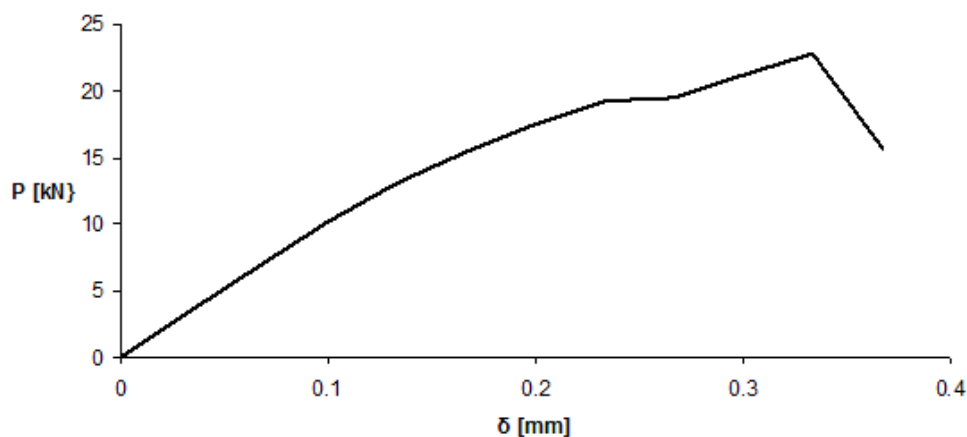


Figura 6.41: Diagrama carga-deslocamento da parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

Analisando o diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com a distribuição de dano obtida (Figura 6.42), podemos verificar que quando o deslocamento imposto atinge o valor de $0,1\text{mm}$, a resposta entra em regime não linear, causada pelo aparecimento de dano nas zonas situadas nos bordos encastrados e na diagonal, estando apenas o segundo fenómeno de acordo com as evidências experimentais. Daí em diante dá-se o agravamento do dano nestas zonas, até que se atinge um patamar em que o deslocamento imposto aumenta sem haver um aumento da força aplicada, causado pelo aumento da variável de dano junto dos bordos encastrados.

A restante fase de desenvolvimento da curva do diagrama carga-deslocamento apresenta um comportamento linear, até que se atinge o valor de deslocamento imposto de $0.33mm$. Neste instante, dá-se um súbito agravamento do dano na diagonal e pode-se constatar uma descarga. Deste ponto em diante o modelo deixa de ser capaz de obter convergência na resolução do sistema não-linear.

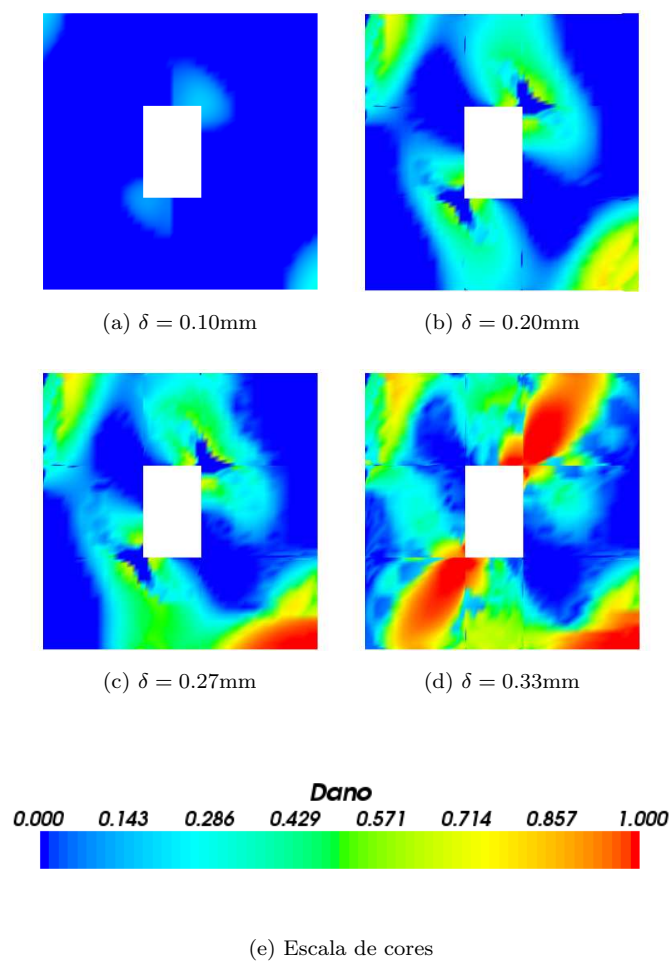


Figura 6.42: Distribuição de dano na parede de TU Eindhoven com abertura analisada com o modelo de dano de [Mazars, 1984].

6.4.3 Reflexões sobre as metodologias de análise utilizadas

O modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] é claramente inadequado para a análise da parede de TU Eindhoven com aberturas, pois permite que haja uma forma de equilibrar o carregamento de forma elástica linear, depois do surgimento de dano nos bordos encastrados e na diagonal.

O modelo de [Mazars, 1984] revelou-se relativamente inadequado para reproduzir os fenómenos físicos que se observaram experimentalmente, pois consegue reproduzir o dano na diagonal mas não consegue recuperar o dano nas transições das zonas mais largas para as zonas mais estreitas. A disparidade entre o valor de pico e a evolução do diagrama entre o modelo adoptado e as evidências experimentais é abismal. Aliado a este facto está associada a não calibração dos parâmetros do modelo, a não aplicação do mesmo carregamento que foi utilizado nos ensaios experimentais, o facto de a estrutura não ter dimensões que permitam uma análise como meio contínuo sem se introduzirem parâmetros de escala, e claro, a hipótese de isotropia assumida, que não se encontra de acordo com a realidade, sendo um comportamento ortotrópico (tanto para as propriedades elásticas como para o processo de dano) o mais indicado para a análise de estruturas de alvenaria regulares.

6.5 Arco cilíndrico

O caso que se apresenta de seguida reporta o estudo de um arco cilíndrico de 2000mm de vão, 130mm de espessura e 1500mm de largura, a que se aplica uma carga pontual a um quarto de vão. O arco foi construído com alvenaria de tijolo cerâmico maciço (peso próprio $\gamma = 20kN/m^3$), tendo sido reforçado com três barras de FRP (fibre-reinforced plastic) de 5cm de espessura e 1cm de altura pelo intradorso. Os resultados dos ensaios experimentais encontram-se em [Creazza et al., 2001].

[Creazza et al., 2001] estudaram com sucesso o comportamento deste arco modelando a alvenaria como um meio contínuo e isotrópico, tendo adoptado um modelo constitutivo de duas variáveis de dano (uma para estados de compressão e outra para estados de tracção). As barras de FRP foram modeladas como um meio contínuo isotrópico, apresentando comportamento elástico linear. A análise levada a cabo por [Creazza et al., 2001] foi realizada através do método dos elementos finitos convencionais, tendo-se efectuado uma análise 2D e 3D, que levaram a resultados muito semelhantes.

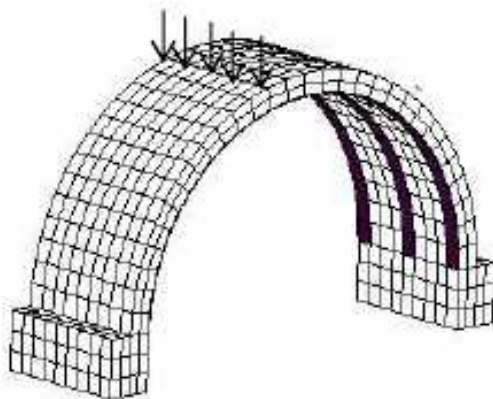


Figura 6.43: Arco cilíndrico analisado por [Creazza et al., 2001].

Nesta dissertação decidiu-se estudar uma outra versão deste arco que não inclui o FRP, pois o programa utilizado apenas permite o estudo de estruturas constituídas pela mesmo material.

No artigo de [Creazza et al., 2001], os autores apenas apresentam o dano à tracção, não revelando se existe dano à compressão. Porém, noutra artigo publicado pelos mesmos autores ([Creazza et al., 2002]) em que se analisa uma arco cilíndrico com o mesmo vão, embora com uma geometria apenas modelável através de elementos finitos tridimensionais, afirma-se que o mecanismo de colapso do arco depende apenas das características de resistência à tracção do material, não sendo a solução afectada significativamente pelo comportamento do material à compressão. Sendo assim, optou-se neste trabalho por analisar a estrutura através do modelo constitutivo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b].

O modelo constitutivo da alvenaria apresentado por [Creazza et al., 2001] pode ser reproduzido pelo modelo de [Comi e Perego, 2001b] adoptando os parâmetros $\mathbf{E} = 1700\text{MPa}$, $\nu = 0.25$, $k = 9.22 \times 10^{-5}\text{MPa}$, $c = 36.30$, $n = 8.07$ e $l_c = 15\text{mm}$, que conduzem à relação constitutiva uniaxial de tracção apresentada na Figura 6.44.

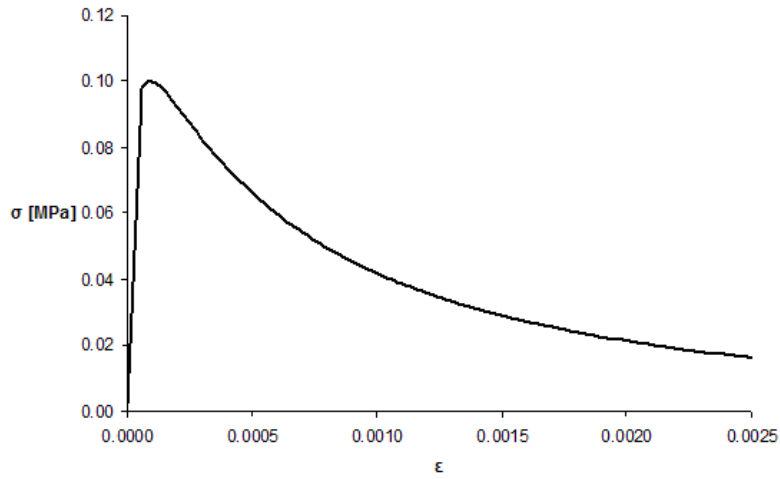
A malha de elementos finitos utilizada encontra-se representada na Figura 6.45. Na impossibilidade de se aplicarem deslocamentos impostos pontuais na programa informático utilizado, optou-se por considerar um elemento de dimensões inferiores aos restantes (elemento 10) para se aplicar na sua fronteira o deslocamento imposto.

A análise do caso em estudo com um modelo híbrido-misto de tensão com aproximação de tensões efectivas foi elaborada tendo por base as características expressas na Tabela 6.10.

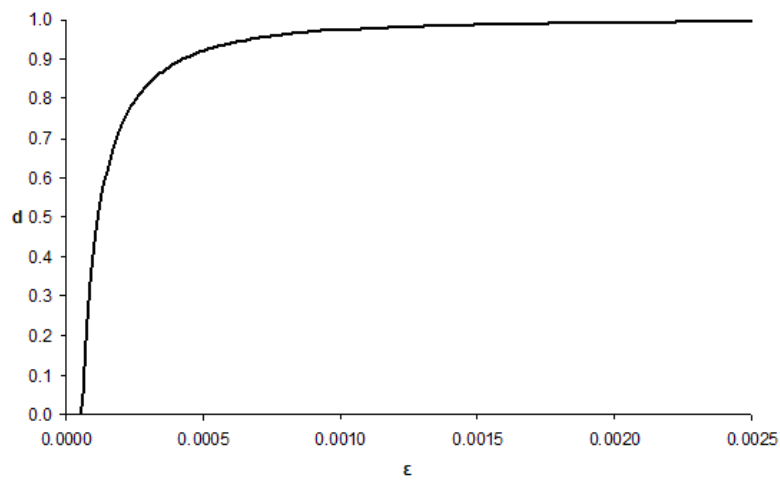
Número de elementos finitos	13
Grau da aproximação das tensões efectivas no domínio	5
Grau da aproximação dos deslocamentos no domínio	4
Grau da aproximação dos deslocamentos na fronteira	4
Número de pontos de integração no domínio em cada direcção	20
Número de pontos de integração na fronteira	20
Deslocamento imposto por passo de carga	0.01mm

Tabela 6.10: Características da análise com a implementação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas.

O diagrama carga-deslocamento obtido está representado na Figura 6.46.



(a) Relação tensão-deformação



(b) Relação deformação-dano

Figura 6.44: Comportamento uniaxial de tracção no modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] adoptado.

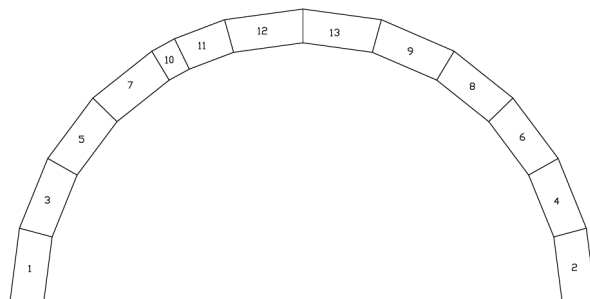


Figura 6.45: Malha de elementos finitos utilizada na análise do arco cilíndrico.

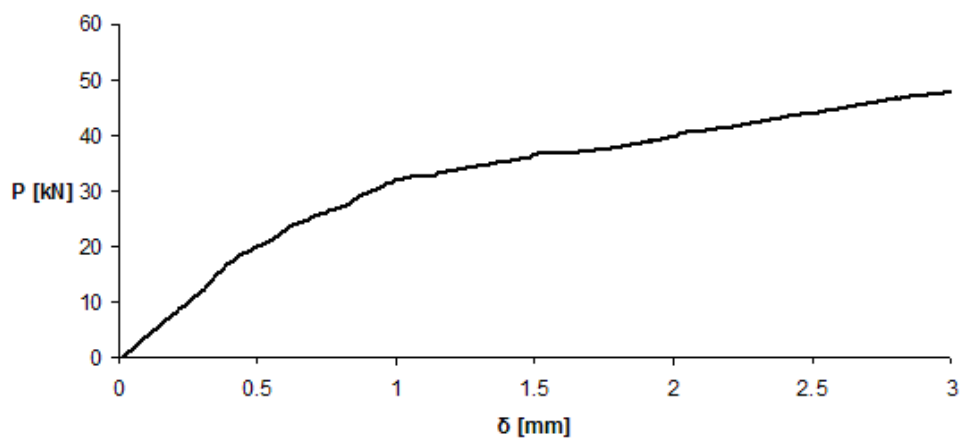


Figura 6.46: Diagrama carga-deslocamento do arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b].

A distribuição de dano obtida por [Creazza et al., 2001] para o arco cilíndrico com reforço de barras de FRP encontra-se representada na Figura 6.47

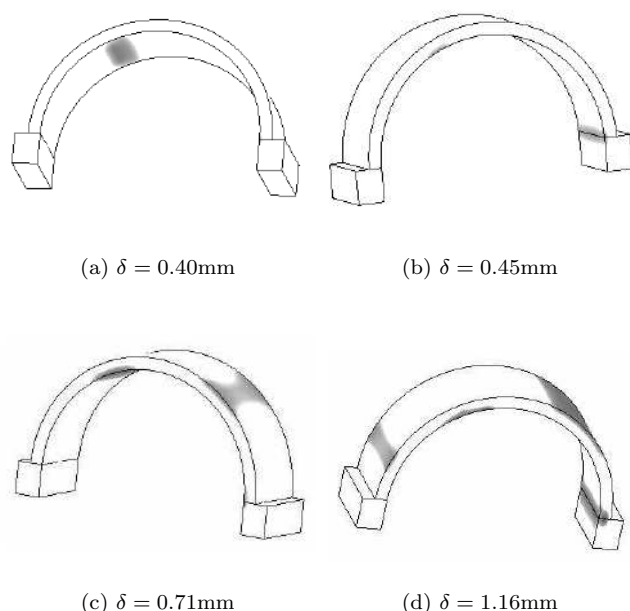


Figura 6.47: Distribuição de dano obtida por [Creazza et al., 2001].

Analisando o diagrama carga-deslocamento e relacionando-o com a distribuição de dano obtida (Figura 6.48), podemos verificar que quando o deslocamento imposto atinge o valor de 0.40mm , a estrutura entra em regime não linear, causada pelo aparecimento de dano nas zonas onde se verificou experimentalmente a fractura da alvenaria.

Uma vez que um arco é uma estrutura três vezes hiperstática, a sua rotura dá-se pela formação de quatro rótulas. O modelo implementado neste trabalho foi capaz de prever a localização das zonas onde as rótulas se formaram, embora a sequência da formação não tenha sido tão bem capturada como na análise tridimensional de [Creazza et al., 2001] (que inclui o FRP). De facto, por análise da Figura 6.48, o modelo prevê que as duas primeiras rótulas se formem em simultâneo, seguida do aparecimento das restantes rótulas para carregamentos diferentes (embora apareça dano simultaneamente nas duas últimas rótulas, devemos encarar uma zona danificada como rótula apenas quando o dano toma o valor de 1).

Quando o deslocamento imposto atinge o valor de 1.20mm (Figura 6.49), sensivelmente, o diagrama carga-deslocamento obtido prevê uma resposta linear, embora tal resposta seja

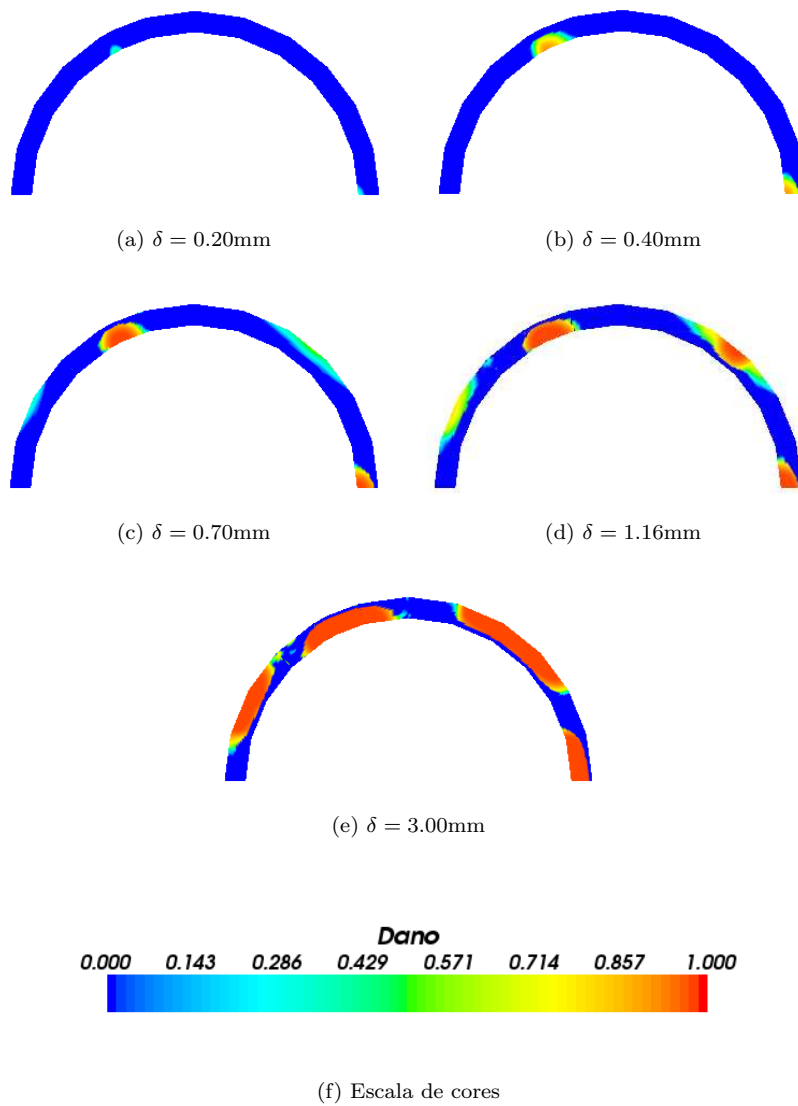


Figura 6.48: Distribuição de dano no arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b].

claramente irrealista. Este facto acontece porque a partir de determinado momento a estrutura é capaz de equilibrar o carregamento apenas por compressão, e o modelo constitutivo utilizado apenas considera dano para estados de tracção.

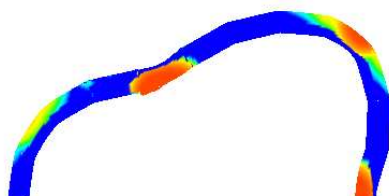


Figura 6.49: Configuração deformada para $\delta = 1.20\text{mm}$ no arco cilíndrico analisado com o modelo de dano de [Comi e Perego, 2001b] (escala de deslocamentos $\times 200$).

Outro aspecto que importa discutir é a capacidade de o modelo prever a carga de colapso da estrutura. Pelo que foi previamente exposto, parece razoável considerarmos que a carga última da estrutura é aquela para a qual o diagrama carga-deslocamento deixa de apresentar um comportamento não-linear e entra em regime linear. Sendo assim, esse valor será de 32kN.

Por forma a aferir o valor de carga última, realizou-se uma análise rígido-plástica, baseada nas seguintes hipóteses [Gago, 2004]:

- a alvenaria apresenta um resistência à tracção nula;
- a alvenaria apresenta uma resistência à compressão ilimitada;
- nas estruturas de alvenaria não ocorrem movimentos de deslizamento relativo nas juntas entre aduelas;
- os elementos estruturais são indeformáveis;
- a deformação da estrutura ocorre localizadamente pela abertura das juntas entre elementos.

Como é sabido, o teorema cinemático da análise limite estabelece que de entre todos os mecanismos cinematicamente admissíveis, o que define o colapso é aquele a que corresponde o menor parâmetro de carga, sendo o parâmetro de carga correspondente a um dado mecanismo

cinematicamente admissível calculado de modo a que a energia dissipada internamente seja igual à energia dissipada pelas forças exteriores.

Considerando posições genéricas para as articulações do mecanismo cinematicamente admissível (Figura 6.50), a carga \mathbf{P} de colapso pode ser determinada fazendo o balanço do trabalho realizado nesse campo de deslocamentos pela totalidade das forças aplicadas. Sendo assim, a equação que define o valor da carga \mathbf{P} é:

$$\mathbf{P}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{Q}_{pp1}\Delta\mathbf{v}_{pp1} + \mathbf{Q}_{pp2}\Delta\mathbf{v}_{pp2} + \mathbf{Q}_{pp3}\Delta\mathbf{v}_{pp3} = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

onde $\Delta\mathbf{v}$ é o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga, $\Delta\mathbf{v}_{ppi}$ e \mathbf{Q}_{ppi} o deslocamento vertical do centro de gravidade e o peso próprio do corpo de cada corpo i , respectivamente. O cálculo dos deslocamentos pode ser efectuado como apresentado na Figura 6.51.

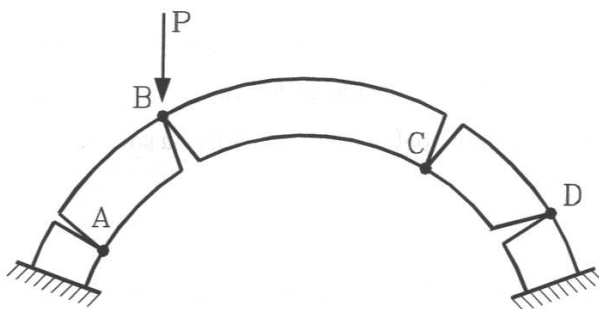


Figura 6.50: Mecanismo de colapso de um arco submetido à acção de uma carga concentrada ([Gago, 2004]).

A análise rígido-plástica que se efectuou foi realizada por um programa informático desenvolvido pelo investigador [Gago, 2004], assumindo que uma das rótulas se situa no ponto de aplicação da carga e que outra se localiza na base do arco, no semi-vão oposto ao semi-vão de aplicação da carga concentrada. Estas hipóteses encontram-se de acordo com as evidências experimentais.

O valor de carga última que se obteve foi de 1.34kN, um valor muito distante do obtido no modelo HMT. Uma possível explicação para esta disparidade pode residir no facto de a

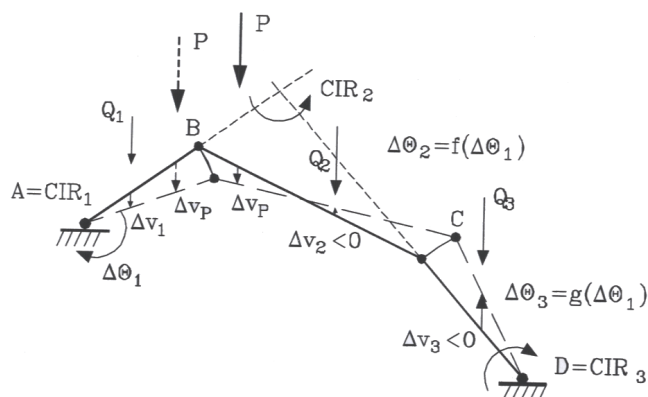


Figura 6.51: Cálculo dos deslocamentos num mecanismo cinematicamente admissível ([Gago, 2004]).

relação constitutiva estar mal calibrada, pois [Creazza et al., 2001] afirmam que o modelo que adoptaram foi capaz de recuperar o mecanismo de colapso do arco para um deslocamento de 1.16mm, tal como como se constatou experimentalmente. Porém, o colapso do arco deu-se para um deslocamento de cerca de 5.0mm, pois o embora a alvenaria tivesse formado o mecanismo de colapso muito antes, o FRP impediu o colapso e foi responsável pela maior capacidade de carga da estrutura, que exibiu um comportamento não linear crescente a partir do momento em que se formou a primeira rótula. Assim sendo, e uma vez que o FRP foi modelado por [Creazza et al., 2001] como exibindo um comportamento elástico linear, a partir do momento em que a alvenaria formou o mecanismo de colapso, a resposta obtida pelo modelo de [Creazza et al., 2001] deveria ser elástico linear. Tal facto não se verificou, pelo que o comportamento não linear do diagrama carga-deslocamento deve ser associado ao comportamento da alvenaria, e portanto os efeitos não lineares que o FRP sofreu experimentalmente estão a ser modelados por [Creazza et al., 2001] como efeitos da alvenaria. Por tudo isto, assemelha-se bastante plausível que o modelo constitutivo utilizado esteja mal calibrado.

No entanto, o insucesso na previsão da carga última não invalida que se extraíam conclusões interessantes sobre a metodologia utilizada. Claramente o modelo é capaz de prever as zonas onde se formarão as rótulas que originam o mecanismo de colapso, embora seja necessário aferir o valor da carga última com outro tipos de modelo, pois existirá sempre um caminho de cargas, de forma a equilibrar o carregamento, que apenas apresente estados de compressão, levando o modelo a comportar-se como elástico linear depois da formação das zonas danifica-

das. Outro aspecto que importa salientar é o facto de os modelos de dano não serem capazes de encontrar o tipo de rotura localizado típico das alvenarias em arcos, mas este aspecto é comum a todos os modelos contínuos que modelam meios descontínuos, que têm que desvanecer no interior da sua formulação os fenómenos típicos das alvenarias garantindo que se mantém em média uma correcta relação tensões-deformações.

6.5.1 Reflexão sobre a metodologia de análise utilizada

O modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] reproduz com exactidão as zonas onde se formam rótulas que levam ao colapso da estrutura, embora por forma a determinar a carga de colapso deva ser utilizada outra metodologia (análise limite, por exemplo), pois a análise geometricamente linear com este modelo permite que haja um caminho de cargas que equilibra o carregamento apenas com estados de compressão. No entanto não foi possível recuperar a carga de colapso do arco pois julga-se que o modelo constitutivo se encontra mal calibrado. Outra reflexão que importa fazer neste instante é que a hipótese da isotropia se revela uma boa aproximação no caso de arcos, pois a dimensão das unidades é muito pequena quando comparada com a dimensão da estrutura e a ortotropia do comportamento estrutural não é tão vincada. Por último importa concluir que o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] é adequado para a análise de estruturas onde o modo de rotura da estrutura apenas dependa das características de resistência à tracção do material.

Capítulo 7

Conclusões e desenvolvimentos futuros

7.1 Conclusões

As principais conclusões desta dissertação são:

1. a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas e a formulação híbrida de deslocamento conjugadas com o modelo de uma variável de dano de [Comi e Perego, 2001b] apenas são adequadas para análise de estruturas de alvenaria onde a rotura se deva a fenómenos exclusivamente de tracção;
2. a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas conjugada com o modelo de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a] apresenta dificuldades na determinação do dano de tracção e compressão quando ambos estão activos numa mesma zona, se bem que tal facto raramente tenha correspondência na realidade;
3. a formulação híbrida-mista de tensão com aproximação de tensões efectivas conjugada com o modelo de dano de [Mazars, 1984] revelou um comportamento promissor, ao conseguir recuperar os fenómenos evidenciados experimentalmente;
4. as alvenarias regulares exibem um comportamento ortotópico, e a análise de paredes

constituídas por este material com modelos contínuos isotrópicos revela-se inadequada. No entanto, no caso de arcos, o comportamento ortotrópico da alvenaria pouco influi no comportamento da estrutura, pelo que uma análise como meio contínuo isotrópico constitui uma boa estratégia para a modelação da mesma.

7.2 Desenvolvimentos futuros

O detalhe exigido ao modelo constitutivo depende do tipo de problema em análise. É sabido que uma descrição real das alvenarias deve englobar vários tipos de comportamento, como o aparecimento de dano, de deformações irreversíveis e a passagem de uma fendilhação difusa para uma macrofenda. Quando se tem em conta a existência de dano no material, é possível modelar a diminuição de rigidez do material e da resistência a partir de determinado estado de degradação. Por outro lado, os modelos plásticos permitem representar as deformações irreversíveis existentes ao nível da microestrutura. No entanto, a aplicação de uma análise de fenda discreta poderá ser mais adequada a partir do momento em que se consegue modelar a fendilhação difusa. Sendo assim, o mais lógico será desenvolver modelos de dano com plasticidade e proceder em determinado estado à transição de uma análise contínua para uma outra descontínua.

Os restantes desenvolvimentos futuros passam pelo aperfeiçoamento das técnicas usadas nesta dissertação, que poderão incidir em:

1. proceder à calibração dos modelos de dano utilizados;
2. proceder à generalização dos modelos numéricos para estruturas tridimensionais;
3. incorporar informação para a análise de estruturas de alvenaria reforçadas;
4. aplicar as técnicas utilizadas na análise de estruturas constituídas por outros materiais que também apresentem ramo de amolecimento;
5. incorporar nos programas a possibilidade de se considerarem modelos de dano ortotrópicos;
6. estender a implementação dos modelos constitutivos de [Mazars, 1984] e de duas variáveis de dano de [Comi e Perego, 2001a] à formulação híbrida de deslocamento;

7. incorporar informação que permita mudar as condições de apoio das estruturas analisadas;
8. incorporar informação que possa reduzir a resistência à compressão à medida que a resistência à tracção diminui, de forma a que se possam modelar estruturas cujo comportamento global esteja dependente de uma quantas juntas e unidades;
9. proceder a análise de estruturas de alvenaria irregular com os modelos de dano utilizados nesta tese, pois o comportamento mecânico deste material deverá ser melhor aproximado com um modelo contínuo isotrópico do que as alvenarias regulares.

Bibliografia

- Backes, H. (1985). On the behaviour of masonry under tension in the direction of bed joints in direct shear. *Journal of Structural Engineering*. traduzido do Alemão.
- Borrell, C. M. (1996). Mechanical behaviour of masonry. In A. M. . O. E. Roca, P. ; González (Ed.), *Structural analysis of historical constructions - possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 86–122. Cimne.
- Castro, L. M. S. S. (1996). *Wavelets e Séries de Walsh em Elementos Finitos*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa.
- Comi, C. e U. Perego (2001a). Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*.
- Comi, C. e U. Perego (2001b). Numerical aspects of nonlocal damage analyses of concrete structures. *European Journal of Finite Elements*.
- Creazza, G., R. Matteazzi, A. Saetta, e R. Vitaliani (2001). Analysis of masonry structures reinforced by frp. In P. Lourenço e P. Roca (Eds.), *Historical Constructions*.
- Creazza, G., R. Matteazzi, A. Saetta, e R. Vitaliani (2002). Analyses of masonry vaults: a macro approach based on three-dimensional damage model. *Journal of structural engineering*.
- Dhanasekar (1985). The failure of brick masonry under biaxial stress. *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 79, 295–313.
- Fish, J. e T. Belytschko (2007). *A first course in finite elements*. Wiley.
- Freitas, J. T. (1989). Duality and symmetry in mixed integral methods of elastotatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 28, 1161–1179.

- Freitas, J. T., J. M. Almeida, e E. R. Pereira (1999). Non-conventional formulations for the finite element method. *Computational Mechanics* 23, 488–501.
- Gago, A. d. S. (2004). *Análise estrutural de arcos, abóbadas e cúpulas - contributo para o estudo do património construído*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa.
- Kachanov, L. M. (1958). Rupture time under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk* (8), 26–31. traduzido de Russo.
- Lemaitre, J. (1992). *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. e J.-L. Chaboche (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- Lourenço, P. (1996). *Computational strategies for masonry structures*. Tese de doutoramento, Delft University of Technology.
- Mazars, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Tese de doutoramento, U. Paris.
- Oñate, E., A. Hanganu, A. Barbat, S. Oller, R. Vitaliani, A. Saetta, e R. Scotta (1996). Structural analysis and durability assessment of historical constructions using a finite element damage model. In *Structural analysis of historical constructions - possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 189–224. Cimne.
- Page, A. (1981). The biaxial compressive strength of brick masonry. *Proc. Instn. Civ. Engrs.* 79, 893–906.
- Page, A. (1983). The strength of brick masonry under biaxial tension compression. *International Journal of Masonry Construction* 3(1), 26–32.
- Paula, C. (2001). *Contribuição ao estudo das respostas numéricas não lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas*. Tese de doutoramento, Escola de Engenharia São Carlos da Universidade de São Paulo.
- Perego, M. (1990). *Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni*. Tese de doutoramento, Politecnico de Milano.
- Pereira, E. (1993). *Elementos finitos de tensão - aplicação a análise elásticas de estruturas*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa.

- Pereira, O. J. (2004). Introdução ao método dos elementos finitos na análise de problemas planos de elasticidade. Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa.
- Rabotnov, Y. (1968, August). Creep rupture. In H. M. . V. W.G. (Ed.), *Applied Mechanics - Proceedings of the twelfth international congress of applied mechanics*, pp. 342-349. Standford University: Springer-Verlag.
- Reddy, J. (1985). *An introduction to the finite element method*. McGraw-Hill.
- Roberts, J. e O. Brooker (2007, November). *How to design masonry structures using Eurocode 6*. Modern Masonry Alliance - The Concrete Centre.
- Silva, M. C. O. M. (2006). *Modelos de Dano em Elementos Finitos Híbridos e Mistos*. Tese de doutoramento, Instituto Superior Técnico Universidade Técnica de Lisboa.

Anexo A

Relações fundamentais de um problema de estado plano de tensão

Neste apêndice apresentam-se os operadores e as grandezas definidas na secção 2.2 para um estado plano de tensão, admitindo como válidas as hipóteses da linearidade geométrica. As grandezas e equações são escritas relativamente a um eixo coordenado Cartesiano.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x \\ \mathbf{b}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{E}}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \mathbf{0} \\ \nu & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

onde \mathbf{E} representa o módulo de elasticidade e ν o coeficiente de Poisson do material.