



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
Universidade Técnica de Lisboa

# **Gestão de uma Carteira de Activos de Produção de Energia Eléctrica**

Investimento na óptica da Teoria da Carteira

**Maria Margarida D'Ávila Duro de Sousa e Silva**

Dissertação para a obtenção do Grau de Mestre em  
**Engenharia e Gestão Industrial**

## **Júri**

Presidente: Prof. Paulo Vasconcelos Dias Correia

Orientador: Prof. Pedro Alexandre Flores Correia

Vogais: Prof. José Filipe Garcia Corrêa Guedes

Prof<sup>a</sup> Maria Margarida Martelo Catalao Lopes de Oliveira Pires Pina

**Junho 2008**

## **Agradecimentos**

Um enorme obrigada ao Professor Pedro Flores Correia, pelo ambiente descontraído e intelectualmente estimulante que acompanhou o desenvolvimento da tese. A sua motivação, disponibilidade e incentivo foram indispensáveis à realização desta dissertação.

Outro enorme obrigado aos meus pais pelas oportunidades ao longo da minha vida. Nesta fase mais específica, à mãe pelo apoio no dia a dia e ao pai pelas tantas ajudas e revisões técnicas preciosas. Obrigada ao Vasco pela disponibilidade dos seus recursos informáticos e por tudo o resto.

Gostava também de agradecer ao Professor Corrêa Guedes, pela sua disponibilidade e conselho no arranque do trabalho.

Finalmente, ao Instituto Superior Técnico pela minha formação. Pelos horizontes alargados e pelas oportunidades que vieram e virão, para as quais me preparou tão bem.

## Resumo

Num ambiente de mercado competitivo, as empresas de produção de energia eléctrica estão expostas aos riscos associados ao preço e quantidade de energia transaccionada. A quantificação destes riscos, tendo em conta a sua interacção, é fundamental para a decisão de investimento na carteira de activos de produção.

A presente tese formula um conjunto de ferramentas de apoio à decisão de investimento em carteiras de activos de produção de energia eléctrica segundo a óptica da Teoria da Carteira. Usa-se o conceito de fronteira eficiente de retorno e risco desta teoria para a optimização e selecção da carteira de activos de produção.

Recorre-se à simulação de Monte Carlo para simular os fluxos monetários de exploração anuais de cada classe de activos, de modo a estimar o retorno e risco dos investimentos. Na simulação dos fluxos monetários, utilizam-se processos estocásticos para descrever o comportamento das variáveis exógenas ao funcionamento dos activos de produção.

Aborda-se a decisão de investimento sob duas perspectivas: alocação de capital de investimento anual e alocação de potência a cada tipo de activo considerado. Considera-se a introdução de restrições de risco, de retorno e de capacidade instalada sobre a fronteira eficiente para a selecção de carteiras óptimas num domínio que respeite as condições e as expectativas da empresa detentora dos activos. A partir das restrições introduzidas, determina-se acções de compra e venda de activos de produção no sentido da composição de uma carteira óptima.

**Palavras chave:** activos de produção de energia eléctrica, decisões de investimento, processos estocásticos, Teoria da Carteira

## **Abstract**

*Generation companies operating in a competitive market face price and volume risks that affect their return. Being able to identify and quantify these risks for each type of generation asset and how they interact is fundamental when making investment decisions regarding the portfolio of generation assets.*

*This work proposes a set of tools to support the decision of investment in a portfolio of generation assets, according to portfolio theory. The concept of efficient frontier of risk and return as set in that theory is used to find optimal generation portfolios.*

*Gas-, coal- and fuel- fired as well as hydroelectric and on-shore wind power plants are considered. Risk and return are estimated through Monte Carlo simulation of free cash flows. For that effect, exogenous variables such as fuel, electricity and emission prices, wind speeds and water inflows are modeled with stochastic processes.*

*Investment decisions are studied for two perspectives: fixed capital costs allocation and installed capacity allocation. Considering constraints for risk, return and capacity over the efficient Pareto frontier, decisions of buy and/or sell required to achieve optimal generation portfolios are pointed out.*

**Keywords:** *generation assets, investment decisions, portfolio theory, stochastic processes*

# Índice

Agradecimentos .....	i
Resumo .....	ii
<i>Abstract</i> .....	iii
Índice .....	iv
Lista de figuras.....	v
Lista de tabelas .....	vii
1 Introdução .....	1
1.1 Motivação .....	1
1.2 Objectivos.....	2
1.3 Estrutura.....	2
2 Teoria da Carteira .....	4
2.1 Pilares da Teoria da Carteira .....	4
2.2 Composição de carteiras de activos.....	5
2.3 Optimização e selecção de carteiras de activos .....	7
3 Caracterização da incerteza: variáveis exógenas de natureza estocástica.....	9
3.1 Preços da electricidade, dos combustíveis fósseis e das emissões de CO <sub>2</sub> .....	9
3.2 Hidraulicidade.....	16
3.2.1 Hidrologia estocástica.....	16
3.2.2 Potência hídrica.....	19
3.3 Eolicidade.....	21
3.3.1 Séries temporais da velocidade do vento.....	21
3.3.2 Potência eólica .....	25
4 Valoração dos activos de produção eléctrica .....	27
4.1 Fluxos monetários anuais .....	27
4.2 Medidas de referência: retorno esperado e risco.....	30
5 Gestão de uma carteira de activos de produção eléctrica – investimento segundo a óptica da Teoria da Carteira .....	33
5.1 Alocação de investimento – custo fixo de capital anual .....	33
5.2 Alocação de potência.....	34
5.2.1 Restrições de retorno, de risco e de potência .....	35
5.2.2 Decisões de compra e/ou venda de activos de produção no sentido da composição de carteiras óptimas .....	36
5.3 Ilustração.....	37
6 Conclusão .....	41
Referências bibliográficas.....	42
A1. Lema de Itô.....	44
A2. Parâmetros da barragem de Miranda do Douro .....	45
A3. Parâmetros dos activos de produção e dos processos estocásticos considerados.....	46
A4. Resultados da ilustração .....	48

## Lista de figuras

- Figura 1. Conjunto dos pares possíveis  $(\sigma, \mu)$  de hipotéticas carteiras compostas por N activos diferentes. (Note-se que a cada par corresponde um diferente peso relativo dos vários activos em consideração). Os gráficos à esquerda referem-se a carteiras compostas por 2 activos com os seguintes pares  $(\sigma_i, \mu_i): (0.2, 0.5), (0.3, 0.7)$ . Os gráficos à direita referem-se a uma carteira composta por 3 activos com os seguintes pares  $(\sigma_i, \mu_i): (0.2, 1.3), (0.25, 1.7), (0.2, 0.7)$ . Na 1ª linha, os retornos têm entre si correlação negativa de -1; na 2ª linha correlação nula de 0; na 3ª linha correlação máxima de 1. ....6
- Figura 2. A preto está representada a fronteira eficiente de risco e retorno sobre o domínio de pares  $(\sigma, \mu)$  possíveis.....8
- Figura 3. Processo Browniano geométrico com reversão para a média. Média de 10 trajectórias dos preços futuros das emissões de CO<sub>2</sub>, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos. Parâmetros:  $s(0) = 17, \lambda = 0.05, \phi = \ln(30.6), \sigma = 0.15$  . .... 11
- Figura 4. Processo Browniano geométrico com reversão para a média. A preto está representada a média de 10 trajectórias dos preços futuros da electricidade, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos. A encarnado está enunciado o efeito da reversão para a média. Parâmetros:  $s(0) = 58, \lambda = 1.93, \phi = \ln(40), \sigma = 0.6$  . .... 12
- Figura 5. Processos brownianos geométricos com reversão para a média correlacionados. Média de 10 trajectórias correlacionadas para cada combustível, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos. .... 15
- Figura 6. Previsão a 16 anos de caudais afluentes com sazonalidade mensal. Parâmetros estimados a partir do histórico da barragem de Miranda (A2)..... 19
- Figura 7. Potência média mensal gerada por uma barragem com os caudais afluentes simulados na secção 3.2.1. Parâmetros:  
 $\rho_{\text{água}} = 10^3 \text{ Kg} / \text{m}^3, g = 9.8 \text{ m} / \text{s}^2, \Delta h = 58 \text{ m}, \alpha = 5\%, \eta = 87\%$  . .... 20
- Figura 8. Trajectórias de vento correlacionadas de dois locais distintos, referentes a 200 horas. Em cada gráfico apresenta-se a trajectória de cada local..... 24
- Figura 9. Curva de potência de uma turbina Vesta V44 600/44 com potência instalada de 600 kW, diâmetro 44 m, altitude 35m, com *cut in* e *cut out* respectivamente 4 e 20 m/s. [17] .... 25
- Figura 10. Trajectórias da potência média por hora gerada por uma turbina com as características da figura 12. Cada gráfico representa a potência associada às trajectórias de vento de cada local da figura 8. .... 26
- Figura 11. Distribuição ilustrativa dos fluxos monetários de uma central térmica a carvão, com potência nominal de 400MW e 4500 horas equivalentes anuais, ao longo de 20 anos de vida útil. .... 29
- Figura 12. Histograma de frequências absolutas do fluxo monetário de exploração anual [M€] de uma central térmica a carvão com 400MW de potência nominal e 4500 horas equivalentes, resultado de uma amostra com dimensão 500. .... 32
- Figura 13. Restrições de retorno e de risco. À esquerda mostra-se todas as carteiras do domínio de risco-retorno que representam uma melhoria de Pareto face à carteira actual. À direita representa-se as melhorias de Pareto pertencentes à fronteira eficiente..... 35
- Figura 14. Restrições de capacidade instalada. À esquerda mostra-se todas as carteiras do domínio de risco-retorno compostos no mínimo por 60% de um dado activo. À direita representa-se estas carteiras que pertencem à fronteira eficiente..... 36
- Figura 15. Compra e/ou venda de activos no sentido da composição de carteiras óptimas sobre a fronteira eficiente, tendo como ponto de origem a carteira actual representada pelo ponto preto no centro da figura..... 36

**Figura 16.** As linhas ilustram o conjunto de carteiras ótimas da fronteira eficiente para os cenários 1 e 2, respeitando as restrições de risco, de retorno e de capacidade. B/D e A/C representam as carteiras com menor e maior risco  $\sigma$ , respectivamente, para cada cenário. Os pontos isolados à direita representam o par risco-retorno  $(\sigma_{r_p}^*, \mu_{r_p}^*)$  das carteiras actuais para cada cenário..... 38

Figura 17. Distribuição de probabilidade dos fluxos monetários de exploração das carteiras ótimas com menor e maior risco do cenário 1. .... 40

Figura 18. A cinzento mais claro está representado o domínio de risco-retorno para o cenário 1; a cinzento mais escuro está representada a fronteira eficiente; a preto estão representadas as carteiras ótimas que obedecem as restrições de risco, de retorno e de potência..... 48

Figura 19. Conjunto dos pares risco-retorno das carteiras ótimas do cenário 1, bem como os respectivos pesos em potência..... 48

Figura 20. Decisões de compra e/ ou venda no sentido das carteiras ótimas para o cenário 1. 49

Figura 21. A cinzento mais claro está representado o domínio de risco-retorno para o cenário 2; a cinzento mais escuro está representada a fronteira eficiente; a preto estão representadas as carteiras ótimas que obedecem as restrições de risco, de retorno e de potência..... 49

Figura 22. Conjunto dos pares risco-retorno das carteiras ótimas do cenário 2, bem como os respectivos pesos em potência..... 50

Figura 23. Decisões de compra e/ ou venda no sentido das carteiras ótimas para o cenário 2. 50

## Lista de tabelas

Tabela 1. Activos de produção considerados.....	37
Tabela 2. Constituição da carteira actual.....	37
Tabela 3. Retorno e risco de cada tipo de activo de produção considerado, bem como da carteira actual, para cada um dos cenários referidos acima, com uma diferença no valor de longo prazo da electricidade de 4€/MWh.....	38
Tabela 4. Pesos em capacidade instalada de cada tipo de activo nas carteiras com maior (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.....	39
Tabela 5. Decisões de compra (>0) e/ou venda (<0) de cada tipo de activo de produção [MW] no sentido das carteiras com maior risco (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.....	40
Tabela 6. Valor esperado e desvio padrão dos fluxos monetários de exploração anuais (fm) das carteiras com maior risco (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.....	40
Tabela 7. Dados históricos da barragem de Miranda.....	45
Tabela 8. Parâmetros do processo (28) para gerar o logaritmo dos caudais: média, desvio padrão e correlação entre o i-ésimo mês e o mês anterior, estimados segundo (24), (25) e (26).....	45
Tabela 9. Parâmetros dos activos de produção.....	46
Tabela 10. Parâmetros dos processos dos preços.....	46
Tabela 11. Matriz de correlação dos preços dos combustíveis fósseis.....	46
Tabela 12. Parâmetros da central hídrica.....	46
Tabela 13. Parâmetros do processo da velocidade do vento.....	47
Tabela 14. Matriz de correlação dos retornos dos activos – estimação para o cenário 1.....	47
Tabela 15. Matriz de correlação dos retornos dos activos – estimação para o cenário 2.....	47



# 1 Introdução

## 1.1 *Motivação*

Uma empresa detentora de activos diversificados que constituem a sua carteira de investimentos enfrenta diferentes riscos com origem nas diferentes fontes de incerteza associadas a cada activo, exógenas à sua actividade, que interagem entre si. No caso de uma empresa produtora de energia eléctrica, esta detém diferentes tipos de activos de produção que constituem a sua carteira de investimentos. O risco dos investimentos da empresa detentora dos activos tem origem em diferentes fontes de incerteza tais como os preços da electricidade, os preços dos combustíveis, os preços das emissões de CO<sub>2</sub>, a hidraulicidade, a eolicidade e a procura de electricidade. Cada activo tem características diferentes e fontes de incerteza diferentes que se traduzem em retornos e riscos distintos.

Do ponto de vista da empresa detentora dos activos de produção, os seus investimentos têm como principal propósito satisfazer a procura de energia eléctrica de forma eficiente e lucrativa. Para tal investe em activos de produção como as centrais térmicas, hídricas, eólicas, entre outras. Com a diversidade de activos existente, dadas as elevadas quantias de capital envolvidas no investimento em cada activo de produção, a empresa depara-se com o problema de decidir onde investir. Dada a limitação de recursos, os investimentos devem providenciar não só um retorno adequado para cada activo considerado, mas também devem ser benéficos no todo que constitui a carteira da empresa.

Dada a interacção das fontes de incerteza dos diferentes activos, os riscos económicos corridos em projectos de investimento podem ser vistos a duas dimensões: o risco associado ao activo e o impacto deste no risco da carteira de activos da empresa detentora. Analogamente ao risco, também o retorno do investimento pode ser visto sob duas perspectivas: o retorno individual e o impacto no retorno da carteira. Embora haja uma noção intuitiva de *trade off* entre retorno e risco, é fundamental para a empresa produtora saber quantificar se os seus activos reflectem retornos apropriados para os riscos corridos, individual e globalmente.

Assim, dada a multiplicidade e a interacção das fontes de incerteza, a decisão de investimento de uma empresa produtora na sua carteira de activos pode ser tomada recorrendo à Teoria da Carteira, tal como desenvolvida no âmbito de investimentos financeiros. Esta óptica permite avaliar a carteira de activos de acordo com o risco e retorno. Usando as rendibilidades esperadas, os riscos e as interacções medidas como correlações, será possível estabelecer fronteiras eficientes de carteiras de activos de produção eléctrica.

## **1.2 Objectivos**

O objectivo do trabalho é desenvolver um conjunto de ferramentas de apoio à decisão de investimento em carteiras de activos de produção eléctrica segundo a óptica da Teoria da Carteira, de acordo com o conceito de fronteira eficiente. Neste trabalho são consideradas os seguintes activos: as centrais térmicas (1) a gás de ciclo combinado, (2) a carvão, (3) a fuel, (4) hídras de fio de água e (5) eólicas. O desenvolvimento daquele conjunto de ferramentas segue várias etapas de objectivos que a seguir se descrevem.

Em primeiro lugar, a investigação foca-se na caracterização das diferentes variáveis de incerteza exógenas à actividade dos activos de produção considerados. Esta caracterização passa pela definição dos processos estocásticos que descrevem o comportamento das variáveis exógenas.

Seguidamente, obtida a caracterização das várias fontes de incerteza, definir o método de valoração dos activos considerados, tendo em conta as variáveis exógenas e também as restrições operacionais desses activos. Uma vez definido o método de valoração, identificar as medidas de referência: retorno e risco.

Finalmente, uma vez identificadas as medidas de referência, estabelecer a fronteira eficiente dos activos em consideração, atendendo a restrições, como uma ferramenta de apoio à decisão de investimento em activos de produção eléctrica.

## **1.3 Estrutura**

No capítulo 2 temos uma breve descrição das questões da composição e da optimização de carteiras de acordo com os fundamentos da Teoria da Carteira.

Seguidamente, no capítulo 3, temos a caracterização da incerteza. São explorados os processos estocásticos adoptados para descrever o comportamento ao longo do tempo das variáveis exógenas à actividade dos activos de produção considerados: o preço da electricidade, o preço dos combustíveis fósseis, o preço das emissões de CO<sub>2</sub>, a potência hídras e a potência eólica. Para os preços adoptou-se um processo com reversão para a média. Para descrever as potências hídras e eólica, usou-se processos autoregressivos de 1ª ordem para descrever o comportamento das variáveis incertas subjacentes: os caudais afluentes e a velocidade do vento.

No capítulo 4 procede-se à definição do método de valoração dos activos de produção e à identificação das medidas de referência risco e retorno. Para a valoração dos activos, simula-

se os fluxos monetários de exploração de duas categorias: térmicos e renováveis. Como medidas de referência, recorre-se a um conceito económico de retorno e risco do capital investido, isto é, em que medida os fluxos monetários de exploração cobrem o capital investido.

A seguir, no capítulo 5, formula-se a composição e selecção de carteiras de activos energéticos de acordo com as medidas de referência definidas no capítulo 4 e constrói-se a fronteira eficiente. Aborda-se a decisão de investimento sob duas perspectivas: alocação de capital de investimento anual e alocação de potência a cada tipo de activo considerado. Sob uma ou outra perspectiva, considera-se a introdução de restrições sobre a fronteira eficiente para a selecção de carteiras óptimas num domínio que respeite as condições e as expectativas da empresa detentora dos activos. A partir da abordagem de alocação de potência, determina-se acções de compra e venda de activos de produção no sentido da composição de uma carteira óptima.

Finalmente, no capítulo 6, temos as conclusões.

## 2 Teoria da Carteira

### 2.1 Pilares da Teoria da Carteira

A Teoria da Carteira tem origem no artigo científico *Portfolio Selection* do Nobel de Economia Harry Markowitz, resultado da sua dissertação de doutoramento em 1952 [1]. Neste artigo, Markowitz aborda a questão da escolha de carteiras de activos financeiros com valor futuro incerto segundo um critério totalmente inovador na altura: o critério *retorno esperado – variância dos retornos* (“*E-V rule*”).

Até então considerava-se apenas o retorno de um investimento sem ter em consideração a sua variabilidade. Mas de facto observava-se nos mercados financeiros que diferentes investidores investiam em carteiras com diferentes composições de activos, carteiras essas diversificadas, sem que a consideração apenas do retorno o sugerisse. Markowitz intuiu que as diferentes opções dos investidores e a diversificação se fundamentavam em duas noções distintas: a noção de *trade off* entre o retorno e o risco de investimentos e a noção da interacção existente entre os retornos de diferentes activos. Markowitz sugere então que o retorno de um activo deve ter duas medidas de referência: o seu valor esperado e o seu risco. O risco sugerido por Markowitz é medido como a dispersão do retorno, ou seja, o seu desvio padrão. Conhecendo estas medidas para cada activo e as suas correlações como medida das suas interacções, pode inferir-se o valor esperado e o risco do retorno da correspondente carteira de activos. Daqui, pareceu-lhe natural que a escolha de um investidor racional sobre a composição de uma carteira de activos incida na selecção de carteiras que se encontrem sobre a fronteira óptima de Pareto de retorno esperado e risco de todas as combinações possíveis da carteira.

Desta forma, Markowitz forneceu uma fundamentação analítica para a diversificação de carteiras verificada nos mercados financeiros e estabeleceu uma metodologia de escolha racional da composição óptima de carteiras de activos cujo valor futuro é incerto. Foram assim lançados os pilares da Teoria da Carteira.

Sete anos mais tarde, Markowitz lançou um livro homónimo ao artigo referido, onde explorou mais a fundo as suas considerações e lançou questões que foram mais tarde desenvolvidas por si e por outros investigadores. É hoje em dia uma teoria bem consolidada e por isso a maioria dos livros de teoria financeira incluem boas descrições deste tema, como [2-3].

## 2.2 Composição de carteiras de activos

Considerando uma carteira composta por  $N$  activos ( $i = 1, \dots, N$ ), o seu retorno é uma média ponderada dos retornos  $r_i$  dos activos, sendo os pesos  $w_i$  as proporções de investimento em cada activo sobre o investimento total. Para uma dada carteira  $P$  de  $N$  activos tem-se então:

$$r_P = \sum_{i=1}^N w_i r_i \quad (1)$$

$$w_i \geq 0, \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

Uma vez que os retornos dos activos que compõem a carteira são incertos, também o retorno da carteira é incerto. Conhecendo a distribuição probabilística do retorno de cada activo e as interacções entre cada activo, pode inferir-se a distribuição probabilística do retorno da carteira por eles composta. Admitindo que o retorno  $r_i$  de cada activo é normal, com média  $\mu_i$  e variância  $\sigma_i^2$  conhecidos, o retorno da carteira também é normal e o seu valor esperado e a sua variância podem ser calculados. Para uma carteira  $P$  composta por  $N$  activos distintos tem-se então:

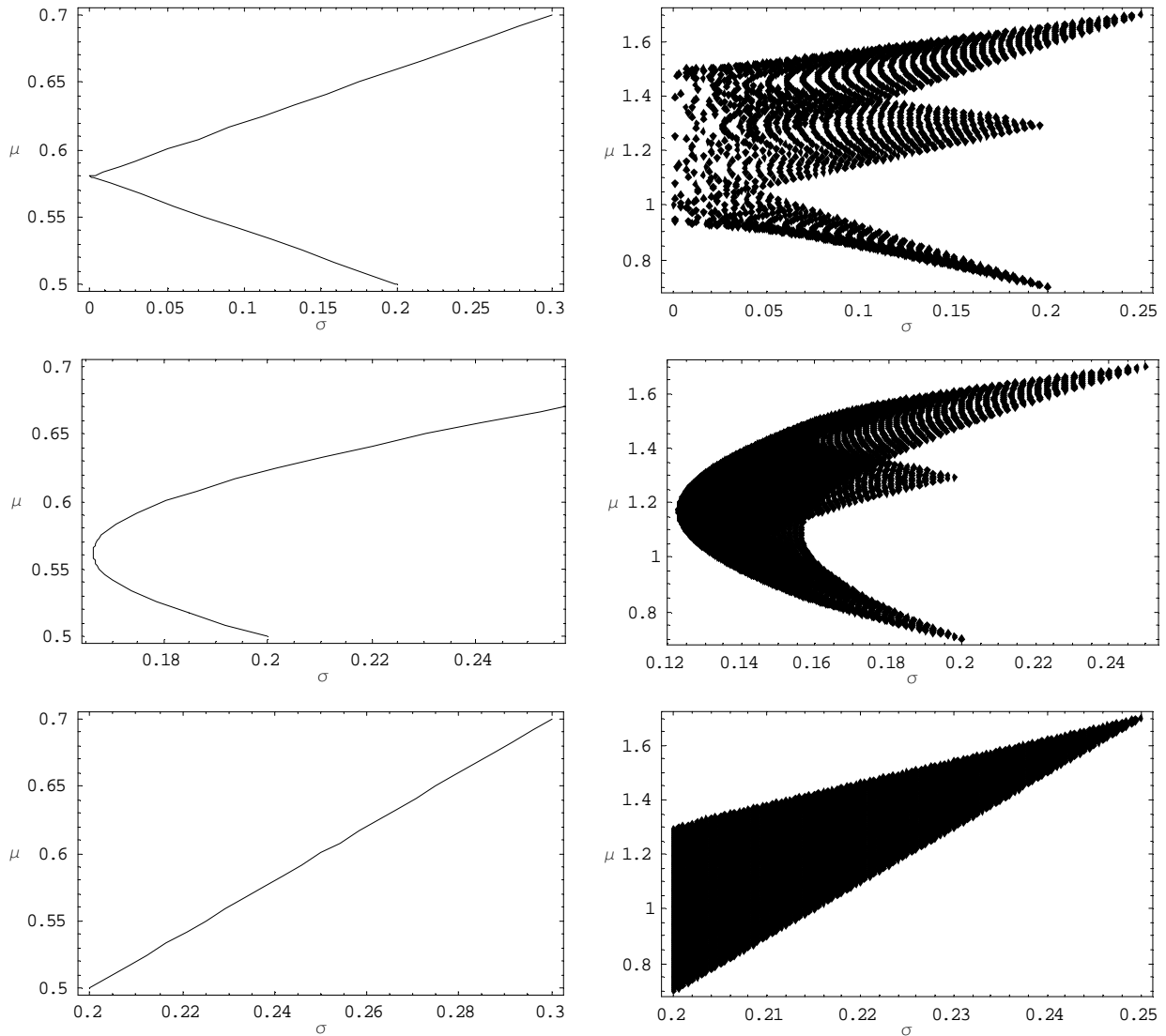
$$E[r_P] \equiv \mu_P = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i \quad (2)$$

$$VAR[r_P] \equiv \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (3)$$

com  $\sigma_{ij}$  a covariância entre os retornos:

$$\text{cov}(r_i, r_j) = \text{corr}(r_i, r_j) \sigma_i \sigma_j \equiv \sigma_{ij} = E[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)] \quad (4)$$

Duma forma elucidativa, pode visualizar-se num gráfico risco-retorno o conjunto de pares (risco, retorno)  $\equiv (\mu_p, \sigma_p)$  de todas as carteiras possíveis constituídas por N activos diferentes. Note-se que de acordo com as especificidades de cada conjunto de activos, isto é, o número de activos em consideração e os respectivos pares (risco, retorno) e as correlações entre si, obtém-se um domínio diferente de conjuntos de pares  $(\mu_p, \sigma_p)$  de todas as carteiras possíveis.



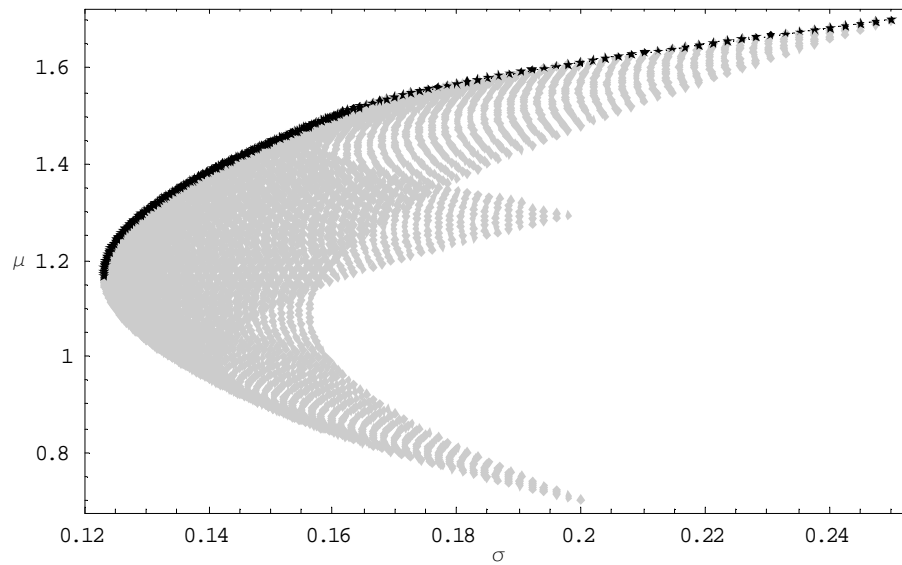
**Figura 1.** Conjunto dos pares possíveis  $(\sigma, \mu)$  de hipotéticas carteiras compostas por N activos diferentes. (Note-se que a cada par corresponde um diferente peso relativo dos vários activos em consideração). Os gráficos à esquerda referem-se a carteiras compostas por 2 activos com os seguintes pares  $(\sigma_i, \mu_i): (0.2, 0.5), (0.3, 0.7)$ . Os gráficos à direita referem-se a uma carteira composta por 3 activos com os seguintes pares  $(\sigma_i, \mu_i): (0.2, 1.3), (0.25, 1.7), (0.2, 0.7)$ . Na 1ª linha, os retornos têm entre si correlação negativa de -1; na 2ª linha correlação nula de 0; na 3ª linha correlação máxima de 1.

Em todos os gráficos está presente a noção de *trade off* entre retorno e risco. Comparando os gráficos linha a linha pode verificar-se a noção de interacção entre os diferentes activos e os seus efeitos no par (risco, retorno) das hipotéticas carteiras compostas. Na 1ª linha, os activos têm correlação de -1 entre si, pelo que virtualmente se pode compor uma carteira com risco nulo – ou seja, os retornos dos activos considerados têm variações que se anulam; a descida do retorno de um dos activos é compensada pela subida do retorno de outro dos activos. Ao evoluir para a 2ª linha, em que os activos têm correlação nula, pode observar-se que o risco da carteira com menor risco é diferente de 0, mas é no entanto inferior ao menor risco individual  $\sigma_i$  dos activos que compõem a carteira – ou seja, as variações dos activos considerados não têm qualquer tipo de relação, por vezes têm variações no mesmo sentido, por vezes têm variações em sentidos opostos. Observando agora a 3ª linha, em que os activos têm correlação máxima de 1, verifica-se que o risco da carteira com menor risco é superior ao risco da carteira análoga da 2ª linha e que corresponde ao menor risco individual  $\sigma_i$  dos activos que compõem a carteira – ou seja, os activos considerados têm sempre variações no mesmo sentido.

### **2.3 Optimização e selecção de carteiras de activos**

De todas as carteiras possíveis de compor, a opção deve debruçar-se sobre as carteiras na fronteira eficiente de retorno e risco, que Markowitz identificou como uma fronteira óptima de Pareto.

Uma melhoria de Pareto ocorre quando num conjunto de alocações alternativas a escolha de uma alternativa em relação a outra melhora uma das suas características sem prejudicar outras características. Ou seja, neste contexto, é uma carteira que para um dado nível de risco tem maior retorno que outra, dentro do domínio de carteiras possíveis; ou então, é uma carteira que para um dado nível de retorno tem menor risco, dentro do domínio de carteiras possíveis. A fronteira óptima de Pareto é composta por todas as carteiras que já não podem sofrer uma melhoria de Pareto.



**Figura 2.** A preto está representada a fronteira eficiente de risco e retorno sobre o domínio de pares  $(\sigma, \mu)$  possíveis.

Assim, a fronteira eficiente apenas contém carteiras em que o ganho em retorno implica um aumento de risco e em que uma perda em retorno implica uma diminuição do risco. Todas as carteiras sobre esta fronteira são carteiras ótimas.



### 3 Caracterização da incerteza: variáveis exógenas de natureza estocástica

A caracterização da incerteza do valor de uma central de produção de energia eléctrica remete para a definição dos processos estocásticos seguidos pelas variáveis exógenas ao seu funcionamento. Para as centrais consideradas – térmicas, eólicas e hídricas de fio de água – as variáveis consideradas são o preço da electricidade, o preço dos combustíveis fósseis, o preço das emissões de CO<sub>2</sub>, a potência hídrica e a potência eólica.

#### 3.1 Preços da electricidade, dos combustíveis fósseis e das emissões de CO<sub>2</sub>

##### Processo Browniano geométrico com reversão para a média

O processo Browniano geométrico é um processo de Markov, com o qual se modela o comportamento da variação relativa da variável subjacente. Considerando que  $w$  segue um processo Browniano geométrico, tem-se [4]:

$$\frac{dw}{w} = \mu dt + \sigma dz \quad (5)$$

com  $\frac{dw}{w}$  a variação relativa de  $w$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  constantes e respectivamente o valor esperado da taxa de variação composta de  $w$  e a sua volatilidade, e  $z$  uma variável que segue um processo de Wiener .

Quando o valor de uma dada variável ao longo do tempo tem tendência a aproximar-se de um valor de longo prazo diz-se que o seu processo tem reversão para a média. Este fenómeno está presente nas taxas de juro e também no valor da maioria dos bens indiferenciados, nomeadamente nos preços da electricidade e dos combustíveis fósseis.

Num contexto de mercado liberalizado, um processo adequado para modelar os bens indiferenciados energéticos é o processo Browniano geométrico com reversão para a média [4-5] com a forma:

$$\frac{ds}{s} = \lambda[\phi - \ln(s)]dt + \sigma dz \quad (6)$$

com  $s$  o preço,  $\lambda$  a força de reversão,  $\phi$  o logaritmo do valor de longo prazo,  $\sigma$  a volatilidade da variação relativa do preço, e  $z$  uma variável que segue um processo de Wiener. Este processo, sobre o qual se fundamentam as deduções seguintes, foi utilizado em [6].

Se quisermos definir o processo da variação de  $y = \ln(s)$ , aplicando o lema de Itô expresso no apêndice A1, obtém-se um processo com reversão para a média mais simples denominado Ornstein-Uhlenbeck:

$$dy = \lambda(\Omega - y)dt + \sigma dz, \quad \text{com } \Omega = \phi - \frac{\sigma^2}{2\lambda} \quad (7)$$

em que  $y$  segue uma distribuição normal, com as seguintes propriedades:

$$E[y_t] \equiv \mu_{y_t} = y_{t_0} e^{-\lambda(t-t_0)} + \Omega[1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] \quad (8)$$

$$VAR[y_t] \equiv \sigma_{y_t}^2 = \frac{\sigma^2}{2\lambda} [1 - e^{-2\lambda(t-t_0)}] \quad (9)$$

Sabendo que  $s = e^y$ , com  $y_t \sim N(\mu_{y_t}, \sigma_{y_t}^2)$ , tem-se para o processo original em (6):

$$E[s_t] \equiv \mu_{s_t} = e^{\mu_{y_t} + \frac{\sigma_{y_t}^2}{2}} \quad (10)$$

$$VAR[s_t] \equiv \sigma_{s_t}^2 = e^{2\mu_{y_t} + \sigma_{y_t}^2} (e^{\sigma_{y_t}^2} - 1) \quad (11)$$

### Simulação 1

Um modelo auto regressivo de 1ª ordem AR(1) adequado para discretizar o processo (7) tem a forma:

$$y_i = y_{i-1} e^{-\lambda \delta t} + \Omega[1 - e^{-\lambda \delta t}] + \varepsilon_i \quad (12)$$

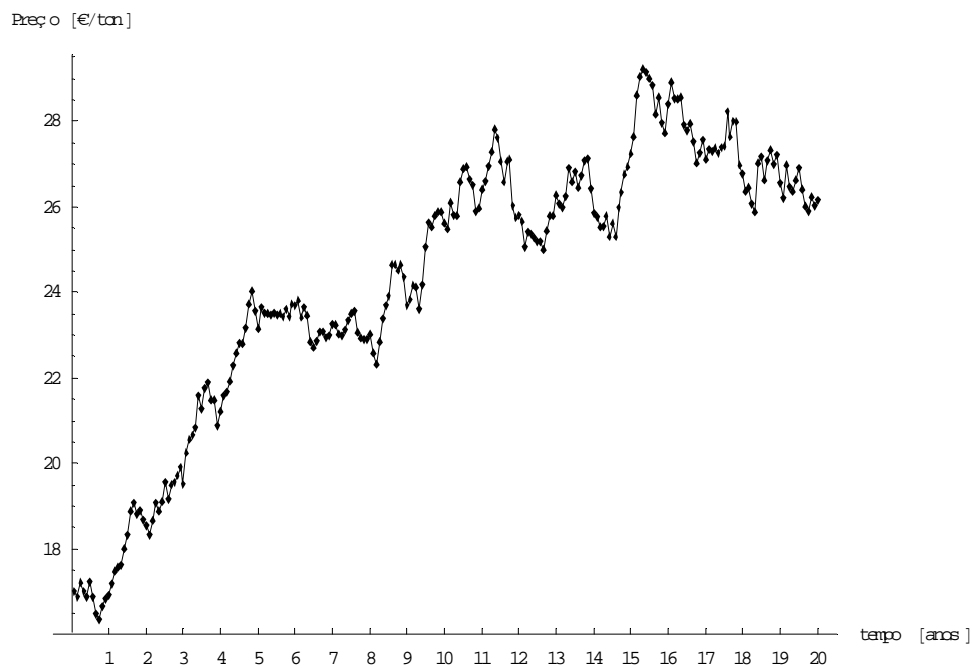
com  $\delta t$  o intervalo de tempo entre  $y_i$  e  $y_{i-1}$ , e  $\varepsilon_i$  extracções de uma normal  $N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda \delta t})\right)$ .

Conhecendo os parâmetros do processo (6),  $\lambda$  a força de reversão,  $\phi$  o logaritmo do valor de longo prazo e  $\sigma$  a volatilidade da variação relativa do preço:

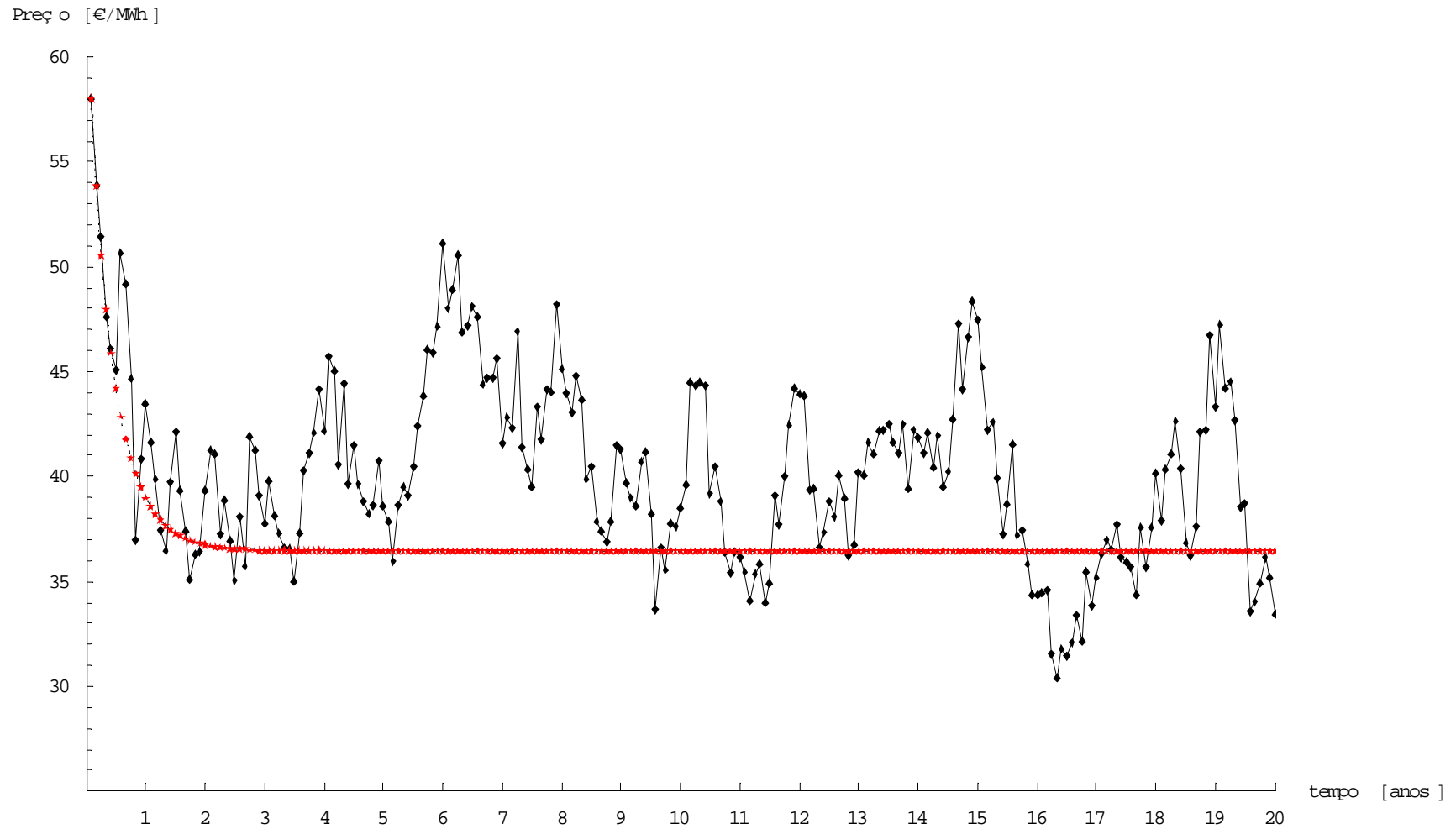
- 1) Determinar os parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck (7);

- 2) Gerar cada trajectória, isto é, cada amostra  $Y$  do logaritmo dos preços, espaçadas de  $\delta t$ , através de uma simulação de Monte Carlo do processo AR(1) em (12);
- 3) Obter as trajectórias de preços da electricidade que seguem o processo original (6) através da relação  $s = e^y$ .

Vamos admitir também que o preço das emissões de CO<sub>2</sub> se comporta de acordo com processo de Ornstein-Uhlenbeck.



**Figura 3.** Processo Browniano geométrico com reversão para a média. Média de 10 trajectórias dos preços futuros das emissões de CO<sub>2</sub>, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos. Parâmetros:  $s(0) = 17, \lambda = 0.05, \phi = \ln(30.6), \sigma = 0.15$ .



**Figura 4.** Processo Browniano geométrico com reversão para a média. A preto está representada a média de 10 trajectórias dos preços futuros da electricidade, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos. A encarnado está enunciado o efeito da reversão para a média. Parâmetros:  $s(0) = 58, \lambda = 1.93, \phi = \ln(40), \sigma = 0.6$ .

## Trajectórias correlacionadas

No caso dos combustíveis fósseis verifica-se que a subida (ou descida) do preço de um dos tipos de combustíveis é acompanhada pela subida (ou descida) do preço dos outros. Diz-se então que os seus processos são correlacionados.

A correlação entre duas variáveis  $X$  e  $Y$  define-se como:

$$corr_{X,Y} \equiv \rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (13)$$

com  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  os desvios-padrão de  $X$  e  $Y$ , neste caso a volatilidade de  $X$  e  $Y$ , e  $cov(X,Y)$  a covariância entre as duas variáveis, já referida em (4), definida como:

$$cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Para o processo original considerado em (6), que será simulado através do processo AR(1) em (12), a forma de impor esta correlação é correlacionando os ruídos  $\varepsilon_i$  [6].

Uma vez estimadas as correlações entre os preços dos combustíveis e as respectivas volatilidades, pode construir-se a matriz de covariância  $C_{i,j}$  dos processos correlacionados tal que:

$$\begin{cases} i = j, c_{ij} = \sigma_i^2 \\ i \neq j, c_{ij} = corr_{i,j} \sigma_i \sigma_j \end{cases} \quad (14)$$

Se esta matriz for consistente, e assim, definida positiva, pode usar-se a decomposição de Cholesky para os correlacionar [4]. Os ruídos correlacionados são extraídos de uma matriz  $W^p$ , calculada a partir da matriz de ruídos não correlacionados  $W$  [6]:

$$W^p = A'W \quad (15)$$

com  $A'$  a matriz conjugada da transposta de  $A$  obtida através da já referida decomposição de Cholesky da matriz de covariância  $C_{i,j}$ :

$$C = A'A \quad (16)$$

## Simulação 2

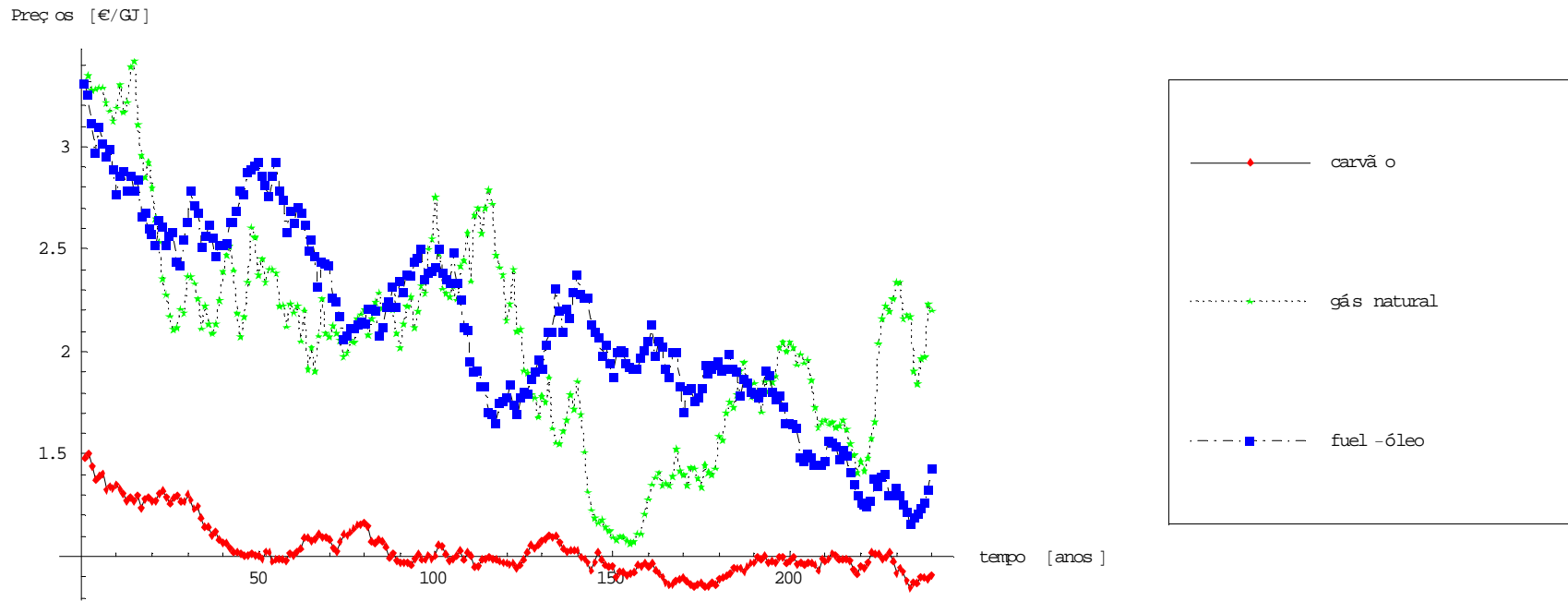
Conhecendo os parâmetros do processo (6),  $\lambda$  a força de reversão,  $\phi$  o logaritmo do valor de longo prazo e  $\sigma$  a volatilidade da variação relativa do preço de cada combustível e as suas correlações  $corr_{i,j}$ :

- 1) Determinar os parâmetros do processo de Ornstein-Uhlenbeck (7);

- 2) Construir a matriz de covariância dos processos dos combustíveis de acordo com (14);
- 3) Para cada combustível, gerar amostras dos ruídos  $\varepsilon_i$  do processo (12);
- 4) Determinar a decomposição de Cholesky (16) da matriz de covariância construída em 2);
- 5) Correlacionar os ruídos de 3) conforme em (15);
- 6) Gerar cada trajectória  $Y$  do logaritmo dos preços de cada combustível usando os ruídos correlacionados obtidos em 4), com elementos espaçados de  $\delta t$ , através de uma simulação de Monte Carlo do processo AR(1) em (12);
- 7) Obter as trajectórias  $S$  de preços dos combustíveis que seguem o processo original (6) através da relação  $S = e^Y$ .

### **Estimação de parâmetros**

Os parâmetros do processo (6) adoptado para modelar os preços e as correlações entre os preços dos combustíveis usadas na construção da matriz de covariância (14) podem ser estimados directamente a partir de dados históricos [4]. Os métodos de estimação mais comuns são a regressão linear aplicada a (12), com uso do método dos mínimos quadrados ou método da máxima verosimilhança para estimação dos parâmetros [4].



**Figura 5.** Processos brownianos geométricos com reversão para a média correlacionados. Média de 10 trajetórias correlacionadas para cada combustível, com  $\delta t = 1/12$  anos, ao longo de 20 anos.

Parâmetros:

$$\rho = 0.2$$

$$s(0)_{\text{carvão}} = 1.48, s(0)_{\text{gás natural}} = 3.3, s(0)_{\text{fuel-óleo}} = 3.3;$$

$$\phi_{\text{carvão}} = \ln(0.9), \phi_{\text{gás natural}} = \ln(1.5), \phi_{\text{fuel-óleo}} = \ln(1.6)$$

$$\lambda_{\text{carvão}} = \lambda_{\text{gás natural}} = \lambda_{\text{fuel-óleo}} = 0.1; \sigma_{\text{carvão}} = 0.25, \sigma_{\text{gás natural}} = 0.4, \sigma_{\text{fuel-óleo}} = 0.35$$

## 3.2 Hidraulicidade

A hidraulicidade é um indicador da flutuação do regime hidrológico num dado ano, que se traduz numa maior ou menor produção de energia eléctrica com origem hídrica no total de electricidade produzida. Estas flutuações estão relacionadas com a incerteza dos caudais afluentes, que são aleatórios. Para um produtor de energia detentor de activos de geração hídrica, a capacidade de modelar os caudais é decisiva para a valoração do investimento no activo.

### 3.2.1 Hidrologia estocástica

Tem-se usado a teoria estocástica aplicada à análise e modelação de processos hidrológicos para a resolução eficiente de problemas em diversos sistemas hidrológicos. Nos dias de hoje, a sua utilização é muito corrente na descrição do comportamento dos caudais afluentes (“a maior incerteza hidrológica” segundo Koutsoyiannis), variável fundamental na concepção e na operação dos sistemas hidrológicos/hídrico – e no âmbito desta dissertação, a variável fundamental para caracterizar o risco económico da operação de uma central hídrica.

Em [7-9] encontra-se um levantamento dos processos estocásticos utilizados na simulação de caudais afluentes e da sua evolução.

#### Processo auto-regressivo AR(1) normal

Os processos estocásticos mais utilizados em hidrologia são os auto-regressivos AR( $p$ ) e os auto-regressivos com médias móveis ARMA( $p, q$ ) para  $p \leq 2$  e  $q \leq 1$  [7]. Destes, um processo vulgarmente utilizado pela sua simplicidade é processo auto-regressivo de 1ª ordem AR(1), descrito pela equação:

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

com  $\phi$  a auto-correlação de  $Y$  e os ruídos  $\varepsilon_i$  extracções de uma normal  $N(0, \sigma^2)$ .

#### Modelo auto-regressivo periódico multivariado PAR(1) lognormal

O modelo AR(1) definido acima não pode ser directamente utilizado na previsão de caudais à escala inferior ao ano, uma vez que estes apresentam tipicamente sazonalidade. A sazonalidade está presente não só nos valores médios e desvios padrão, como também na estrutura auto-correlacional.



Um processo amplamente utilizado que lida com a sazonalidade periódica dos caudais a uma escala temporal inferior ao ano, é o modelo auto-regressivo periódico multivariado de 1ª ordem PAR(1) [10-11].

Vamos considerar  $\{Q_t : t \geq 0\}$  uma série temporal de caudais afluentes com sazonalidade com um período  $s$ . Se  $T (T = 1, \dots, N)$  denotar o índice anual e  $m (m = 1, \dots, s)$  o índice da sazonalidade em que o índice temporal  $t$  ocorre, verifica-se a relação:  $t = (T - 1)s + m$ .

O processo  $\{X_t : t \geq 0\}$  PAR(1) que vai ser utilizado tem a forma:

$$X_t = \phi_m X_{t-1} + \varepsilon_{t,m} \quad (18)$$

com os ruídos  $\varepsilon_{t,m}$  extracções de uma normal;  $\phi_m$  a auto-correlação entre cada sazonalidade, por forma a preservar a estrutura auto-correlacional periódica dos caudais; e  $X_t$  uma standardização do logaritmo dos caudais, por forma a assegurar respectivamente a estacionaridade e a normalidade do processo (18) (tipicamente o logaritmo dos caudais é normal):

$$X_t = \frac{L_t - \mu_m}{\sigma_m} \quad (19)$$

com

$$L_t = \ln(Q_t) \quad (20)$$

e  $\mu_m$  e  $\sigma_m$  respectivamente a média e o desvio padrão de  $L_t$  para cada sazonalidade.

Está demonstrado que no caso do processo (18) ser estacionário ( $|\phi| < 1$ ) tem-se [12, página 71]:

$$E[X_t] = 0 \quad (21)$$

$$VAR[X_t] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} \quad (22)$$

$$Cov[X_t, X_{t+s}] = \frac{\phi^s}{1 - \phi^2} \sigma^2 \quad (23)$$

### Estimação de parâmetros

Recorrendo a uma série temporal histórica dos caudais com  $n$  anos, pode estimar-se os parâmetros para cada sazonalidade  $m$  de acordo com:

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_{(i-1)s+m} \quad (24)$$

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( L_{(i-1)s+m} - \hat{\mu}_m \right)^2 \quad (25)$$

$$\hat{\phi}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\left( L_{(i-1)s+m} - \hat{\mu}_m \right) \left( L_{(i-1)s+m-1} - \hat{\mu}_{m-1} \right)}{\hat{\sigma}_m \hat{\sigma}_{m-1}} \quad (26)$$

Após a estandardização dos caudais em (19), a variância de  $X_t$  é unitária, pelo que segundo a relação (22):

$$\sigma_m^2 = (1 - \phi_m^2) \quad (27)$$

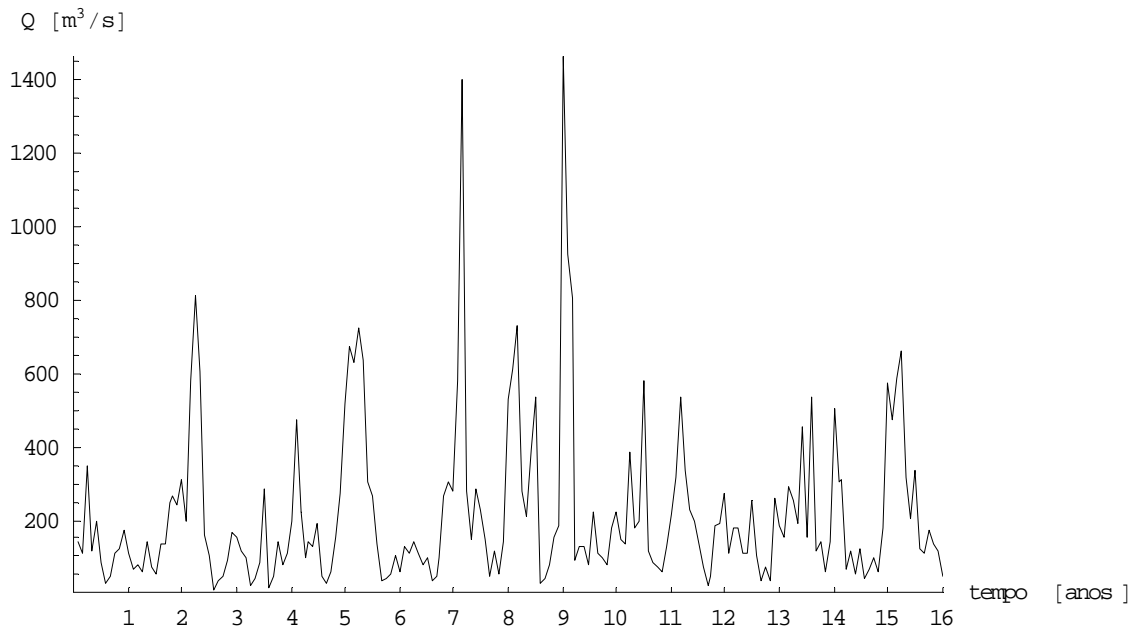
### Simulação 3

Substituindo (19) e (27) em (18), resulta o processo para gerar os logaritmos dos caudais:

$$L_t = \mu_m + \phi_m \sigma_m \left( \frac{L_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) + \left( 1 - \phi_m^2 \right)^{1/2} \sigma_m \varepsilon_{t,m}, \quad \varepsilon_{t,m} \sim N(0,1) \quad (28)$$

Partindo de uma série temporal histórica de caudais no local de interesse:

- 1) Determinar os parâmetros do processo (28) de acordo com (24), (25) e (26);
- 2) Gerar cada trajectória de amostras  $L$  do logaritmo dos caudais através de uma simulação de Monte Carlo do processo AR(1) em (28);
- 3) Obter as trajectórias dos caudais  $Q$  através da relação inversa de (20)  $Q = e^L$ .



**Figura 6.** Previsão a 16 anos de caudais afluentes com sazonalidade mensal. Parâmetros estimados a partir do histórico da barragem de Miranda (A2).

### 3.2.2 Potência hídrica

As centrais hídricas têm como fonte energética a energia potencial dos caudais afluentes. Sabendo a queda que os caudais sofrem ao “atravessar” a central subterrânea à barragem, determina-se a energia potencial gravítica transformada em energia cinética, que por sua vez é transformada em energia mecânica traduzida pelo movimento das turbinas subterrâneas, que finalmente a transformam em energia eléctrica.

A relação entre a potência eléctrica gerada e os caudais afluentes é:

$$P_H = q\rho_{\text{água}}g\Delta h \quad (29)$$

com  $P_H$  a potência gerada,  $q$  os caudais afluentes,  $\rho_{\text{água}}$  a densidade da água,  $g$  a aceleração gravítica e  $\Delta h$  a queda sofrida pelos caudais.

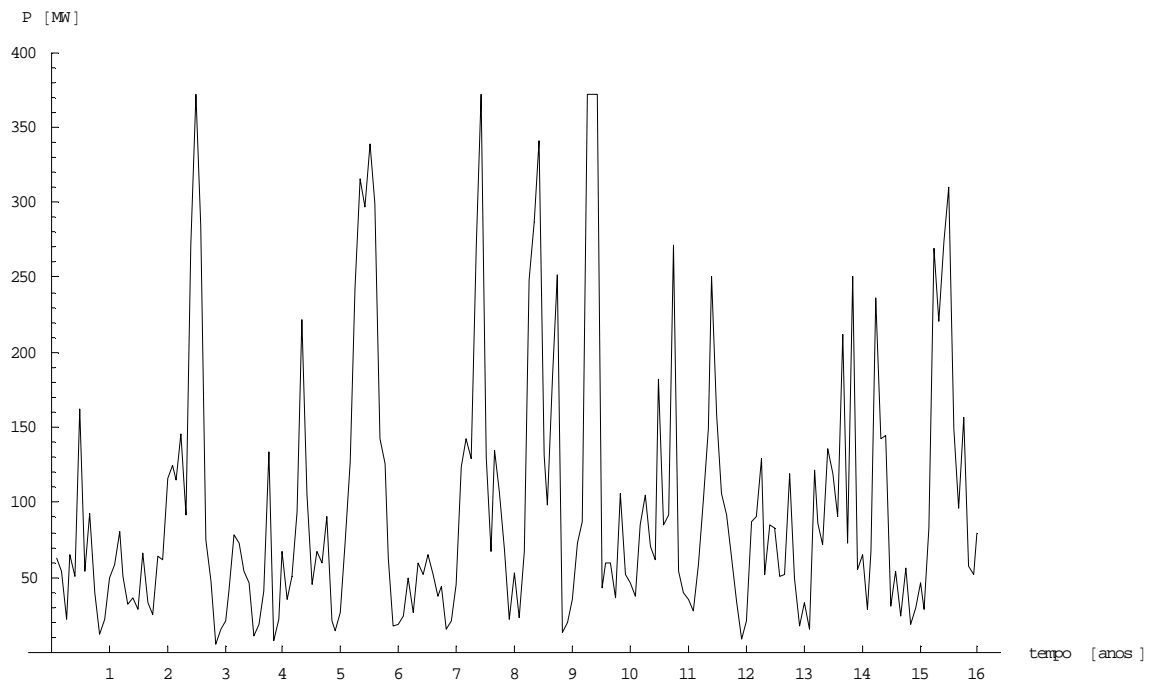
Na realidade, ao longo das várias transformações energéticas mencionadas acima, há perdas. Há então que contabilizá-las no balanço final:

$$P_H = q\rho_{\text{água}}g\Delta h(1-\alpha)\eta \quad (30)$$

com  $\alpha$  as perdas na queda em percentagem e  $\eta$  o rendimento eléctrico das turbinas subterrâneas.

#### Simulação 4

Considerando uma central hídrica de fio de água, pode admitir-se que a queda  $\Delta h$  sofrida pelos caudais se mantém constante. Utilizando as trajectórias de caudais simuladas através da simulação 3, obtêm-se trajectórias de potência hídrica ao longo do tempo através da relação (30).



**Figura 7.** Potência média mensal gerada por uma barragem com os caudais afluentes simulados na secção 3.2.1. Parâmetros:  $\rho_{\text{água}} = 10^3 \text{ Kg} / \text{m}^3$ ,  $g = 9.8 \text{ m} / \text{s}^2$ ,  $\Delta h = 58 \text{ m}$ ,  $\alpha = 5\%$ ,  $\eta = 87\%$ .

Capacidade instalada = 390MW.

### 3.3 Eolicidade

A eolicidade, analogamente à hidraulicidade, é um indicador da intensidade da produção de electricidade com origem eólica, num dado ano. Neste caso, a intensidade e a direcção do vento é que determina este indicador. É o comportamento aleatório do vento que determina a potência gerada por um parque eólico e, assim, que determina também a incerteza quanto à valoração do investimento no parque.

#### 3.3.1 Séries temporais da velocidade do vento

Vários estudos apontam que amostras da velocidade do vento seguem uma função de distribuição probabilística de Weibull [13] de acordo com:

$$f_n(x_n, k_n, \lambda_n) = \left( \frac{x_n}{\lambda_n} \right)^{k_n-1} \frac{k_n}{\lambda_n} e^{-(x_n/\lambda_n)^{k_n}} \quad (31)$$

com  $x$ ,  $k$  e  $\lambda$  respectivamente a velocidade do vento e os parâmetros de forma e de escala do  $n$ -ésimo local de estudo. A forma é específica do local e a escala é determinada de forma que o valor esperado da distribuição seja a média anual do vento no local de estudo.

No entanto, a simples extracção de valores de acordo com esta distribuição não descreve a auto-correlação existente entre velocidades em instantes consecutivos, nem a correlação cruzada existente entre amostras de vento no mesmo intervalo de tempo, em locais diferentes. Em [14] define-se um processo que lida com estas questões. Este processo recorre à transformação de uma amostra com distribuição probabilística Weibull em função de duas amostras com distribuição normal, para posteriormente se aplicar um filtro auto-regressivo multi-dimensional para imprimir a auto-correlação e a correlação cruzada.

O processo que vai ser utilizado baseia-se no processo descrito, mas utiliza o filtro AR(1) unidimensional para imprimir auto-correlação e a decomposição de Cholesky para imprimir a correlação cruzada.

Considerando  $\{Z_{n,t} : t \geq 0\}$  uma matriz de amostras de velocidade do vento em diferentes localizações, sendo  $n(n = 1, \dots, N)$  o índice que identifica o local da amostra, tal que:

$$Z_{n,t} = \{Z_{n,1}, Z_{n,2}, \dots, Z_{n,T}\}, \quad Z_{n,t} \sim Weibull(k_n, \lambda_n)$$

Vamos agora decompor estas amostras em função de duas amostras normais [15]:

$$Z_{n,t} = (X_{n,t}^2 + Y_{n,t}^2)^{(1/k_n)} \quad , \quad t = 1, \dots, T \quad (32)$$

com  $X_{n,t}, Y_{n,t} \sim N(0, \sigma_n^2)$  tal que:

$$\sigma_n^2 = \frac{\lambda_n^{k_n}}{2} \quad (33)$$

As propriedades de  $Z_{n,t}$  são conhecidas:

$$E[Z_{n,t}] = \lambda_n \Gamma(1 + 1/\lambda_n) \quad (34)$$

$$VAR[Z_{n,t}] = \lambda_n^2 [\Gamma(1 + 2/\lambda_n) - \Gamma^2(1 + 1/\lambda_n)] \quad (35)$$

E o segundo momento como função da correlação  $\rho_{n,m,t,j}$  entre as amostras normais  $X_{n,t}$  e  $X_{m,j}$  /  $Y_{n,t}$  e  $Y_{m,j}$  também é conhecido [15]:

$$E[Z_{n,t} Z_{m,j}] = \lambda_n \lambda_m \Gamma(1 + 1/\lambda_n) \Gamma(1 + 1/\lambda_m) {}_2F_1(-1/\lambda_n; -1/\lambda_m; 1; \rho_{n,m,t,j}^2) \quad (36)$$

com  $\Gamma$  a função gama e  ${}_2F_1$  a função hipergeométrica <sup>(a)</sup>.

Uma vez que a matriz de correlação  $S$  tem como componentes:

$$s_{n,m,t,j} = \frac{E[Z_{n,t} Z_{m,j}] - E[Z_{n,t}] E[Z_{m,j}]}{\sqrt{VAR[Z_{n,t}] VAR[Z_{m,j}]}} \quad (37)$$

substituindo (34), (35) e (36) em (37), obtém-se a relação entre a correlação  $s_{n,m,t,j}$  desejada entre as amostras  $Z_{n,t}$  e  $Z_{m,j}$  e a correlação  $\rho_{n,m,t,j}$  entre as amostras normais  $X_{n,t}$  e  $X_{m,j}$  /  $Y_{n,t}$  e  $Y_{m,j}$ :

$$s_{n,m,t,j} = \frac{\Gamma(1 + 1/\lambda_n) \Gamma(1 + 1/\lambda_m) [{}_2F_1(1/\lambda_n, 1/\lambda_m; 1; \rho_{n,m,t,j}^2) - 1]}{\sqrt{[\Gamma(1 + 2/\lambda_n) - \Gamma^2(1 + 1/\lambda_n)] [\Gamma(1 + 2/\lambda_m) - \Gamma^2(1 + 1/\lambda_m)]}} \quad (38)$$

### Auto-correlação

Para introduzir a auto-correlação, recorre-se ao processo auto regressivo de 1ª ordem AR(1) da equação (17) para gerar amostras normais  $V_{n,t}$ :

$$V_{n,t} = \phi_n V_{n,t-1} + \varepsilon_{n,t} \quad (17)$$

<sup>(a)</sup>  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad , \quad x \in \Re \quad ; \quad {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k b_k}{c_k} \frac{x^k}{k!} \quad [16]$

com  $\varepsilon_{n,t}$  extracções de uma normal  $N(0, \sigma_n^2)$ , e  $\phi_n$  a auto-correlação das amostras  $X_{n,t}$  e  $X_{n,j}$  /  $Y_{n,t}$  e  $Y_{n,j}$  determinada a partir da relação (38), uma vez conhecida a auto-correlação  $s_{n,n,t,j}$  das amostras de vento. Ou seja, a correlação entre a amostra  $Z_{n,t}$  do instante  $t$  e a amostra  $Z_{n,j}$  do instante  $j$ .

Como já referido, para um processo estacionário verifica-se a relação (22). Então, ao considerar  $\sigma_n^2 = 1 - \phi_n^2$ , temos amostras normais  $V_{n,t} \sim N(0,1)$  auto-correlacionadas.

### **Correlação cruzada**

Conhecendo a correlação cruzada  $s_{n,m,t,t}$  entre as amostras  $Z_{n,t}$  e  $Z_{m,t}$  (em diferentes locais), determina-se a partir de (38) a correlação cruzada  $\Phi_{n,m}$  a imprimir entre os respectivos pares de amostras normais  $\{X_{n,t}, Y_{n,t}\}$  e  $\{X_{m,t}, Y_{m,t}\}$ . Para o efeito, podemos recorrer à já referida decomposição de Cholesky (14), (15) e (16).

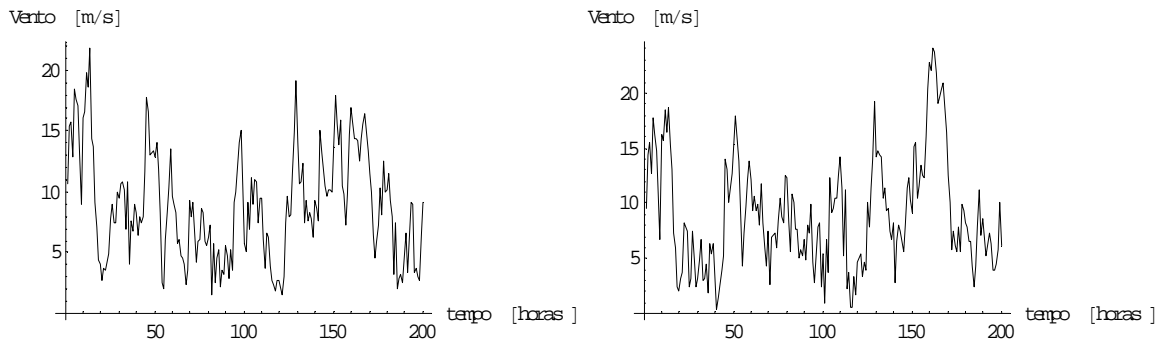
### **Estimação de parâmetros**

Os parâmetros deverão ser estimados a partir de séries históricas de vento recolhidas por anemómetros colocados a altitudes (>50m) a que tipicamente as turbinas se instalam. A metodologia Wind Atlas [17], baseada no programa WaSP, reúne dados sobre o potencial eólico em várias localizações no mundo. Em Portugal, a Unidade de Energia Eólica e dos Oceanos do Departamento de Energias Renováveis do INETI tem sido pioneira neste tipo de iniciativas. Está a desenvolver actualmente o atlas eólico português, que teve início com a publicação da base de dados EOLOS em 2000, com informação do potencial eólico em várias áreas de Portugal Continental [18].

### **Simulação 5**

Conhecendo a matriz de correlação cruzada  $U$  dos vários locais, a auto-correlação  $r$  entre amostras de vento consecutivas, o parâmetros  $k_n$  e a média anual  $\mu_{Z_n}$  do vector  $Z_{n,t}$  para cada localização:

- 1) Determinar o parâmetro escala  $\lambda_n$  para cada localização através da equação (34), assumindo o valor esperado de  $Z_{n,t}$  como a média anual  $\mu_{Z_n}$ ;
- 2) Determinar as auto-correlações  $\phi_n$  de cada local e as correlações cruzadas  $\Phi_{n,m}$  entre locais através da função implícita (38);
- 3) Para cada trajectória referente a cada local, gerar através de uma simulação de Monte Carlo dois vectores  $V_{n,t}$  auto-correlacionados segundo (17), usando  $\phi_n$  determinado em 2);
- 4) Construir a matriz de covariância entre os pares de vectores  $V_{n,t}$  dos vários locais usando as correlações cruzadas  $\Phi_{n,m}$  determinadas em 2) conforme em (14);
- 5) Correlacionar os pares de vectores de cada local gerados em 2) usando a decomposição de Cholesky da matriz determinada em 3), conforme em (15) e (16);
- 6) Obter o par de normais para cada local  $X_{n,t}$  e  $Y_{n,t}$  multiplicando cada par de vectores obtido em 4) por  $\sigma_n^2$  determinado a partir de (33);
- 7) Obter as trajectórias de vento  $Z_{n,t}$  usando as normais obtidas em 5) na equação (32).



**Figura 8.** Trajectórias de vento correlacionadas de dois locais distintos, referentes a 200 horas. Em cada gráfico apresenta-se a trajectória de cada local.

**Parâmetros:**  $U = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}, r = 0.7, k_1 = 2.1, k_2 = 2.2, \mu_1 = 8m/s, \mu_2 = 9m/s$



### 3.3.2 Potência eólica

A produção de energia eólica tem como fonte primária a energia cinética do vento. Sabendo a velocidade do vento incidente, calcula-se a máxima potência que se pode extrair através da relação:

$$P_E = \frac{1}{2} \rho_{ar} v^3 \pi (D/2)^2 \quad (39)$$

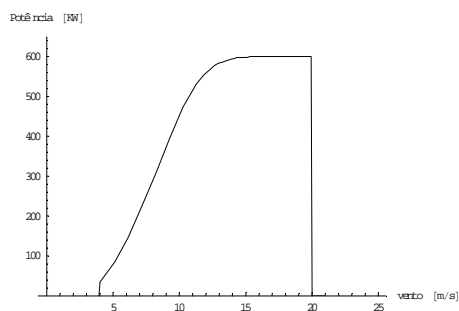
com  $\rho_{ar}$  a densidade do ar à temperatura e altitude a que se encontra a turbina,  $v$  a velocidade do vento e  $D$  o diâmetro da área varrida pelas pás da turbina (no caso de turbinas com eixo horizontal).

Da energia cinética do vento que atravessa a área varrida pelas pás da turbina apenas uma parte se transforma em energia mecânica que movimenta o rotor da turbina. Esta última, por sua vez, ainda sofre algumas perdas na transformação em energia eléctrica.

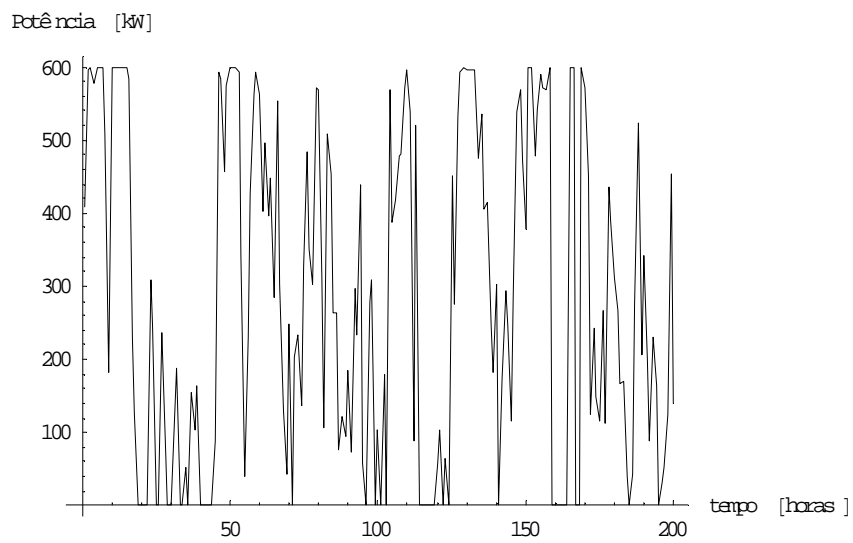
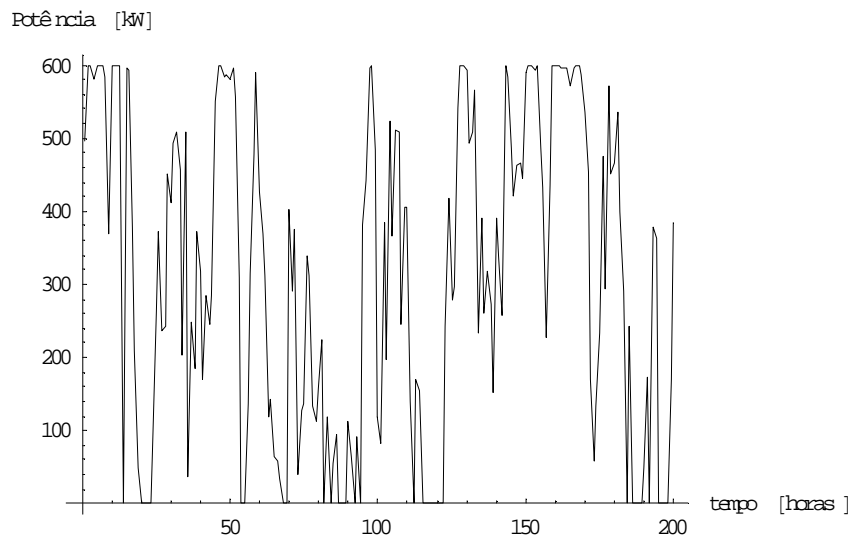
Sobre a energia mecânica transformada, há que ter em conta a eficiência da transformação da energia mecânica em eléctrica e também os valores de *cut in* e *cut out* que limitam as velocidades a que a turbina funciona. Dado que a potência varia com o cubo da velocidade do vento, como forma de maximizar a extracção energética total de uma turbina eólica conforme a constância e as intensidades mais comuns do vento de cada localização, os rendimentos da turbina variam bastante com a intensidade do vento. Cada turbina tem como informação técnica a curva de potência que descreve a relação entre a potência eléctrica gerada em função do vento incidente, a temperatura e a pressão de referência. Conhecendo a curva de potência e o vento incidente determina-se então a potência eléctrica gerada.

#### Simulação 6

Usando trajectórias de velocidade de vento obtidas através da simulação 5 e considerando uma curva de potência como a da figura 9 obtêm-se trajectórias de potência eólica.



**Figura 9.** Curva de potência de uma turbina Vesta V44 600/44 com potência instalada de 600 kW, diâmetro 44 m, altitude 35m, com *cut in* e *cut out* respectivamente 4 e 20 m/s. [17]



**Figura 10.** Trajectórias da potência média por hora gerada por uma turbina com as características da figura 12. Cada gráfico representa a potência associada às trajectórias de vento de cada local da figura 8.

## 4 Valoração dos activos de produção eléctrica

Uma vez caracterizadas as variáveis exógenas ao funcionamento dos activos de produção, a sua valoração é feita com recurso à simulação dos seus fluxos monetários de exploração. Como medidas de referência, recorre-se a um conceito económico de retorno e risco do capital investido, isto é, em que medida os fluxos monetários de exploração cobrem o capital investido.

### 4.1 Fluxos monetários anuais

#### Custos anuais

Em [19] o custo anual de produção de uma central eléctrica compreende três parcelas: o custo fixo de capital, o custo variável de combustível e os custos semi-fixos de operação e manutenção. Vamos aqui considerar também os custos de emissão de CO<sub>2</sub>.

O custo de capital  $cf$  depende do investimento total da central  $I$  (considerando que é todo concentrado no instante inicial do tempo de vida útil), do tempo de vida útil  $tvu$  e da taxa de retorno  $tx$  esperada pelos investidores. Admitindo que o investimento na central pode ser distribuído em quantias iguais ao longo do tempo de vida útil da central, o custo de capital pode ser visto como uma anuidade:

$$cf = \frac{tx(1+tx)^{tvu}}{(1+tx)^{tvu} - 1} I \quad (40)$$

O custo de combustível  $cv_{comb}$  depende do custo específico do combustível  $p_{comb}$ , da energia produzida  $e$  e do rendimento eléctrico da central  $\eta$ :

$$cv_{comb} = \frac{p_{comb} \cdot e}{\eta} \quad (41)$$

O custo das emissões de CO<sub>2</sub>  $cv_{co_2}$  depende do custo específico das emissões  $p_{co_2}$ , das emissões  $em$  do combustível utilizado, da energia produzida  $e$  e do rendimento eléctrico da central  $\eta$ :

$$cv_{co_2} = \frac{p_{co_2} \cdot em \cdot e}{\eta} \quad (42)$$

No caso de ser uma central com fontes de energia renováveis, o custo de combustível e das emissões de CO<sub>2</sub> é, naturalmente, nulo.

Os custos de operação e manutenção  $c_{OM}$  referem-se tipicamente a uma percentagem  $i$  do investimento total da central ou têm como referência um custo fixo por unidade de energia produzida  $c$ :

$$c_{OM} = iI \quad (43)$$

$$c_{OM} = ce \quad (44)$$

### Fluxos monetários de exploração

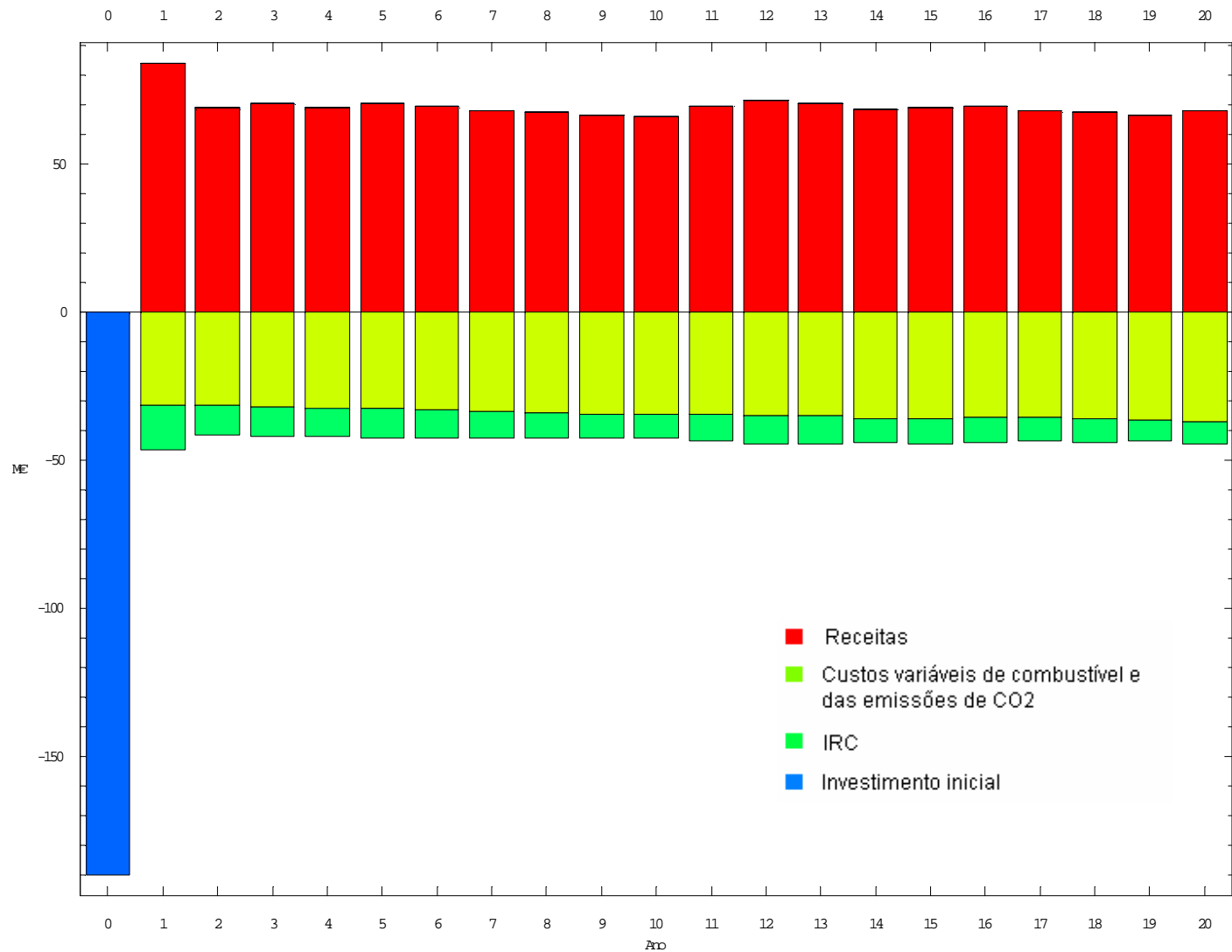
Os fluxos monetários de exploração referem-se ao valor monetário efectivamente gerado pela operação da central eléctrica. Estes fluxos são determinantes para avaliação do investimento na central.

Os fluxos monetários de exploração dos activos de produção dependem do valor da produção eléctrica da central  $p_e$  e dos já referidos custos de combustível, das emissões de CO<sub>2</sub> e de operação e manutenção, bem como da taxa de imposto fiscal  $irc$  e da amortização do valor imobilizado da central:

$$fm_t|_{Térmicas} = \left[ \left( p_{el_t} \cdot e_t - \frac{p_{comb_t} \cdot e_t + p_{CO_2} \cdot em \cdot e_t}{\eta} - c_{OM} \right) - amortização \right] (1 - irc) + amortização \quad (45)$$

$$fm_t|_{Renováveis} = [(p_{el_t} \cdot e_t - c_{OM}) - amortização] (1 - irc) + amortização \quad (46)$$

com  $e_t$  a electricidade produzida.



**Figura 11.** Distribuição ilustrativa dos fluxos monetários de uma central térmica a carvão, com potência nominal de 400MW e 4500 horas equivalentes anuais, ao longo de 20 anos de vida útil.

## 4.2 Medidas de referência: retorno esperado e risco

Uma análise tradicional para a avaliação de investimentos é a relação benefício/custo (B/C), definida como a razão entre o valor de mercado da central e o seu investimento [19]:

$$B/C = \frac{\sum_{j=1}^{ivu} \frac{fm_j}{(1+tx)^j}}{I} \quad (47)$$

A relação (B/C) é uma medida do retorno. No entanto, para um investidor é relevante em que medida o seu investimento cria valor acrescentado, pelo que uma medida de retorno  $r$  mais adequada é a relação benefício/custo subtraída de uma unidade, que é a percentagem do investimento que corresponde a valor acrescentado.

$$r = \frac{\sum_{j=1}^{ivu} \frac{fm_j}{(1+tx)^j}}{I} - 1 \quad (48)$$

Esta medida reflecte o retorno do investimento. No entanto, para poder comparar investimentos em activos com tempos de vida úteis diferentes, segundo o critério retorno-risco, há a necessidade de estimar a correlação entre os retornos dos diferentes investimentos. Para que tal possa ser feito, os retornos devem referir-se a uma unidade temporal comum. Para tal, vamos usar como medida de retorno a razão entre os fluxos monetários anuais de exploração e o custo fixo de capital anual. Assim, temos uma medida de retorno relevante, sobre a qual se pode estimar a correlação entre activos com tempos de vida úteis diferentes.

$$r_i = \frac{fm_i}{cf} - 1 \quad (49)$$

Dado que os fluxos monetários são incertos, também o retorno definido em (49) é incerto. Relembre-se que se considera como medidas de retorno e de risco os conceitos definidos pela teoria da carteira, isto é, o valor esperado e o desvio padrão do retorno, respectivamente. Assim, conhecendo a distribuição probabilística dos fluxos monetários anuais e o custo fixo de capital anual de cada central, pode-se inferir a distribuição probabilística do retorno anual de cada central e calcular o seu valor esperado  $\mu_{r_i}$  e a sua variância  $\sigma_{r_i}^2$  de acordo com:

$$E[r_i] \equiv \mu_{r_i} = \frac{E[fm_i]}{cf} - 1 \quad (50)$$

$$VAR[r_i] \equiv \sigma_{r_i}^2 = \frac{VAR[fm_i]}{cf^2} \quad (51)$$

É de notar que, nesta situação, a taxa de actualização  $tx$  adequada ao cálculo do custo fixo de capital anual  $cf$  através de (40) é a taxa sem risco, para não introduzir considerações prévias de risco, o qual que se pretende medir através da dispersão dos retornos [20].

Dado que o retorno e o risco anual de cada activo variam de ano para ano, consoante as condições de mercado em que o activo opera, considera-se como referência de retorno e risco anuais a média do retorno e do risco anuais ao longo do tempo de vida útil do activo. Como medida da interacção entre os retornos dos diferentes activos, pode considerar-se a correlação entre os retornos anuais ao longo do tempo de vida útil em comum dos distintos activos. Assim, conhecendo a distribuição probabilística do retorno de cada activo para diferentes anos através de (49), pode-se determinar estimadores das medidas de referência de cada activo necessárias à análise de carteira tal como apresentada no capítulo 2 – o valor esperado e o desvio padrão do retorno. Considerando  $N$  pares anuais (retorno, risco) calculados através de (50) e (51), estimados a partir dos fluxos anuais ao longo de  $N$  anos, tem-se os seguintes estimadores para cada activo  $i$  :

Estimador do retorno esperado

$$\hat{E}[r_i] \equiv \mu_{r_i} = \frac{\sum_{t=1}^N E[fm_{t,i}]}{cf_i \cdot N} - 1 \quad (52)$$

Estimador do risco

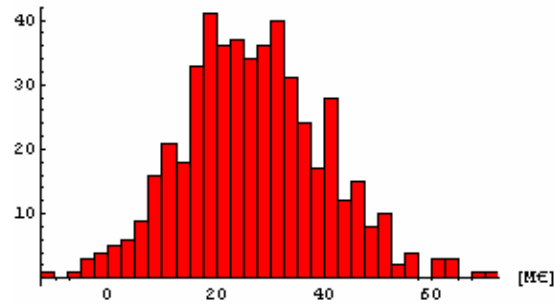
$$\sqrt{\hat{VAR}[r_i]} \equiv \sigma_{r_i} = \frac{\sum_{t=1}^N \sqrt{VAR[fm_{t,i}]}}{cf_i \cdot N} \quad (53)$$

Estimador da covariância

$$\hat{E}[r_i, r_j] \equiv \sigma_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^N [(\mu_{r_{i,k}} - \mu_{r_i})(\mu_{r_{j,k}} - \mu_{r_j})]}{N}, \quad i \neq j \quad (54)$$

## Simulação 7

Vamos recorrer à simulação de Monte Carlo dos processos exógenos definidos no capítulo anterior e usá-los de acordo com (45) e (46) para estimar a função densidade de probabilidade dos fluxos monetários anuais.



**Figura 12.** Histograma de frequências absolutas do fluxo monetário de exploração anual [M€] de uma central térmica a carvão com 400MW de potência nominal e 4500 horas equivalentes, resultado de uma amostra com dimensão 500.

A partir dos fluxos monetários de cada activo estimados para diferentes anos do tempo de vida útil, estima-se diferentes pares anuais (risco, retorno) de cada activo através de (50) e (51). Considerando os diferentes pares anuais (risco, retorno) de cada activo, estima-se o retorno esperado e o risco de referência através de (52) e (53). A interação entre os diferentes activos mede-se através da estimação da covariância entre os retornos anuais dos diferentes activos ao longo do tempo de vida útil em comum, através de (54).



## 5 Gestão de uma carteira de activos de produção eléctrica – investimento segundo a óptica da Teoria da Carteira

Uma vez definidas as medidas de referência risco e retorno do investimento em activos de produção, bem como a forma de determinar estas medidas e as suas interacções, pode definir-se uma fronteira eficiente de Pareto de risco e retorno de carteiras de activos de produção. A selecção de carteiras dentro do conjunto pertencente à fronteira eficiente faz-se considerando restrições de risco, de retorno e de capacidade instalada, de forma a relacionar a selecção de investimentos com orientações estratégicas da empresa detentora dos activos.

### 5.1 Alocação de investimento – custo fixo de capital anual

Como primeira abordagem para a decisão de investimento, considera-se a alocação de capital de investimento anual a cada tipo de activo, isto é, que peso tem cada tipo de activo no custo fixo de capital anual total da carteira da empresa detentora dos activos de produção. Retomando as definições (2) e (3) do capítulo 2, fazendo uso dos estimadores (52) (53) e (54) para determinar o valor esperado  $\mu_{r_i}$  e a variância  $\sigma_{r_i}^2$  do retorno de cada activo, bem como a covariância entre os retornos dos diferentes activos  $\sigma_{ij}$ , tem-se para o retorno  $r_p$  de uma carteira  $P$  composta por  $N$  activos:

$$E[r_p] \equiv \mu_{r_p} = \sum_{i=1}^N w_i \mu_{r_i}$$

$$VAR[r_p] \equiv \sigma_{r_p}^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_{r_i}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

com  $\mu_{r_p}$  o valor esperado e  $\sigma_{r_p}^2$  a variância do retorno da carteira, e  $w_i$  o peso de cada activo no custo fixo de capital anual, tal que:

$$w_i = \frac{cf_i}{\sum_{i=1}^N cf_i} \quad (55)$$

satisfazendo as condições  $w_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Recorrendo a estas equações, pode mapear-se o conjunto de pares (risco, retorno) de carteiras possíveis de constituir com os N activos considerados. O mapeamento processa-se de forma iterativa atribuindo valores sucessivos aos pesos  $w_i$  de cada activo.

## 5.2 Alocação de potência

O mapeamento do conjunto de pares (risco, retorno) de possíveis carteiras referido anteriormente, faz-se com recurso ao peso relativo de cada tipo de activo no custo fixo de capital anual do investimento. No entanto, este indicador não é o mais adequado como referência sobre a composição de carteiras de activos de produção. Por um lado, a avaliação do investimento num activo é feita de acordo com o seu valor total. Por outro lado, deve haver uma relação entre o investimento e uma referência absoluta que resulte de uma orientação estratégica da empresa detentora dos activos como, por exemplo, uma dada capacidade instalada.

Para o efeito vamos redefinir os pesos definidos em (55) em função da potência instalada de cada activo:

$$w_i = \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i} \quad (56)$$

com  $\lambda_i$  o custo fixo de capital anual específico do activo (€/MW) e  $p_i$  a sua capacidade instalada (MW).

Tendo como objectivo uma capacidade instalada total  $P_T$ , para determinar a capacidade instalada de cada activo  $p_i$  resolve-se o sistema de equações linear  $Ap = S$ , tal que:

$$A = [a_{ij}]_{n,n} : a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i (w_i - 1) & , \quad i = j \wedge i < n \\ w_i \lambda_j & , \quad i \neq j \wedge i < n \\ 1 & , \quad i = n \end{cases} \quad (57)$$

$$S = [s_i]_n^T : s_i = \begin{cases} 0 & , \quad i < n \\ P_T & , \quad i = n \end{cases} \quad (58)$$

$$p = [p_i]_n^T$$

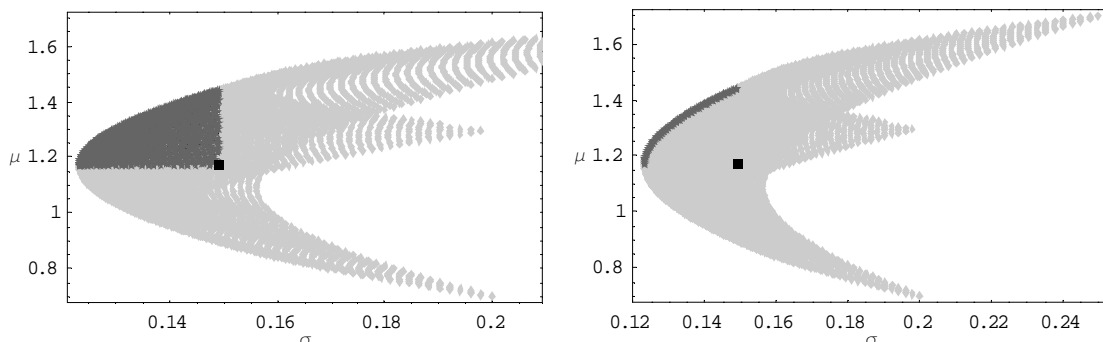
As capacidades instaladas  $p_i$  obtêm-se resolvendo:

$$p = A^{-1}S \quad (59)$$

A relação estabelecida em (56) permite relacionar a avaliação do investimento numa carteira de activos de produção com o objectivo estratégico de atingir uma determinada capacidade instalada total bem como estabelecer capacidades mínimas ou máximas para cada tipo de activos na construção da fronteira eficiente de risco e de retorno. Permite igualmente identificar acções de compra e/ ou de venda de activos e determinar o investimento total necessário para a composição de carteiras óptimas.

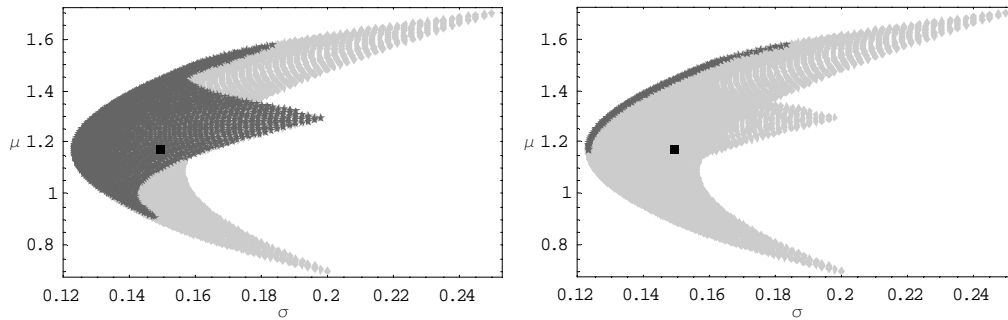
### 5.2.1 Restrições de retorno, de risco e de potência

Não conhecendo a função utilidade do detentor dos activos, pode estabelecer-se critérios de selecção e/ ou ainda introduzir restrições. Conhecendo os pesos actuais de cada activo  $w_i^*$ , admitindo que a carteira actual apresenta níveis de risco e retorno adequados, pode usar-se como critério para selecção das carteiras óptimas o retorno esperado ser superior ou igual ao actual e o risco ser menor ou igual ao actual:  $\mu_p \geq \mu_p^* \wedge \sigma_p \leq \sigma_p^*$ . Isto é, das carteiras sobre a fronteira eficiente, restringe-se a selecção de carteiras óptimas ao conjunto da fronteira eficiente que representa uma melhoria de Pareto em relação ao par (risco,retorno) da carteira actual.



**Figura 13.** Restrições de retorno e de risco. À esquerda mostra-se todas as carteiras do domínio de risco-retorno que representam uma melhoria de Pareto face à carteira actual. À direita representa-se as melhorias de Pareto pertencentes à fronteira eficiente.

Adicionalmente às restrições segundo critérios de retorno mínimo e risco máximo, pode-se através da definição (56) adicionar restrições referentes à alocação de potência, como por exemplo, a capacidade instalada de fontes renováveis ser superior a um dado valor. Isto permite ao investidor ter em conta novos factores como sejam orientações da UE ou preocupações ambientais.



**Figura 14.** Restrições de capacidade instalada. À esquerda mostra-se todas as carteiras do domínio de risco-retorno compostos no mínimo por 60% de um dado activo. À direita representa-se estas carteiras que pertencem à fronteira eficiente.

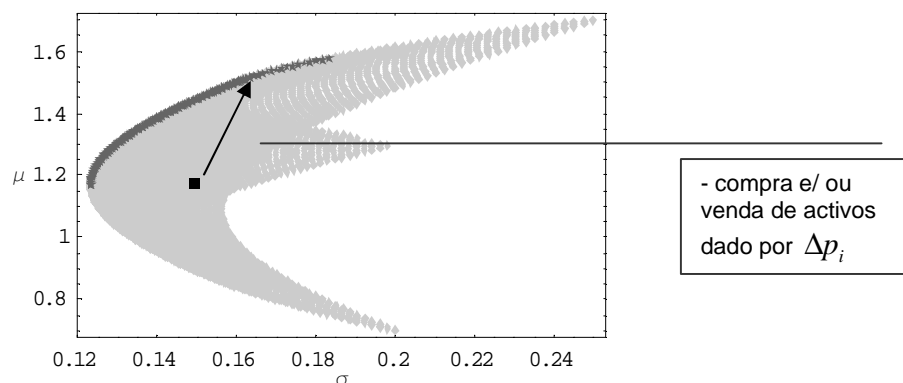
## 5.2.2 Decisões de compra e/ou venda de activos de produção no sentido da composição de carteiras óptimas

Uma vez determinada a composição óptima da capacidade instalada, considerando restrições de risco, de retorno e de potência, podem determinar-se acções de compra e de venda de activos no sentido da composição de carteiras óptimas de acordo com:

$$\Delta p_i = p_{i,\text{óptimo}} - p_{i,\text{actual}} \quad (60)$$

$$\begin{cases} \Delta p_i > 0, & \text{comprar } \Delta p \text{ do activo } i \\ \Delta p_i < 0, & \text{vender } \Delta p \text{ do activo } i \end{cases}$$

com  $p_{i,\text{óptimo}}$  e  $p_{i,\text{actual}}$  as potências óptima e da carteira actual, respectivamente.



**Figura 15.** Compra e/ou venda de activos no sentido da composição de carteiras óptimas sobre a fronteira eficiente, tendo como ponto de origem a carteira actual representada pelo ponto preto no centro da figura.

### 5.3 Ilustração

Consideremos como ilustração 5 tipos de activos de geração como possíveis investimentos, cada um com investimento específico  $\tau_i$ , custo anual específico  $\lambda_i$  e tempo de vida útil  $tvu$ , tal como representado na tabela 1. (Nota:  $\lambda_i$  é a anuidade referente a  $\tau_i$ )

i	Descrição	$\tau_i$ [M€/MW]	$\lambda_i$ [m€/ano.MW]	$tvu$ [anos]
1	Carvão	0.475	48.38	20
2	Gás CC*	0.475	48.38	20
3	Fuel	0.475	48,38	20
4	Hidráulica	0.897	73.36	50
5	Eólica	1	101.85	20

\* Ciclo combinado com turbina a gás

**Tabela 1.** Activos de produção considerados.

Consideremos agora a carteira actual de uma dada empresa produtora, descrita na Tabela 2.

i	Nr. de centrais	Capacidade instalada [M€/MW]
1	1	400
2	1	400
3	1	400
4	1	390
5	1	24
		-----
		1614

**Tabela 2.** Constituição da carteira actual.

O risco e o retorno dos activos de geração considerados, bem como da actual carteira estão registados na Tabela 3, considerando dois cenários, com uma diferença de 4 €/MWh no valor de longo prazo no preço *spot* da electricidade, e assumindo que os restantes parâmetros se mantêm constantes. Estes foram estimados de acordo com (52), (53) e (54) através da simulação de Monte Carlo dos respectivos fluxos monetários de exploração anuais, tal como descrito no capítulo 4, usando os processos estocásticos explorados no capítulo 3. Os parâmetros dos processos, as correlações dos retornos, as características de funcionamento dos activos (as centrais) estão registados nas tabelas 9 a 15 do apêndice A3. É considerada uma taxa de IRC de 35% e uma taxa de desconto sem risco de 8%.

No caso das centrais térmicas é admitida uma procura anual fixa de 4500h de potência equivalente. É também admitido que toda a sua produção é vendida a mercado e que a empresa produtora tem de comprar certificados de emissão de CO<sub>2</sub> para a totalidade da sua produção térmica. No caso das

centrais hídricas e eólicas é admitido que toda a sua produção é vendida a uma tarifa fixa regular aplicável ao longo do seu tempo de vida útil, respectivamente 60 e 70 €/MWh.

Em ambos os casos – térmicas e renováveis os custos de operação e manutenção  $c_{OM}$  são considerados negligenciáveis.

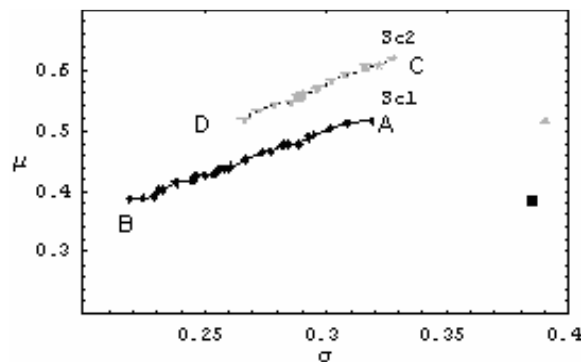
i	Descrição	Cenário 1		Cenário 2	
		$\mu_{r_i}$ [%]	$\sigma_{r_i}$ [%]	$\mu_{r_i}$ [%]	$\sigma_{r_i}$ [%]
1	Carvão	35.31	69.70	54.98	74.93
2	Gás CC	85.49	61.77	106.85	67.86
3	Fuel	8.01	76.91	28.61	81.15
4	Hidráulica	30.93	47.00	30.93	47.00
5	Eólica	8.28	2.90	8.28	2.90
<i>Carteira actual</i>		38.10	38.57	51.51	39.06

**Tabela 3.** Retorno e risco de cada tipo de activo de produção considerado, bem como da carteira actual, para cada um dos cenários referidos acima, com uma diferença no valor de longo prazo da electricidade de 4€/MWh.

Em ambos os cenários são impostas sobre a fronteira eficiente de risco e retorno do domínio de carteiras as seguintes restrições de risco, de retorno e de capacidade:

$$\sigma_{r_p} \leq \sigma_{r_p}^* \wedge \mu_{r_p} \geq \mu_{r_p}^* \wedge \sum_j p_j \geq 0.3$$

onde  $(\sigma_{r_p}^*, \mu_{r_p}^*)$  é o par risco-retorno da actual carteira com a composição da tabela 2 e  $j$  é um activo renovável, sendo  $p_j$  a sua capacidade. As carteiras óptimas resultantes destas restrições estão ilustradas na figura 16.



**Figura 16.** As linhas ilustram o conjunto de carteiras óptimas da fronteira eficiente para os cenários 1 e 2, respeitando as restrições de risco, de retorno e de capacidade. B/D e A/C representam as carteiras com menor e maior risco  $\sigma$ , respectivamente, para cada cenário. Os pontos isolados à direita representam o par risco-retorno  $(\sigma_{r_p}^*, \mu_{r_p}^*)$  das carteiras actuais para cada cenário.

É de notar que dado que o preço *spot* da electricidade de longo prazo é superior no cenário 2, as carteiras óptimas deste cenário apresentam maiores retornos para os mesmos níveis de risco.

A partir deste ponto, a escolha de uma carteira de entre o conjunto de carteiras óptimas resultantes da imposição de restrições de risco, de retorno e de capacidade instalada mínima de renováveis, depende da aversão ao risco dos decisores ou do perfil de risco definido pela empresa, bem como de outras questões tais como a disponibilidade de licenças para construção de determinadas centrais, as oportunidades para comprar e vender activos de produção, restrições de orçamento, entre outros.

Como ilustração das diferentes carteiras óptimas vejamos com mais detalhe na tabela 4 a composição em termos de capacidade instalada das carteiras com menor e maior par risco-retorno, para cada cenário. (B e D, A e C respectivamente).

i	Descrição	Cenário 1		Cenário 2	
		A [%]	B [%]	C [%]	D [%]
1	Carvão	6.33	13.85	12.49	13.37
2	Gás CC	63.17	41.56	56.21	46.78
3	Fuel	0	0	0	0
4	Hidráulica	12.50	18.27	16.47	17.63
5	Eólica	18.00	26.32	14.83	22.22
	$\mu_{r_p}$	51.63	38.68	61.84	51.98
	$\sigma_{r_p}$	31.88	21.95	32.83	26.64

**Tabela 4.** Pesos em capacidade instalada de cada tipo de activo nas carteiras com maior (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.

É visível que o *trade off* entre risco  $\sigma_{r_p}$  e retorno  $\mu_{r_p}$  das carteiras A/C para as carteiras B/D diz respeito a um maior peso de centrais a gás CC e a carvão (1 e 2) nas primeiras carteiras, face a um maior peso de centrais eólicas e hídricas (4 e 5) nas segundas carteiras. Esta observação é consistente com a noção intuitiva de que carteiras com maior risco têm uma porção de activos de maior risco.

Tendo como objectivo um aumento de 20% na capacidade total instalada –  $P_T=1936\text{MW}$  – resolve-se (57), (58) e (59) e obtêm-se o conjunto de decisões de compra e/ ou venda de activos no sentido de carteiras óptimas. Este resultado para todas as carteiras óptimas ilustradas na figura 16 está registado nas figuras 20 e 23 do apêndice A4; em particular para as carteiras A, B, C e D ilustradas na figura 16 com a composição registada na tabela 4, as decisões de compra e/ou venda e os respectivos investimentos estão registado na tabela 5.

i	Descrição	Cenário 1		Cenário 2	
		A	B	C	D
1	Carvão [MW]	-278	-132	-158	-141
2	Gás CC [MW]	824	404	689	506
3	Fuel [MW]	-400	-400	-400	-400
4	Hidráulica [MW]	-148	-36	-71	-49
5	Eólica [MW]	324.7	486	263	406

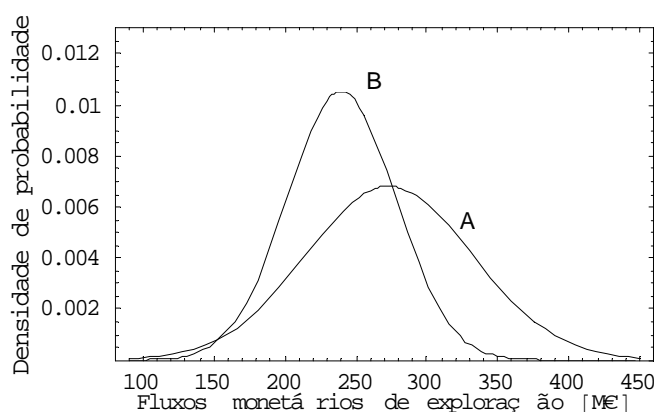
**Tabela 5.** Decisões de compra (>0) e/ou venda (<0) de cada tipo de activo de produção [MW] no sentido das carteiras com maior risco (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.

Considerando agora os dados da tabela 1, para a capacidade  $P_T$  mencionada acima, o valor esperado e o desvio padrão dos fluxos monetários de exploração anuais para cada uma das carteiras A, B, C e D pode determinar-se. Estes valores estão registados na tabela 6.

i		Cenário 1		Cenário 2	
		A	B	C	D
	$E[fm]$ [M€]	278.6	239.6	283.5	236.9
	$VAR[fm]^{1/2}$ [M€]	58.6	37.9	57.5	46.3
	Custo anual de capital fixo [M€]	183.7	172.8	175.2	173.6

**Tabela 6.** Valor esperado e desvio padrão dos fluxos monetários de exploração anuais (fm) das carteiras com maior risco (A e C) e menor risco (B e D), para os cenários 1 e 2.

Uma clara visualização da diferença entre as carteiras de maior e as de menor risco (A e B/ C e D) é obtida através da função densidade de probabilidade dos respectivos fluxos monetários de exploração. A título de exemplo para o cenário 1, os fluxos monetários das carteiras A e B estão ilustrados na figura 16



**Figura 17.** Distribuição de probabilidade dos fluxos monetários de exploração das carteiras óptimas com menor e maior risco do cenário 1.

Pode ver-se que a carteira A tem um valor esperado de fluxos monetários de exploração superior à carteira B, no entanto no caso A os fluxos monetários têm maior dispersão.



## 6 Conclusão

Nesta tese foi abordada a questão da decisão de investimento em carteiras de activos de produção de energia eléctrica. Foi proposta uma abordagem que aponta um conjunto de carteiras de activos óptimas a ter em consideração no momento de decidir.

Dentro do conjunto de carteiras óptimas, cada opção representa sempre um *trade off* entre o risco e o retorno, tal como na fronteira eficiente da Teoria da Carteira.

Para além de considerar restrições de risco e retorno sobre a fronteira eficiente, o presente trabalho também descreve uma forma de restringir o domínio de carteiras relativamente à potência instalada, permitindo acrescentar aos factores de decisão orientações estratégicas da empresa detentora dos activos.

O risco e o retorno das carteiras são calculados tal como definido na Teoria da Carteira. Recorre-se à simulação de Monte Carlo para estimar o risco e o retorno de cada tipo de central, bem como as suas interacções, através da estimação dos fluxos monetários de exploração.

A presente abordagem é genérica no que toca à estimação do risco e do retorno. Como alternativa podem ser considerados outros modelos de valoração bem como outros processos estocásticos no sentido de estimar o retorno e o risco dos activos de produção de uma forma mais detalhada e mais sofisticada, como seja por exemplo utilizando modelos de opções reais [6], [21-22]. Por outro lado, dado o horizonte temporal dos investimentos em activos de produção eléctrica (superior a 15-20 anos), o modelo de valoração poderá também incluir outros tipos de risco como os riscos regulatório e tecnológico.

É de notar que o investimento em cada tipo de central varia muito com a sua localização e com as suas especificidades, pelo que a avaliação da carteira deverá considerar um maior número de classes de activos do que o considerado na ilustração. Em particular, no caso das eólicas e hídricas, o retorno varia bastante de acordo com o potencial eólico e hidráulico do local em consideração, pelo que diferentes classes de hídricas e eólicas serão certamente necessárias.

Adicionalmente, note-se também que os níveis de risco e retorno da carteira são dinâmicos, tal como as condições de mercado a que os activos estão sujeitos, pelo que a composição da carteira deverá ser revista regularmente.

Em suma, esta abordagem, quando bem enquadrada, pode trazer clareza no momento de decidir quais os activos a comprar e quais os activos a vender, tendo em conta qual o impacto destas decisões nos níveis de risco e de retorno da empresa produtora de electricidade.

## Referências bibliográficas

- [1] H. Markowitz, *Portfolio Selection*, The Journal of Finance, Vol. VII, No.1, Março 1952
- [2] R. A. Brealy, S. C. Myers, *Principles of Corporate Finance*, 7<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill/Irwin Series in Finance, Insurance, and Real Estate
- [3] A. Damodaran, *Investment Valuation – Tools and techniques for determining the value of any asset*, Wiley Frontiers in Finance, John Wiley & Sons, Inc
- [4] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5<sup>th</sup> ed., Finance Series. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall
- [5] Vincent Kaminski, *Energy Modeling: Advances in the Management of Uncertainty*, Risk Books; 2a Ed, 2005.
- [6] P. F. Correia, P. M. S. Carvalho, L. A. F. M. Ferreira, J. Guedes, J. Sousa, *Power Plant Multi-Stage Investment Under Market Uncertainty*, 2007
- [7] D. Koutsoyiannis, *Stochastic Simulation of Hydrosystems*, The Encyclopedia of Water
- [8] J. D. Salas, J. A. Ramirez, P. Burlando, Sr. R. A. Pielke, *Stochastic simulation of precipitation and streamflow processes*, Capítulo 33 em *Handbook of Weather, Climate, and Water*, T.D. Potter and B.R. Colman, Eds., Wiley-Interscience, John Wiley and Sons Inc., New York, NY, 607-640
- [9] D. Harte, M. Pickup, *Stochastic Models for Hydro Catchment Inflows; an Exploratory Analysis*, A report undertaken for the New Zealand Electricity Commission
- [10] D.L.D.D. Jardim; M.E.P. Maceira; D.M. Falcão; J.M. Damázio, *Stochastic Streamflow Model for Hydroelectric Systems using Clustering Techniques*, VIII SEPOPE (Symposium of specialists in electric operational and expansion planning), Maio 2002
- [11] *Engineering and Design - Hydrologic Frequency Analysis*, Engineer Manual 1110-2-1415, Department of the Army - U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC 20314-1000, Março 1993, Capítulo 12 *Stochastic Hydrology*
- [12] Bento J. F. Murteira, Daniel A. Muller, K. Feridun Turkman, “Análise de Sucessões Cronológicas”, McGraw Hill, Janeiro de 2000
- [13] [Online] [www.windpower.org](http://www.windpower.org) [consultado entre Março 2007 e Dezembro 2007]
- [14] P. F. Correia, P. M. S. Carvalho, L. A. F. M. Ferreira, J. Guedes, J. Sousa, *On the Returns from a Portfolio of Wind Turbines*, paper em desenvolvimento, 2007
- [15] W. J. Szajnowski, *The Generation of Correlated Weibull Clutter for Signal Detection Problems*, IEEE transactions on aerospace and electronic systems, VOL. AES-13, No.5, September 1997
- [16] [Online] [www.mathworld.com](http://www.mathworld.com) [consultado em Dezembro 2007]
- [17] [Online] [www.windatlas.dk](http://www.windatlas.dk) [consultado em Dezembro 2007]
- [18] [Online] [www.ineti.pt](http://www.ineti.pt) [consultado em Dezembro 2007]
- [19] J. P. S. Paiva, *Redes de Energia Eléctrica – uma Análise Sistémica*, Colecção Ensino da Ciência e da Tecnologia, IST Press

- [20] J. O. Soares, A. V. Fernandes, A. A. Marçõ, J. P. P. Marques, *Avaliação de Projectos de Investimento na Óptica Empresarial*, 1ª edição, 1999, Edições Sílabo
- [21] M. Denton; A. Palmer; R. Nasiello; P. Skantze, *Managing Market Risk in Energy*, IEEE transactions on power systems, Vol. 18, No. 2, Maio 2003
- [22] S. N. Siddiqi, *Project Valuation and Power Portfolio Management in a Competitive Market*, IEEE transactions on power systems, Vol. 15, No. 1, Fevereiro 2002
- [23] [Online] [www.inag.pt](http://www.inag.pt) [consultado entre Março 2007 e Junho 2007]

### **Outra bibliografia**

- A. K. Dixit, R. S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994
- Anne Ku, *Risk and Flexibility in Electricity: Introduction to the Fundamentals and Techniques*, Risk Books, 2003.
- E. Sun; E. Liu, *Generation Asset Valuation Under Market Uncertainties*, IEEE, 2007
- E. Caruso; M. Dicorato; A. Minoia, M. Trovato, *The Valuation of New Generation Assets in a Competitive Electricity Market*, IEEE MELECON 2004, Maio, Dubrovnik, Croácia
- F. Hoss, *Asset Management: Using Efficient Frontier Analysis to Select Projects With Achievable Returns While Operating Within Acceptable Risk*, GE Energy
- H. M. Markowitz, *Foundations of Portfolio Theory*, Nobel Lecture, Dezembro 1990
- H. Y. Yamin; J. D. Finney; W. Rutz; H. Holly, *Gencos Portfolio Management using "Strategist" in Deregulated Power Markets*, IEEE, 2001
- M. Liu, F. F. Wu, *Portfolio Optimization in Electricity Markets*, Electric Power Systems Research, Elsevier, 2006
- M.M. Rebelo de Sousa; H. M. Delgado Rocha, *Estratégias de Gestão de Activos na Produção de Energia Eléctrica: Investimentos usando Opções Reais*, LEEC – IST, Trabalho Final de Curso 80/2005/L, Junho de 2006
- R. M. Vogel, J. R. Stedinger *The Value of Stochastic Streamflow Models in Overyear Reservoirs Design Applications*, Water Resources Research, Vol.24, Num.9, 1483-1490, Setembro 1998
- W. Sharpe, *Macro Investments Analysis*, Stanford University  
<http://www.stanford.edu/~wfsharpe/mia/mia.htm>
- W. T. Song, L. Hsiao, *Generation of Autocorrelated Random Variables with a Specified Marginal Distribution*, Proceedings of the 1993 Winter Simulation Conference
- X. Guan; J. Wu; F. Gao; G. Sun, *Optimal Generation Portfolio Management for Futures and Spot Market*, IEEE, 2006
- [Online] [www.erse.pt](http://www.erse.pt) [consultado entre Março 2007 e Dezembro 2007]
- [Online] [www.iea.org](http://www.iea.org) [consultado entre Março 2007 e Junho 2007]

## A1. Lema de Itô

O processo de Itô é um processo de Wiener generalizado, com  $a$  e  $b$  funções da variável  $x$  e do tempo  $t$ , tal que:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \quad (\text{A1. 1})$$

com  $z$  um processo de Wiener.

O lema de Itô estabelece que uma função  $G(x,t)$  segue um processo de Itô tal que:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \left( \frac{\partial G}{\partial x} b \right) dz \quad (\text{A1. 2})$$

com  $z$  o processo de Wiener em (A1.1). Assim,  $G$  também segue também um processo de Itô, com

valor esperado e variância da variação de  $G$  ao longo do tempo de  $\left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right)$  e

$\left( \frac{\partial G}{\partial x} b \right)^2$ , respectivamente.

## A2. Parâmetros da barragem de Miranda do Douro

	90/91	91/92	92/93	92/93	93/94	94/95	95/96	96/97	97/98	98/99	00/01	01/02	02/03	04/05	05/06	06/07
Outubro	105.9	129.09	127.79	269.77	88.26	43.56	37.28	140.83	60.54	116.77	127.77	174.01	60.12	188.8	115.7	39.1
Novembro	165.1	131.87	162.5	352.7	194.5	64.8	201	405	149.84	174.4	152.09	158.07	115.86	285.32	178.28	98.58
Dezembro	161.37	120.39	237.19	250.57	130	242.22	379.1	800.62	85.04	258.42	851.25	101.24	677.04	471.41	89.89	145.01
Janeiro	251.93	92.21	172.21	489.5	505.88	1704.79	605.44	680	121.43	180.97	1698.48	95.82	854.21	322.6	104.67	109.52
Fevereiro	195.66	75.94	131.95	373.81	608.84	125.88	455.96	547.65	122.94	175.73	1450.67	99.83	688.17	381.39	120.3	96.41
Março	515.25	53.65	91.37	245.97	257.8	490.82	36.01	247.77	146.14	129.43	1791.45	143.37	758.46	277.77	134.56	283.16
Abril	445.86	118.17	48.71	163.84	154	492	152.4	285.54	171.29	228.19	495.96	129.92	448.69	265.49	152.77	268.96
Mai	261.29	33.37	101.55	127.94	103	373.96	135.5	290.991	124.59	380.98	224.18	85.72	376.21	270.32	126.75	166.96
Junho	185.1	83.7	204.83	157.57	96.94	231.9	264.39	354.304	107.5	157.12	162.98	101.91	1516.	136.32	122.71	121.63
Julho	0.15	97.65	155.29	87.71	78.69	128.1	120.4	151.359	80.51	101.35	123.56	26.62	104.13	74.17	63.91	103.86
Agosto	34.06	64.58	48.66	51.09	26.17	69	105.2	287.157	41.66	82.81	122.19	28.32	62.64	76.14	43.3	57.5
Setembro	103.81	115.5	139.57	126.17	66	49.4	193.58	184.503	72.56	150.53	138.47	59.32	140.8	113.77	51.25	71.74

Tabela 7. Dados históricos da barragem de Miranda.

	Outubro	Novembro	Dezembro	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Mai	Junho	Julho	Agosto	Setembro
$\hat{\mu}_m$	4.58865	5.13327	5.4599	5.74138	5.48674	5.38761	5.35822	5.11297	5.175	4.13064	4.11964	4.62153
$\hat{\sigma}_m$	0.583942	0.453032	0.767875	1.00026	0.874792	0.979115	0.628326	0.663937	0.693105	1.66032	0.596289	0.447525
$\hat{\phi}_m$	0.164728	0.615494	0.266524	0.706548	0.721018	0.488953	0.73356	0.696573	0.557639	0.0817624	0.384464	0.60934

Tabela 8. Parâmetros do processo (28) para gerar o logaritmo dos caudais: média, desvio padrão e correlação entre o i-ésimo mês e o mês anterior, estimados segundo (24), (25) e (26).

Nota: Os caudais mensais são a média dos caudais diários disponíveis no respectivo mês  
 Fonte: Instituto Nacional da Água [23]

### A3. Parâmetros dos activos de produção e dos processos estocásticos considerados

i	Eficiência $\eta$	Emissões de CO <sub>2</sub> [ton/GJ]
1	36%	0.0767
2	57%	0.056
3	32%	0.074
4	87%	-
5	Fig.9	-

**Tabela 9.** Parâmetros dos activos de produção.

	Prices				
	Electricidade [€/MWh]	CO <sub>2</sub> [€/ton]	Carvão [€/GJ]	Gás Natural [€/GJ]	Fuel-óleo [€/GJ]
$s(0)$	58	17	1.48	3.3	3.3
$\lambda$	1.93	0.05	0.1	0.1	0.1
$\phi$	Log(40) /Log(44)	Log(30.6)	Log(0.9)	Log(1.5)	Log(1.6)
$\sigma$	0.6	0.15	0.25	0.4	0.35

**Tabela 10.** Parâmetros dos processos dos preços.

	Carvão	Gás Natural	Fuel-óleo
Carvão	1	0.2	0.2
Gás Natural	0.2	1	0.2
Fuel-óleo	0.2	0.2	1

**Tabela 11.** Matriz de correlação dos preços dos combustíveis fósseis.

$\Delta h$	58 m
$\alpha$	5%

**Tabela 12.** Parâmetros da central hídrica.

Auto correlação	0.4
Parâmetro de forma	2.2
Velocidade anual media do vento	5.5 m/s

**Tabela 13.** Parâmetros do processo da velocidade do vento.

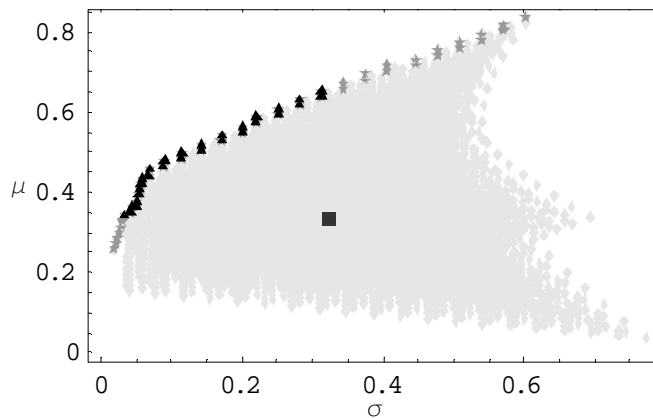
i	1	2	3	4	5
1	1	0	0.6	0	0
2	0	1	0.6	0	0
3	0.6	0.6	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

**Tabela 14.** Matriz de correlação dos retornos dos activos – estimação para o cenário 1.

i	1	2	3	4	5
1	1	0	0.7	0	0
2	0	1	0.2	0	0
3	0.7	0.2	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

**Tabela 15.** Matriz de correlação dos retornos dos activos – estimação para o cenário 2.

## A4. Resultados da ilustração



**Figura 18.** A cinzento mais claro está representado o domínio de risco-retorno para o cenário 1; a cinzento mais escuro está representada a fronteira eficiente; a preto estão representadas as carteiras ótimas que obedecem as restrições de risco, de retorno e de potência.

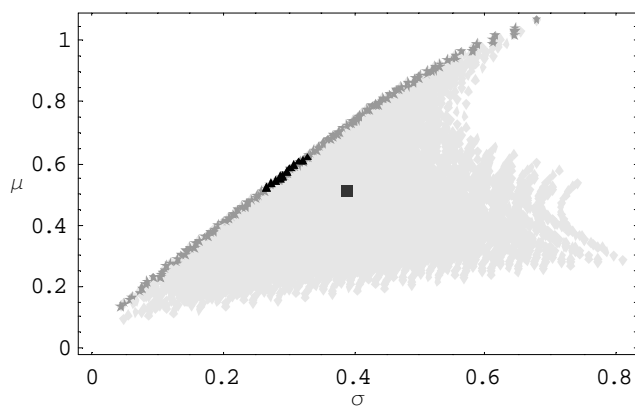
	risk	return	w1	w2	w3	w4	w5
1	0.318824	0.51634	0.0631773	0.631773	0.	0.124995	0.1
2	0.309778	0.5139	0.123476	0.555642	0.	0.203579	0.1
3	0.301681	0.502575	0.124899	0.562044	0.	0.16474	0.1
4	0.295243	0.49125	0.126355	0.568595	0.	0.124995	0.1
5	0.292949	0.48881	0.185214	0.493904	0.	0.203579	0.1
6	0.289054	0.477735	0.0653446	0.588101	0.	0.129283	0.2
7	0.284373	0.477485	0.187348	0.499595	0.	0.16474	0.1
8	0.282428	0.475295	0.127612	0.510449	0.	0.210399	0.1
9	0.277534	0.46616	0.189532	0.505418	0.	0.124995	0.1
10	0.273529	0.46397	0.129132	0.51653	0.	0.170324	0.1
11	0.266421	0.452645	0.130689	0.522757	0.	0.129283	0.2
12	0.261247	0.44132	0.132284	0.529136	0.	0.0872405	0.2
13	0.259553	0.43913	0.0676659	0.541328	0.	0.133876	0.2
14	0.258036	0.43888	0.193699	0.451964	0.	0.170324	0.1
15	0.255891	0.43669	0.132035	0.462123	0.	0.217691	0.1
16	0.254249	0.427805	0.0685214	0.548171	0.	0.0903789	0.2
17	0.250488	0.427555	0.196034	0.457412	0.	0.129283	0.2
18	0.246043	0.425365	0.133663	0.467821	0.	0.1763	0.2
19	0.244979	0.41623	0.198426	0.462994	0.	0.0872405	0.2
20	0.238124	0.41404	0.135332	0.473662	0.	0.133876	0.2
21	0.232331	0.402715	0.137043	0.47965	0.	0.0903789	0.2
22	0.230424	0.400525	0.0701583	0.491108	0.	0.138807	0.2
23	0.228825	0.39139	0.138797	0.485791	0.	0.045768	0.3
24	0.224442	0.3892	0.0710783	0.497548	0.	0.0937514	0.3
25	0.219473	0.38676	0.138524	0.415571	0.	0.182711	0.2

**Figura 19.** Conjunto dos pares risco-retorno das carteiras ótimas do cenário 1, bem como os respectivos pesos em potência.



	$\Delta p1$	$\Delta p2$	$\Delta p3$	$\Delta p4$	$\Delta p5$
1	-277.638	823.617	-400.	-147.91	324.731
2	-160.852	676.168	-400.	4.2924	203.191
3	-158.096	688.567	-400.	-70.9318	263.261
4	-155.277	701.255	-400.	-147.91	324.731
5	-41.2773	556.594	-400.	4.2924	203.191
6	-273.441	739.035	-400.	-139.604	396.81
7	-37.1443	567.615	-400.	-70.9318	263.261
8	-152.84	588.638	-400.	17.5005	269.502
9	-32.9149	578.894	-400.	-147.91	324.731
10	-149.896	600.415	-400.	-60.1163	332.398
11	-146.881	612.475	-400.	-139.604	396.81
12	-143.792	624.831	-400.	-221.033	462.794
13	-268.945	648.443	-400.	-130.709	474.011
14	-24.8445	475.363	-400.	-60.1163	332.398
15	-144.274	495.041	-400.	31.6242	340.409
16	-267.288	661.697	-400.	-214.954	543.345
17	-20.3217	485.916	-400.	-139.604	396.81
18	-141.121	506.076	-400.	-48.5418	406.386
19	-15.6886	496.727	-400.	-221.033	462.794
20	-137.889	517.388	-400.	-130.709	474.011
21	-134.576	528.985	-400.	-214.954	543.345
22	-264.117	551.178	-400.	-121.159	556.898
23	-131.177	540.88	-400.	-301.357	614.454
24	-262.336	563.651	-400.	-208.422	629.906
25	-131.708	404.877	-400.	-36.1255	485.756

**Figura 20.** Decisões de compra e/ ou venda no sentido das carteiras ótimas para o cenário 1.



**Figura 21.** A cinzento mais claro está representado o domínio de risco-retorno para o cenário 2; a cinzento mais escuro está representada a fronteira eficiente; a preto estão representadas as carteiras ótimas que obedecem as restrições de risco, de retorno e de potência.

	risk	return	w1	w2	w3	w4	w5
1	0.328259	0.618365	0.124899	0.562044	0.	0.16474	0.148317
2	0.322353	0.60704	0.126355	0.568595	0.	0.124995	0.180055
3	0.316468	0.603755	0.185214	0.493904	0.	0.203579	0.117302
4	0.308546	0.59243	0.187348	0.499595	0.	0.16474	0.148317
5	0.302255	0.581105	0.189532	0.505418	0.	0.124995	0.180055
6	0.296995	0.56908	0.129132	0.51653	0.	0.170324	0.184014
7	0.296239	0.566495	0.249797	0.437145	0.	0.16474	0.148317
8	0.290461	0.557755	0.130689	0.522757	0.	0.129283	0.217271
9	0.289681	0.55517	0.252709	0.442241	0.	0.124995	0.180055
10	0.287928	0.55447	0.191418	0.446643	0.	0.210399	0.15154
11	0.285723	0.54643	0.132284	0.529136	0.	0.0872405	0.25134
12	0.279205	0.543145	0.193699	0.451964	0.	0.170324	0.184014
13	0.272244	0.53182	0.196034	0.457412	0.	0.129283	0.217271
14	0.267184	0.520495	0.198426	0.462994	0.	0.0872405	0.25134
15	0.266392	0.519795	0.133663	0.467821	0.	0.1763	0.222215

**Figura 22.** Conjunto dos pares risco-retorno das carteiras ótimas do cenário 2, bem como os respectivos pesos em potência.

	$\Delta p1$	$\Delta p2$	$\Delta p3$	$\Delta p4$	$\Delta p5$
1	-158.096	688.567	-400.	-70.9318	263.261
2	-155.277	701.255	-400.	-147.91	324.731
3	-41.2773	556.594	-400.	4.2924	203.191
4	-37.1443	567.615	-400.	-70.9318	263.261
5	-32.9149	578.894	-400.	-147.91	324.731
6	-149.896	600.415	-400.	-60.1163	332.398
7	83.8076	446.663	-400.	-70.9318	263.261
8	-146.881	612.475	-400.	-139.604	396.81
9	89.4468	456.532	-400.	-147.91	324.731
10	-29.2607	465.058	-400.	17.5005	269.502
11	-143.792	624.831	-400.	-221.033	462.794
12	-24.8445	475.363	-400.	-60.1163	332.398
13	-20.3217	485.916	-400.	-139.604	396.81
14	-15.6886	496.727	-400.	-221.033	462.794
15	-141.121	506.076	-400.	-48.5418	406.386

**Figura 23.** Decisões de compra e/ ou venda no sentido das carteiras ótimas para o cenário 2.