INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Produtos Cruzados C^*. Invertibilidade numa Álgebra de Operadores Funcionais.

Rui Miguel Coutinho Palma

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Matemática e Aplicações

Júri

Presidente:	Doutor Amarino Brites Lebre
Orientador:	Doutora Maria Amélia Duarte Reis Bastos
Vogal:	Doutor Yuri Karlovich

Julho 2008

Resumo

Introduz-se a noção de álgebra C^* envolvente de uma álgebra-* normada e estabelece-se a sua teoria de representações. Através desta noção descreve-se a construção do produto cruzado C^* associado a um sistema dinâmico C^* e são desenvolvidas as relações entre representações do produto cruzado e representações covariantes do sistema dinâmico. Indicam-se relações entre o produto cruzado C^* e o produto cruzado C^* reduzido. Mostra-se que, para grupos discretos, os elementos do produto cruzado C^* podem ser identificados com funções definidas no grupo, e que no caso do produto cruzado C^* reduzido estas funções determinam univocamente os elementos. Descreve-se uma noção de sistema dinâmico C^* para semigrupos, o correspondente produto cruzado C^* e a sua teoria de representações.

São apresentadas condições para que uma álgebra C^* gerada por um sistema dinâmico C^* seja isomorfa ao correspondente produto cruzado e descreve-se o método das trajectórias locais, que fornece um critério de invertibilidade para classes destas álgebras. Aplica-se o método desenvolvido ao estudo da invertibilidade na álgebra C^* gerada por operadores de multiplicação por funções de $PSO(\mathbb{T})$ e por uma representação unitária de um grupo mediável discreto de difeomorfismos de $\mathbb{T}$ com o mesmo conjunto de pontos fixos. Mostra-se que o estudo da invertibilidade nesta álgebra se reduz ao estudo da invertibilidade nas álgebras $\mathcal{B}_{arc}$, $\mathcal{B}^{\circ}$ e $\mathcal{B}_{*}$, sendo a primeira um produto cruzado C^* e a segunda uma álgebra C^* comutativa com espectro que pode ser caracterizado. Mostra-se que a invertibilidade em $\mathcal{B}_{arc}$ e $\mathcal{B}^{\circ}$ implica a invertibilidade em $\mathcal{B}_{*}$.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra C^*, sistema dinâmico C^*, produto cruzado C^*, operador funcional, método das trajectórias locais, invertibilidade em álgebras

Abstract

The notion of enveloping C^*-algebra of a normed *-algebra is introduced and its representation theory is established. Through this concept we describe the construction of C^* crossed products associated with C^* dynamical systems and we establish the relations between representations of the C^* crossed product and covariant representations of the dynamical system. We evidence relations between the C^* crossed product and the reduced C^* crossed product. We show that, for discrete groups, the elements of the C^* crossed product can be identified with functions defined in the group, and that in the case of the reduced C^* crossed product these functions determine an element uniquely. We describe a notion of C^* dynamical system for semigroups, the corresponding notion of C^* crossed product and its representation theory.

We present conditions for a C^*-algebra generated by a C^* dynamical system to be isomorphic with the corresponding C^* crossed product and we describe the local trajectory method, which presents an invertibility criterion for some classes of these type of algebras. The developed work is used to study the invertibility in the C^*-algebra generated by the multiplication operators by functions of $PSO(\mathbb{T})$ and by a unitary representation of an amenable discrete group of diffeomorphisms of $\mathbb{T}$ with the same set of fixed points. It is shown that the study of invertibility in this algebra can be reduced to the study of invertibility in the algebras $\mathcal{B}_{arc}$, $\mathcal{B}^{\circ}$ and $\mathcal{B}_{*}$, the first being a C^* crossed product and the second a commutative C^*-algebra with a spectrum that can be characterized. We show that the invertibility in $\mathcal{B}_{arc}$ and $\mathcal{B}^{\circ}$ implies the invertibility in $\mathcal{B}_{*}$.

KEYWORDS: C^*-algebra, C^* dynamical system, C^* crossed product, functional operator, local-trajectory method, invertibility in algebras

Agradecimentos

Os meus primeiros e maiores agradecimentos são para a Professora Amélia Bastos que por ter proposto um tema tão interessante tornou a realização deste trabalho um enorme prazer. Agradeço-lhe também a constante disponibilidade, atenção e interesse na realização desta tese assim como os seus valiosos comentários e críticas ao meu trabalho.

Gostaria também de agradecer ao meu colega e amigo Luís Alexandre pelas inúmeras conversas de matemática que tiveram lugar nos últimos anos, sempre tão imensamente úteis. Acredito que parte da minha formação a ele se deve.

Ao Professor Paulo Pinto devo o meu enorme gosto por Álgebras de Operadores. Para ele uma palavra de apreço por me ter aberto os olhos para uma área tão bela da matemática.

Agradeço aos meus colegas e amigos no IST por todo o apoio e por me contagiarem com a sua boa disposição.

Gostaria finalmente de agradecer aos meus pais e ao meu irmão pela dedicação que sempre tiveram por mim e pelo apoio incondicional que eu sei que me irão dar sempre e que acho que nunca vou poder retribuir.

Para Starsha e Xibi

Conteúdo

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos C^* com grupos discretos começou com F. Murray e J. von Neumann nos trabalhos fundamentais sobre, as agora designadas, álgebras de von Neumann, estabelecendo ligações importantes entre a teoria ergódica, a emergente teoria de álgebras de operadores e a mecânica quântica. Com o advento da teoria de álgebras C^* e tendo em vista aplicações em física o estudo de sistemas dinâmicos C^* generalizou-se de modo a contemplar grupos localmente compactos e álgebras C^* arbitrárias. Sucintamente, um sistema dinâmico C^* pode ser descrito como uma acção contínua de um grupo localmente compacto numa álgebra C^*. De acordo com a interpretação de que as álgebras C^* são "espaços topológicos não-comutativos", os sistemas dinâmicos C^* podem ser interpretados como uma versão não-comutativa dos sistemas dinâmicos clássicos, correspondentes a acções contínuas de grupos em espaços topológicos.

O estudo de um sistema dinâmico C^* leva de forma natural à consideração de uma nova álgebra C^*, o produto cruzado C^*, que codifica informação importante sobre o sistema dinâmico. Em particular, as representações do produto cruzado C^* estão sempre associadas a representações do sistema dinâmico e vice-versa. Os produtos cruzados C^* foram introduzidos, para grupos discretos, por Turumaru em 1955 e para grupos localmente compactos arbitrários por Doplicher, Kastler e Robinson, que estabeleceram também a sua teoria de representações, em 1966. Mais recentemente tem havido esforços no sentido de generalizar a noção de produto cruzado C^* de modo a contemplar acções de semigrupos em álgebras C^*.

O objectivo do presente trabalho é dar precisamente uma introdução à teoria de representações de produtos cruzados C^* e tendo presente essa teoria estabelecer a teoria de invertibilidade numa álgebra de operadores funcionais gerada por um sistema dinâmico C^*.

Os produtos cruzados C^* por grupos mediáveis discretos são exemplos muito especiais de álgebras geradas por sistemas dinâmicos C^*. Em particular, são um tipo de álgebras geradas por sistemas dinâmicos para as quais se consegue estabelecer para certas classes, por trajectorialização local, uma teoria de invertibilidade. As álgebras C^* de operadores funcionais num espaço associadas a um grupo de homeomorfismos nesse espaço são particularmente interessantes e fornecem exemplos bastante naturais de álgebras geradas por sistemas dinâmicos C^*. O estudo da invertibilidade neste tipo de álgebras depara-se com obstáculos provenientes quer do tipo de álgebra C^*, quer do grupo de homeomorfismos que se considera. Consegue estudar-se com sucesso a invertibilidade na álgebra C^* gerada por $PSO(\mathbb{T})$, a álgebra das funções seccionalmente fracamente oscilantes na circunferência unitária, e por um grupo mediável de difeomorfismos de $\mathbb{T}$ com o mesmo conjunto de pontos fixos. Os métodos, provenientes em parte dos produtos cruzados C^*, fornecem ferramentas e intuições importantes e constituem um passo no estudo de invertibilidade em álgebras C^* de operadores funcionais, dada a inexistência de uma teoria geral de invertibilidade em álgebras C^* não-comutativas.

No primeiro capítulo, [9] e [21], são introduzidos conceitos e resultados gerais e são fixadas notações necessárias ao estudo que é desenvolvido nos restantes capítulos. Salienta-se a definição de álgebra C^* envolvente de uma álgebra-* normada e a sua teoria de representações, desenvolvida neste capítulo, sem a exigência, usual na literatura, de que a álgebra-* normada tenha uma aproximação da unidade e seja completa.

No segundo capítulo, [21], [19] e [16], são introduzidas nas secções 2.1 e 2.2 as noções de sistema dinâmico C^* e de representação covariante. É definido, na secção 2.3, o produto cruzado C^* de um sistema dinâmico como sendo a álgebra C^* envolvente de $C_c(G, \mathcal{A})$, a álgebra-* normada das funções contínuas de suporte compacto no grupo G com valores na álgebra C^* $\mathcal{A}$, com um produto de convolução apropriado. Na secção 2.4 estabelece-se a correspondência entre representações não-degeneradas do produto cruzado e representações covariantes não-degeneradas do sistema dinâmico, mostrando-se que esta correspondência preserva a irredutibilidade. Definem-se também nesta secção representações regulares e o produto cruzado C^* reduzido e mostra-se que, quando o grupo é mediável, este é isomorfo ao produto cruzado C^*. Mostra-se na secção 2.5 que, embora os elementos do produto cruzado não tenham sido definidos à partida como funções, se pode definir o seu "valor" em cada ponto e que no caso do produto cruzado C^* reduzido estes "valores" definem univocamente os elementos. Na secção 2.6 é dada a noção de sistema dinâmico C^* para semigrupos abelianos totalmente ordenados, define-se o respectivo produto cruzado e estabelece-se a respectiva teoria de representações.

No terceiro capítulo, [14] e [5], na secção 3.1, são introduzidas as álgebras C^* de funções $PC(\mathbb{T})$, $SO(\mathbb{T})$ e $PSO(\mathbb{T})$, estudam-se os respectivos espaços de ideais maximais e é definida a álgebra $\mathcal{B}$ cuja teoria de invertibilidade é estudada neste capítulo. Esta álgebra é gerada pelos operadores de multiplicação por funções de $PSO(\mathbb{T})$ e por operadores unitários associados a um grupo G de difeomorfismos de $\mathbb{T}$ com o mesmo conjunto de pontos fixos. Na secção 3.2 são apresentadas condições para que uma álgebra gerada por um sistema dinâmico seja isomorfa ao produto cruzado C^* e estabelece-se o método das trajectórias locais, que fornece um critério de invertibilidade para este tipo de álgebras. Na secção 3.3 mostra-se que o estudo da invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$ pode ser reduzido ao estudo de invertibilidade em três álgebras: $\mathcal{B}_{arc}$, $\mathcal{B}^\circ$ e $\mathcal{B}_*$. A álgebra $\mathcal{B}_{arc}$ é construída de modo a ser um produto cruzado, tendo portanto uma teoria de invertibilidade dada pelo método das trajectórias locais. Sendo comutativa com um espectro que pode ser caracterizado, a álgebra $\mathcal{B}^\circ$ tem uma teoria de invertibilidade perfeitamente conhecida. É estebelecido para a álgebra $\mathcal{B}_*$ um critério de invertibilidade evitando a teoria de operadores limite, e utiliza-se este critério para mostrar que a invertibilidade em $\mathcal{B}_{arc}$ e em $\mathcal{B}^\circ$ implica a invertibilidade em $\mathcal{B}_*$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas definições e resultados gerais sobre álgebras involutivas e grupos localmente compactos que serão posteriormente utilizados nos restantes capítulos. A exposição dos resultados não segue necessariamente a sequência lógica com que estes são desenvolvidos na teoria.

1.1 Álgebras involutivas

Designar-se-á por *álgebra normada* qualquer álgebra associativa $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que esteja munida de uma norma $\|\cdot\|$ que satisfaça $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ for completa para a norma $\|\cdot\|$ diz-se que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra de Banach.*

1.1.1. Definição - *Uma* involução *numa álgebra associativa $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ é uma aplicação $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ satisfazendo as seguintes propriedades*

(i) $(\lambda_1 a + \lambda_2 b)^* = \overline{\lambda_1} a^* + \overline{\lambda_2} b^*$,

(ii) $(ab)^* = b^* a^*$,

(iii) $(a^*)^* = a$,

para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Uma álgebra munida de um involução diz-se uma álgebra involutiva.

É de especial interesse considerar álgebras involutivas normadas em que a norma e a involução estão relacionadas.

1.1.2. Definição - *Uma álgebra involutiva normada $\mathcal{A}$ satisfazendo*

$$\|a^*\| = \|a\|, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{1.1}$$

diz-se uma álgebra-* normada.

Se $\mathcal{A}$ for completa, diz-se que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach-*.

Se uma álgebra de Banach- $\mathcal{A}$ satisfizer a condição adicional*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2\,, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \tag{1.2}$$

diz-se que $\mathcal{A}$ é uma álgebra C^*.

Pode verificar-se facilmente que a condição (1.2) implica na realidade a própria condição (1.1), para álgebras involutivas normadas. As condições (1.1) e (1.2) impõem restrições muito fortes na estrutura algébrica e topológica destas álgebras, como se verá neste capítulo. Existem dois exemplos particularmente importantes de álgebras C^*. O primeiro é $C_0(X)$, o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulam no infinito, onde X é um espaço localmente compacto Hausdorff, com a soma e produto pontuais, involução dada por conjugação $f^*(x) := \overline{f(x)}$, e norma do supremo $\|f\|_\infty. = \sup_x |f(x)|$. Como caso particular quando X é compacto, obtém-se $C(X)$, o conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ com as mesmas operações algébricas, involução e norma. O segundo exemplo importante de álgebras C^* consiste na álgebra dos operadores limitados num espaço de Hilbert H, com a involução de um operador sendo dada pelo operador adjunto, e cuja norma é a norma usual de operadores $\|T\| := \sup_{\|\xi\|=1} \|T\xi\|$. Esta álgebra C^* será sempre denotada por $B(H)$.

Um terceiro exemplo de uma álgebra C^* é dado por $L^\infty(X)$, o espaço das funções essencialmente limitadas definidas num conjunto X munido com uma medida, identificadas a menos de medida nula.

Se uma álgebra C^* possuir uma identidade, denotada por e, tem-se necessariamente que $e^* = e$ e ainda que $\|e\| = 1$. Embora existam álgebras que não possuem identidade, certas classes de álgebras normadas têm uma *aproximação da unidade*, que é um conceito mais fraco que se descreve seguidamente.

1.1.3. Definição - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra normada. Uma rede $\{e_i\}$ é uma*

- aproximação da unidade à esquerda *se $\|e_i a - a\| \to 0$, para qualquer $a \in \mathcal{A}$.*
- aproximação da unidade à direita *se $\|a e_i - a\| \to 0$, para qualquer $a \in \mathcal{A}$.*
- aproximação da unidade *se $\{e_i\}$ for uma aproximação da unidade à esquerda e à direita.*

1.1.4. Teorema - [22, Corollary 15.4] **-** *Qualquer álgebra C^* possui uma aproximação da unidade $\{e_i\}$ tal que*

$$\|e_i\| \leq 1 \qquad e \qquad e_i^* = e_i.$$

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras involutivas. Um homomorfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que preserve a estrutura involutiva das álgebras, ou seja, que satisfaça

$$f(a^*) = f(a)^* \,, \qquad\qquad \forall a \in \mathcal{A},$$

diz-se um *homomorfismo-**.

Um homomorfismo-* bijectivo diz-se um *isomorfismo-**.

Um homomorfismo-* de uma álgebra involutiva em si própria diz-se um *endomorfismo-**.

Um endomorfismo-* invertível diz-se um *automorfismo-**.

1.1.5. Teorema - [22, Theorem 15.7] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-* normada e $\mathcal{I}$ um ideal de $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{I}$ for fechado e auto-adjunto, ou seja, se $a^* \in \mathcal{I}$ sempre que $a \in \mathcal{I}$, então o quociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é também uma álgebra-* normada para a norma quociente. Se $\mathcal{A}$ for uma álgebra de Banach-* (C^*), então $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ é também uma álgebra de Banach-* (C^*).*

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma sua subálgebra, ambas possuindo a mesma identidade. O facto de um elemento $b \in \mathcal{B}$ ser invertível em $\mathcal{A}$ não implica em geral que o seja em $\mathcal{B}$, ou seja, o seu inverso b^{-1} não pertence necessariamente à subálgebra $\mathcal{B}$. A rigidez imposta pela condição (1.2) implica que isto de facto acontece em álgebras C^*.

1.1.6. Teorema - [22, Theorem 9.10] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ uma subálgebra C^*, ambas possuindo a mesma identidade. Tem-se que $\mathcal{B}$ é fechada para inversos, ou seja, se $b \in \mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{A}$, então o seu inverso b^{-1} pertence a $\mathcal{B}$.*

1.1.1 Álgebras comutativas

A álgebra $C_0(X)$, onde X é um espaço localmente compacto Hausdorff, é um exemplo de uma álgebra C^* comutativa.

A estrutura das álgebras de Banach, e mais particularmente das álgebras C^*, comutativas pode ser estudada através dos seus ideais maximais, ou equivalentemente dos seus *funcionais lineares multiplicativos*.

1.1.7. Definição - *Um* funcional linear multiplicativo *de uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é um homomorfismo não-nulo $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.*

1.1.8. Teorema - [22, secções 4.1, 4.3 e 7.3] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e Δ o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$. São satisfeitas as seguintes propriedades:*

- *Qualquer $\phi \in \Delta$ é contínuo com $\|\phi\| \leq 1$. Tem-se ainda que $\|\phi\| = 1$ se $\mathcal{A}$ tem identidade.*

- *Se $\mathcal{A}$ é comutativa e tiver identidade então existe um correspondência bijectiva entre Δ e o conjunto dos ideais maximais de $\mathcal{A}$, dada por*

$$\phi \mapsto \mathrm{Ker}\phi.$$

- *Com a topologia fraca-*, Δ é um espaço localmente compacto Hausdorff. Tem-se ainda que Δ é compacto se $\mathcal{A}$ tem identidade.*

Supõe-se sempre que o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de uma álgebra de Banach está munido da topologia fraca-*. O espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $C_0(X)$, onde X é um espaço localmente compacto Hausdorff, pode ser facilmente descrito como se indica no seguinte teorema.

1.1.9. Teorema - [22, Theorem 7.4] **-** *Seja X um espaço localmente compacto Hausdorff. O espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $C_0(X)$ é homeomorfo a X. O homeomorfismo é dado por*

$$x \mapsto \mathrm{ev}_x\,, \qquad\qquad x \in X,$$

onde ev_x é o funcional linear multiplicativo definido por $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, para $f \in C_0(X)$.

A seguinte aplicação é a uma ferramenta particularmente útil no estudo de álgebras de Banach comutativas.

1.1.10. Definição - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e Δ o espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$. A* transformada de Gelfand *é a aplicação $\widehat{\cdot} : \mathcal{A} \to C(\Delta)$ definida por*

$$\widehat{a}(\phi) := \phi(a)\,, \qquad\qquad \phi \in \Delta.$$

O resultado seguinte classifica as álgebras C^* comutativas.

1.1.11. Teorema de Gelfand - [22, Theorem 15.9] **-** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* comutativa e Δ o espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$. A transformada de Gelfand é um isomorfismo-* entre $\mathcal{A}$ e $C_0(\Delta)$.*

Note-se que se uma álgebra C^* comutativa tiver unidade então é isomorfa-* a $C(X)$, onde X é um compacto Hausdorff.

1.1.2 Estados e representações

A condição (1.2) imposta na definição de álgebra C^* impõe também restrições muito fortes na estrutura dos homomorfismos-*, como se descreve nos resultados seguintes.

1.1.12. Teorema - [9, II.1.6.6] - *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra Banach-* e $\mathcal{A}$ uma álgebra C^*. Tem-se que qualquer homomorfismo-* $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ é contínuo e $\|f\| \leq 1$.*

Note-se que o completamento de uma álgebra-* normada é sempre uma álgebra de Banach-* e que a extensão de um homomorfismo-* contínuo ao completado é ainda um homomorfismo-*. Do Teorema[1.1.12] obtém-se o seguinte corolário imediato, estendendo o homomorfismo por continuidade ao completado:

1.1.13. Corolário - *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra-* normada e $\mathcal{A}$ uma álgebra C^*. Tem-se que qualquer homomorfismo-* contínuo $f : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ satisfaz $\|f\| \leq 1$.*

Para homomorfismos-* injectivos entre álgebras C^* pode mesmo garantir-se o seguinte:

1.1.14. Teorema - [11, Theorem I.5.5] - *Qualquer homomorfismo-* injectivo $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ entre álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é uma isometria. Em particular, isomorfismos-* entre álgebras C^* são isométricos.*

1.1.15. Teorema - [9, II.5.1.2] - *Se $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo-* entre as álgebras C^* $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, então $f(\mathcal{A})$ é fechado em $\mathcal{B}$, ou seja, $f(\mathcal{A})$ é uma subálgebra C^* de $\mathcal{B}$.*

Assim como a estrutura de álgebras normadas comutativas pode ser estudada através da análise dos seus funcionais lineares multiplicativos, a estrutura de álgebras normadas em geral (não necessariamente comutativas) pode ser estudada através da análise das suas *representações*.

1.1.16. Definição - *Uma* representação *de uma álgebra-* normada $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H é um homomorfismo-* $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$. Uma representação* *diz-se* fiel *quando é injectiva.*

1.1.17. Definição - *Uma representação π de uma álgebra-* normada $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H diz-se* não-degenerada *se alguma das seguintes condições equivalentes se verifica:*

- *Dado $\xi \in H$, se $\pi(a)\,\xi = 0$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$ então $\xi = 0$.*
- *O espaço gerado por $\pi(\mathcal{A})H := \{\pi(a)\xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in H\}$ é denso em H.*

1.1.18. Proposição - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-* normada possuindo uma aproximação da unidade $\{e_i\}$ à esquerda. Uma representação contínua π de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H é não-degenerada se e só se $\pi(e_i)$ converge pontualmente para a identidade I de $B(H)$. Em particular, se $\mathcal{A}$ possuir uma identidade $\mathbf{1}$, π é não-degenerada se e só se $\pi(\mathbf{1}) = I$.*

Dem: Suponha-se que $\pi(e_i)$ converge pontualmente para I. Seja $\xi \in H$ tal que $\pi(a)\xi = 0$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Como por hipótese $\pi(e_i)\xi \to \xi$, tem-se necessariamente que $\xi = 0$, ou seja, π é não-degenerada.

Suponha-se agora que π é não-degenerada. Para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $\xi \in H$ tem-se que

$$\pi(e_i)\pi(a)\xi = \pi(e_i a)\xi \to \pi(a)\xi.$$

Como π é não-degenerada, os elementos da forma $\pi(a)\xi$, onde $a \in \mathcal{A}$ e $\xi \in H$, geram um subespaço denso em H. Pode então concluir-se que

$$\pi(e_i)\eta \to \eta\,, \qquad\qquad \forall \eta \in H,$$

ou seja, π converge pontualmente para I. $\square$

1.1.19. Definição - *Seja π uma representação de uma álgebra-* normada $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H. Um subespaço $V \subseteq H$ diz-se* $\pi(\mathcal{A})$-invariante *se $\pi(a)v \in V$ para quaisquer $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$. A representação π diz-se* irredutível *se os únicos subespaços fechados $\pi(\mathcal{A})$-invariantes são os triviais, $\{0\}$ e H.*

O resultado seguinte classifica as álgebras C^* em geral.

1.1.20. Teorema de Gelfand-Naimark - [11, I.9.12] - *Qualquer álgebra C^* possui uma representação fiel num espaço de Hilbert H. Consequentemente, qualquer álgebra C^* é isometricamente isomorfa a uma subálgebra-* fechada de $B(H)$, para algum espaço de Hilbert H.*

O estudo de álgebras C^* reveste-se em parte no estudo dos seus *estados*, que se definem seguidamente. Os estados de uma álgebra C^* permitem, em particular, construir representações de álgebras C^* e estabelecem a ligação entre álgebras C^* e espaços de Hilbert, exibida muito particularmente pelo Teorema de Gelfand-Naimark [1.1.20].

1.1.21. Definição - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^*. Um funcional linear contínuo $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ de $\mathcal{A}$ diz-se um* estado *se $\|\phi\| = 1$ e $\phi(a^*a) \geq 0$, para qualquer $a \in \mathcal{A}$.*

Os elementos da forma a^*a, onde $a \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é uma álgebra C^*, são designados por *elementos positivos*. Um facto que não é óbvio à partida é que a soma de elementos positivos é ainda um elemento positivo:

1.1.22. Teorema - [9, II.3.1.3] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^*. Se a e b são elementos positivos de $\mathcal{A}$ então $a + b$ é também um elemento positivo de $\mathcal{A}$.*

O resultado seguinte permite caracterizar os funcionais lineares contínuos que são estados numa álgebra C^* com unidade.

1.1.23. Proposição - [22, Corollary 13.6] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com identidade $\mathbf{1}$ e $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear contínuo. Tem-se que ϕ é um* estado *se e só se $\phi(\mathbf{1}) = 1$.*

O resultado seguinte é um análogo para estados da conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz, válida em espaços com um produto interno como é o caso dos espaços de Hilbert.

1.1.24. Teorema - [9, II.6.2.4] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e ϕ um estado de $\mathcal{A}$. Para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ é satisfeita a seguinte desigualdade:*

$$|\phi(a^*b)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b).$$

1.1.25. Teorema - [22, Proposition 13.8] - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade e $S_{\mathcal{A}}$ o conjunto dos estados de $\mathcal{A}$. Com a topologia fraca-*, $S_{\mathcal{A}}$ é um subconjunto compacto, convexo e Hausdorff.*

Supõe-se sempre que o conjunto dos estados $S_{\mathcal{A}}$ de uma álgebra C^* $\mathcal{A}$ com unidade está munido da topologia fraca-*. Sendo compacto e convexo, $S_{\mathcal{A}}$ possui pontos extremos [10]. Os pontos extremos de $S_{\mathcal{A}}$ são designados por *estados puros* e são particularmente importantes na teoria, pois permitem construir representações irredutíveis de $\mathcal{A}$. O resultado seguinte mostra que existem estados (e estados puros) em "abundância" em qualquer álgebra C^*.

1.1.26. Teorema - [22, Theorem 13.11] **-** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade e $P_{\mathcal{A}}$ o espaço dos estados puros de $\mathcal{A}$. Tem-se que $P_{\mathcal{A}}$ separa pontos, isto é, $a = 0$ se e só se $\nu(a) = 0$ para qualquer $\nu \in P(\mathcal{A})$. Mais especificamente, para qualquer $a \in \mathcal{A}$ existe um estado puro ν tal que*

$$\|a\|^2 = \nu(a^*a).$$

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra C^* e $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $\mathcal{B}$, ambas possuindo a mesma identidade. Seja ν um estado em $\mathcal{B}$. Pela Proposição[1.1.23], a restrição $\nu|_{\mathcal{A}}$ de ν a $\mathcal{A}$ é um estado de $\mathcal{A}$. O próximo resultado estabelece que os estados de $\mathcal{A}$ são sempre restrições de estados de $\mathcal{B}$.

1.1.27. Teorema - [8, Proposition 2.3.24] **-** *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra C^* e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ uma subálgebra C^* de $\mathcal{B}$. Qualquer estado de $\mathcal{A}$ admite uma extensão a um estado de $\mathcal{B}$. Adicionalmente, qualquer estado puro de $\mathcal{A}$ admite uma extensão a um estado puro de $\mathcal{B}$ e o conjunto das extensões de um estado é sempre um conjunto compacto.*

Os resultados seguintes permitem concluir que os estados puros preservam a estrutura multiplicativa de álgebras C^* comutativas.

1.1.28. Teorema - [13, Proposition 4.4.1] **-** *Os estados puros de uma álgebra C^* comutativa $\mathcal{A}$ com identidade são precisamente os funcionais linerares multiplicativos de $\mathcal{A}$.*

1.1.29. Teorema - [13, Proposition 4.3.14] **-** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* com unidade e $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$ uma subálgebra C^* central. Se ν é um estado puro de $\mathcal{A}$ então*

$$\nu(za) = \nu(z)\nu(a) \qquad \forall a \in \mathcal{A},\ z \in \mathcal{Z}.$$

1.1.3 Álgebra C^* envolvente

Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra-* normada com norma $\|\cdot\|_1$. Seja R a classe das representações contínuas de $\mathcal{B}$.

1.1.30. Teorema - *A aplicação* $\|\cdot\|_u : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\|a\|_u = \sup_{\pi \in R} \|\pi(a)\|$$

define uma semi-norma em $\mathcal{B}$ *que satizfaz as seguintes propriedades:*

- $\|ab\|_u \leq \|a\|_u \|b\|_u$,
- $\|a^*\|_u = \|a\|_u$,
- $\|a^*a\|_u = \|a\|_u^2$,
- $\|a\|_u \leq \|a\|_1$.

Dem : Note-se primeiramente que, apesar da classe R não ser um conjunto, o supremo tomado na definição de $\|\cdot\|_u$ está bem definido. Tal deve-se ao facto de que a colecção de elementos sobre a qual se está a tomar o supremo é uma subclasse de $\mathbb{R}$, e os Axiomas de Separação na teoria dos conjuntos garantem que uma subclasse de um conjunto é de facto um conjunto. Como tal, o supremo está na verdade a ser tomado sobre um subconjunto limitado (por $\|a\|_1$) de $\mathbb{R}$.

Para cada $\pi \in R$ a aplicação $\|\cdot\|_\pi : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ dada por $\|a\|_\pi := \|\pi(a)\|$ define uma seminorma em $\mathcal{B}$. Tomando o supremo em $\pi \in R$ conclui-se imediatamente que $\|\cdot\|_u$ define também uma seminorma em $\mathcal{B}$.

As restantes propriedades descritas no enunciado do teorema seguem do facto de cada $\pi \in R$ ser uma representação num espaço de Hilbert H, do facto de $B(H)$ ser uma álgebra C^* e $\|\cdot\|_\pi$ satisfazer propriedades análogas. $\square$

Seja $\mathcal{I} := \{b \in \mathcal{B} : \|b\|_u = 0\}$. Tem-se que $\mathcal{I}$ é um ideal fechado e auto-adjunto de $\mathcal{B}$, e portanto $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ é também uma álgebra-* normada, com norma $\|\cdot\|_u$. Esta norma é designada por *norma universal* e satisfaz $\|b+\mathcal{I}\|_u = \|b\|_u$ independentemente do representante da classe $b+\mathcal{I}$.

1.1.31. Definição - *Seja* $\mathcal{B}$ *uma álgebra-* normada. A* álgebra C^* envolvente *de* $\mathcal{B}$ *é o completamento de* $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ *na norma universal.*

Das propriedades descritas no Teorema[1.1.30], tem-se que a álgebra C^* envolvente de uma álgebra-* normada é de facto uma álgebra C^*.

Seja $\mathcal{A}$ a álgebra C^* envolvente de uma álgebra-* normada $\mathcal{B}$. A aplicação quociente $\widetilde{\tau} : \mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{B}/\mathcal{I},\ \|\cdot\|_u)$ é um homomorfismo-* contínuo. Por inclusão, a aplicação quociente define um homomorfismo-* canónico $\tau : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ contínuo e com imagem densa.

1.1.32. Teorema - *Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra-* normada, $\mathcal{A}$ a sua álgebra C^* envolvente e $\tau : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ o homomorfismo-* canónico. Tem-se que:*

- *Se ρ é uma representação de $\mathcal{A}$ então $\pi := \rho \circ \tau$ define uma representação contínua de $\mathcal{B}$.*
- *Se π é uma representação contínua de $\mathcal{B}$ então existe uma única representação ρ de $\mathcal{A}$ tal que*

$$\pi = \rho \circ \tau \,.$$

- *Na correspondência $\pi \longleftrightarrow \rho$ acima, tem-se que π é não-degenerada se e só se ρ é não-degenerada.*
- *Na correspondência $\pi \longleftrightarrow \rho$ acima, tem-se que π é irredutível se e só se ρ é irredutível.*

Dem :

- Qualquer representação de uma álgebra C^* é automaticamente contínua (Teorema[1.1.12]). Logo, se ρ é uma representação de $\mathcal{A}$, é claro que a composição $\pi := \rho \circ \tau$ é uma representação contínua de $\mathcal{B}$.
- Seja π uma representação contínua de $\mathcal{B}$ num espaço de Hilbert H. Note-se que, por definição, $\mathcal{I}$ está contido no núcleo de π. Como tal π factoriza-se pelo quociente $\mathcal{B}/\mathcal{I}$, ou seja, existe e está bem definido um único homomorfismo-* $\widetilde{\rho} : \mathcal{B}/\mathcal{I} \to B(H)$ tal que

$$\pi = \widetilde{\rho} \circ \widetilde{\tau} \,.$$

  Note-se que $\widetilde{\rho}$ é contínua quando $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ está equipado com a norma $\|\cdot\|_u$ pois, para qualquer $b + \mathcal{I} \in \mathcal{B}/\mathcal{I}$,

$$\|\widetilde{\rho}(b+\mathcal{I})\| = \|\pi(b)\| \leq \|b\|_u = \|b+\mathcal{I}\|_u \,.$$

  Estendento $\widetilde{\rho}$ por continuidade, obtém-se uma representação $\rho : \mathcal{A} \to B(H)$ tal que $\pi = \rho \circ \tau$. A unicidade de ρ segue da unicidade de $\widetilde{\rho}$ e do facto de ρ ficar completamente definida pelos seus valores em $\mathcal{B}/\mathcal{I}$.
- Suponha-se que π é não-degenerada. Seja $\xi \in H$ tal que $\rho(a)\xi = 0$ para todo o $a \in \mathcal{A}$. Em particular tem-se que, para qualquer $b \in \mathcal{B}$, $\rho(b+\mathcal{I})\xi = 0$, ou seja, $\pi(b)\xi = 0$. Como π é não-degenerada tem-se que $\xi = 0$. Conclui-se que ρ é não-degenerada.

  Suponha-se agora que ρ é não-degenerada. Seja $\xi \in H$ tal que $\pi(b)\xi = 0$ para todo o $b \in \mathcal{B}$. Tem-se então que $\rho(b+\mathcal{I})\xi = 0$. Como a álgebra $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ é densa em $\mathcal{A}$, tem-se que $\rho(a)\xi = 0$ para qualquer $a \in \mathcal{A}$, o que implica que $\xi = 0$ por ρ ser não-degenerada. Conclui-se que π é não-degenerada.

- Suponha-se que π é irredutível. Seja $V \subseteq H$ um subespaço fechado $\rho(\mathcal{A})$-invariante. Tem-se então que, para qualquer $b \in \mathcal{B}$ e $\xi \in V$,

  $$\pi(b)\xi = \rho(b + \mathcal{I})\xi \in V ,$$

  por V ser $\rho(\mathcal{A})$-invariante. Pode então concluir-se que V é também $\pi(\mathcal{B})$-invariante, e como tal $V = \{0\}$ ou $V = H$. Logo, ρ é irredutível.

  Suponha-se agora que ρ é irredutível. Seja $V \subseteq H$ um subespaço fechado $\pi(\mathcal{B})$-invariante. Tem-se então que, para qualquer $b \in \mathcal{B}$ e $\xi \in V$,

  $$\rho(b + \mathcal{I})\xi = \pi(b)\xi \in V .$$

  Como $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ é densa em $\mathcal{A}$ e V é fechado, tem-se necessariamente que $\rho(a)\xi \in V$ para quaisquer $a \in V$ e $\xi \in V$, ou seja, V é $\rho(\mathcal{A})$-invariante. Como tal, $V = \{0\}$ ou $V = H$ e portanto π é irredutível. $\square$

1.2 Grupos localmente compactos

1.2.1. Definição - *Um* grupo topológico *é um grupo G munido de uma topologia satisfazendo as seguintes condições:*

(i) Os conjuntos $\{s\}$, onde $s \in G$, são fechados.

(ii) A operação de produto, $(s,t) \mapsto st$, é contínua $G \times G \to G$.

(iii) A operação de inversão, $s \mapsto s^{-1}$, é contínua $G \to G$.

Um grupo localmente compacto *é um grupo topológico que é localmente compacto como espaço topológico.*

1.2.2. Proposição - [21, Lemma 1.9] **-** *Seja G um grupo topológico e $s \in G$. As aplicações $G \to G$ de inversão $t \mapsto t^{-1}$, multplicação à esquerda $t \mapsto st$ e multiplicação à direita $t \mapsto ts$, são homeomorfismos de G.*

Seja G um grupo e $A, B \subset G$ subconjuntos. Utilizar-se-á no seguimento a seguinte notação:

- $AB := \{st \in G : s \in A,\, t \in B\}$.
- $A^n := \{s_1 \cdots s_n \in G : s_k \in A, 1 \leq k \leq n\}$, para $n \in \mathbb{N}$.
- $A^{-1} := \{s^{-1} \in G : s \in A\}$.
- e designa a identidade do grupo.

1.2.3. Proposição - [21, Lemma 1.12] - *Seja G um grupo topológico. Se V é uma vizinhança de e, então $V \subset \overline{V} \subset V^2$.*

1.2.4. Proposição - [17, Lemma pág. 117] - *Seja G um grupo topológico e W uma vizinhança de e. Existe uma vizinhança V de e tal que $V^2 \subset W$.*

1.2.5. Proposição - *Seja G um grupo topológico, $U \subset G$ um aberto, $K, L \subset G$ compactos, e E um qualquer subconjunto de G. Tem-se que:*

- *UE e EU são abertos,*
- *KL é compacto.*

Dem: Tem-se que $UE = \bigcup_{s \in E} Us$. Pela Proposição[1.2.2] os conjuntos Us são abertos, e portanto UE é aberto. Um argumento semelhante mostra que EU é também aberto.

Seja $\{s_i t_i\}$ uma rede em KL, onde $s_i \in K$ e $t_i \in L$. Como K é compacto existe uma subrede $\{s_{i_j}\}$ de $\{s_i\}$ convergente para um ponto $s \in K$. Como L é compacto existe uma subrede $\{t_{i_{j_k}}\}$ de $\{t_{i_j}\}$ convergente para um ponto $t \in L$. Tem-se então que $\{s_{i_{j_k}} t_{i_{j_k}}\}$ é uma subrede de $\{s_i t_i\}$ convergente para $st \in KL$. Conclui-se que KL é compacto. $\square$

1.2.6. Teorema - [21, Lemma 1.13] - *Qualquer grupo topológico é Hausdorff e regular.*

Seja G um grupo e X um conjunto. Uma acção de G em X é uma aplicação $G \times X \to X$, denotada por $(s, x) \mapsto s.x$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $s_1.(s_2.x) = (s_1 s_2).x$, para quaisquer $s_1, s_2 \in G$ e $x \in X$,
- $e.x = x$, para qualquer $x \in X$.

Quando G é um grupo topológico e X um espaço topológico, a acção diz-se *contínua* quando a aplicação $G \times X \to X$ é contínua.

Dada uma acção de um grupo G num conjunto X define-se a *G-órbita* de um subconjunto $A \subset X$ como sendo o conjunto

$$G(A) := \{s.x \in X : s \in G,\ x \in A\}.$$

1.2.7. Definição - *Seja G um grupo localmente compacto, H um espaço de Hilbert e $\mathfrak{U}(H) \subset B(H)$ o grupo de operadores unitários em H. Uma* representação unitária *de G em H é um homomorfismo $U : G \to \mathfrak{U}(H)$, denotado por*

$s \mapsto U_s$, tal que, para cada $\xi \in H$, a aplicação $G \to H$ dada por $s \mapsto U_s\xi$ é contínua.

1.2.8. Definição - *Uma representação unitária U de um grupo localmente compacto G num espaço de Hilbert H diz-se* irredutível *se os únicos subespaços fechados de H invariantes por todos os operadores U_s, onde $s \in G$, são os triviais, $\{0\}$ e H.*

1.2.1 Integração em grupos localmente compactos

1.2.9. Definição - *Seja G um grupo localmente compacto. Uma* medida de Haar à esquerda *em G é uma medida μ definida na σ-álgebra $\mathfrak{B}$ gerada pelos compactos de G satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V \in \mathfrak{B}$ *é aberto e* $A \subset V\}$, *para todo o* $A \in \mathfrak{B}$.

(ii) $\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K$ *é compacto e* $K \subset V\}$, *para todo o aberto* $V \in \mathfrak{B}$.

(iii) $\mu(K) < \infty$ *para qualquer conjunto compacto* $K \subset G$.

(iv) μ *é invariante por translacções à esquerda, ou seja,* $\mu(sA) = \mu(A)$, *para qualquer conjunto mensurável* $A \in \mathfrak{B}$ *e* $s \in G$.

De modo semelhante se define uma medida de Haar à direita *em G.*

1.2.10. Teorema - [12, §58 Theorem B] **-** *Qualquer grupo localmente compacto possui uma medida de Haar à esquerda (e à direita), que é única a menos de multiplicação por um real positivo.*

Pode então estabelecer-se uma teoria de integração em grupos localmente compactos, relativamente à medida de Haar. Neste sentido podem definir-se os espaços de Banach $L^p(G)$, com $1 \leq p \leq \infty$, como usualmente. Supondo que G está munido de uma medida de Haar à esquerda μ, o integral de uma função $f \in L^1(G)$ é então invariante à esquerda, ou seja, $\int_G f(t)\, d\mu(t) = \int_G f(st)\, d\mu(t)$ para qualquer $s \in G$. A relação entre invariância à esquerda e à direita estabelece-se no resultado seguinte.

1.2.11. Teorema - [21, Lemma 1.61] **-** *Seja G um grupo localmente compacto e μ uma medida de Haar à esquerda em G. Existe um homomorfismo contínuo $\Delta : G \to \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\mu(As) = \Delta(s^{-1})\mu(A)$$

para qualquer conjunto mensurável $A \subset G$ e $s \in G$. Como tal, para qualquer função integrável f e qualquer $s \in G$, tem-se que

$$\int_G f(ts)\, d\mu(t) = \Delta(s^{-1}) \int_G f(t)\, d\mu(t)\,.$$

A função Δ é designada por função modular *de G.*

1.2.12. Teorema - [21, Lemma 1.67] - *Seja G um grupo localmente compacto, μ uma medida de Haar à esquerda e Δ a sua função modular. Para qualquer f integrável tem-se que*

$$\int_G \Delta(t^{-1})\, f(t^{-1})\, d\mu(t) = \int_G f(t)\, d\mu(t)\,.$$

Pretende-se agora estabelecer uma teoria de integração em grupos localmente compactos com valores vectoriais. Tal será feito através das funções contínuas de suporte compacto.

Seja G um grupo localmente compacto e $\mathcal{D}$ um espaço de Banach. O conjunto das funções contínuas de suporte compacto $G \to \mathcal{D}$ é um espaço vectorial, denotado por $C_c(G, \mathcal{D})$.

As aplicações $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ definidas por

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &:= \sup\{\|f(s)\| : s \in G\}\,,\\
\|f\|_1 &:= \int_G \|f(s)\|\, d\mu(s)\,,\\
\|f\|_2 &:= \Big(\int_G \|f(s)\|^2\, d\mu(s)\Big)^{\frac{1}{2}}\,,
\end{aligned}$$

definem normas em $C_c(G, \mathcal{D})$. É de salientar que quando $\mathcal{D}$ é um espaço de Hilbert a norma $\|\cdot\|_2$ provém de um produto interno em $C_c(G, \mathcal{D})$ definido para $f, g \in C_c(G, \mathcal{D})$ por

$$\langle f, g\rangle_{C_c(G,\mathcal{D})} := \int_G \langle f(s), g(s)\rangle\, d\mu(s)\,. \tag{1.3}$$

O próximo resultado mostra que pode ser definido o integral de uma função contínua de suporte compacto com valores num espaço de Banach. As proprieades que lhe estão associadas juntamente com resultados adicionais que podem ser encontrados em [21, secção 1.5] mostram que se trata de uma "boa" definição de integral.

1.2.13. Teorema - [21, Lemma 1.91] - *Seja $\mathcal{D}$ um espaço de Banach, G um grupo localmente compacto e μ uma medida de Haar de G. Existe uma aplicação* *linear* $C_c(G, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$

$$f \longmapsto \int_G f(s)\, d\mu(s)\,,$$

que é caracterizada pela seguinte propriedade

$$\phi\Big(\int_G f(s)\, d\mu(s)\Big) = \int_G \phi(f(s))\, d\mu(s) \qquad\qquad \forall \phi \in \mathcal{D}'\,.$$

Tem-se adicionalmente que, para $f \in C_c(G, \mathcal{D})$*,*

(i) $\Big\| \int_G f(s)\, d\mu(s) \Big\| \;\le\; \|f\|_1 \;\le\; \|f\|_\infty\, \mu(\operatorname{supp} f) \;<\; \infty\,,$

(ii) $L\Big(\int_G f(s)\; d\mu(s)\Big) \;=\; \int_G L(f(s))\; d\mu(s)$*, para qualquer aplicação linear contínua* $L : \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ *entre os espaços de Banach* $\mathcal{D}$ *e* $\mathcal{Y}$*.*

Seja G um grupo localmente compacto e $\mathcal{D}$ um espaço de Banach. Podem então ser definidos os espaços $L^1(G, \mathcal{D})$ e $L^2(G, \mathcal{D})$ como sendo o completamento de $C_c(G, \mathcal{D})$ para as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, respectivamente. É de salientar que quando $\mathcal{D}$ é um espaço de Hilbert, $L^2(G, \mathcal{D})$ é também um espaço de Hilbert associado ao produto interno definido em (1.3) para $C_c(G, \mathcal{D})$.

É também útil verificar que se tem uma versão do conhecido Teorema de Fubini para integrais com valores vectoriais.

1.2.14. Teorema - [21, 1.104 e 1.105] **-** *Seja* $\mathcal{D}$ *um espaço de Banach,* G *um grupo localmente compacto e* μ *uma medida de Haar de* G*. Se* $F \in C_c(G \times G, \mathcal{D})$ *então as funções*

$$s \mapsto \int_G F(s,t)\, d\mu(t) \qquad e \qquad t \mapsto \int_G F(s,t)\, d\mu(s)$$

pertencem a $C_c(G, \mathcal{D})$ *e tem-se que*

$$\int_G \int_G F(s,t)\, d\mu(t) d\mu(s) = \int_G \int_G F(s,t)\, d\mu(s) d\mu(t)\,.$$

1.2.2 Grupos mediáveis

Seja G um grupo localmente compacto. Um estado M de $L^\infty(G)$ diz-se uma *média invariante à esquerda* se

$$M(f) = M(f_s)\,, \qquad\qquad \forall f \in L^\infty(G),\; s \in G\,,$$

onde $f_s(t) := f(st)$, para $t \in G$.

1.2.15. Definição - *Um grupo localmente compacto G diz-se* mediável *se $L^\infty(G)$ possuir uma média invariante à esquerda.*

A classe dos grupos mediáveis é bastante ampla, incluindo várias classes de grupos importantes como os grupos: finitos, compactos, abelianos, solúveis e subexponenciais. Tem-se ainda que a classe dos grupos mediáveis é fechada para passagem a subgrupos fechados, quocientes e imagens de homomorfismos.

Um exemplo de um grupo não-mediável é o grupo (discreto) livre em dois geradores, F_2. Estes resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [20].

Capítulo 2

Produto cruzado C^*

Neste capítulo são estudadas acções de grupos localmente compactos em álgebras C^*. A estrutura destas acções é descrita pelo conceito de sistema dinâmico C^*, definido na secção 2.1. O estudo de representações que preservam a estrutura do sistema dinâmico, num sentido que será tornado preciso, leva naturalmente à introdução de uma nova álgebra C^*, o produto cruzado C^*, que codifica informação proveniente do sistema dinâmico. Na última secção do capítulo generaliza-se esta construção para o caso de acções de semigrupos em álgebras C^* e estabelece-se a correspondente noção de produto cruzado C^*.

2.1 Sistemas dinâmicos C^*

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* e $Aut(\mathcal{A})$ o seu grupo de automorfismos-*, munido da topologia da convergência pontual (topologia de Tychonoff).

2.1.1. Definição - *Um* sistema dinâmico C^* *é um terno* $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ *onde* G *é um grupo localmente compacto,* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra* C^* *e* $\alpha : G \longrightarrow Aut(\mathcal{A})$ *é um homomorfismo contínuo de* G *em* $Aut(\mathcal{A})$*.*

Com a topologia da convergência pontual em $Aut(A)$, a continuidade de α exigida na definição significa que, para cada $a \in \mathcal{A}$, a função de G para $\mathcal{A}$, $s \mapsto \alpha_s(a)$, é contínua. Para grupos discretos esta condição está sempre assegurada.

Considere-se uma álgebra C^* $\mathcal{A}$, um elemento unitário $u \in \mathcal{A}$ e o automorfismo ϕ de $\mathcal{A}$ definido por conjugação com u, isto é,

$$\phi(a) := uau^*.$$

Um exemplo de um sistema dinâmico C^* é $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \alpha)$, com o homomorfismo α definido para cada $n \in \mathbb{Z}$ por $\alpha_n := \phi^n$.

Seja G um grupo localmente compacto e X um espaço topológico localmente compacto Hausdorff. A cada acção contínua de G em X associe-se o homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow Aut(C_0(X))$ definido por

$$\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}x), \qquad f \in C_0(X),\ x \in X. \tag{2.1}$$

A proposição seguinte permite assegurar a continuidade de α, o que conduzirá a que $(C_0(X), G, \alpha)$ seja um exemplo de um sistema dinâmico C^*.

2.1.2. Proposição - *Seja G um grupo localmente compacto que age continuamente num espaço topológico localmente compacto Hausdorff X. Considere-se o homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow Aut(C_0(X))$ induzido pela acção de G em X, definido por (2.1). Tem-se que α é contínuo.*

Dem: Dada uma rede $\{s_i\}_{i\in I} \subset G$ convergente para $s \in G$ pretende-se provar que $\|\alpha_{s_i}(f) - \alpha_s(f)\|_\infty \longrightarrow 0$ para qualquer $f \in C_0(X)$. Se tal não acontecer existe então uma subrede, que por facilidade de notação se continua a designar por $\{s_i\}$, e pontos $x_i \in X$ tais que

$$|f(s_i^{-1}x_i) - f(s^{-1}x_i)| > \epsilon, \quad \forall i \in I\,,$$

para um certo $\epsilon > 0$. Tem-se então que, para cada $i \in I$,

$$|f(s_i^{-1}x_i)| \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{ou} \quad |f(s^{-1}x_i)| \geq \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Sendo $K = \{y \in X : |f(y)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ a condição acima é equivalente a

$$s_i^{-1}x_i \in K \quad \text{ou} \quad s^{-1}x_i \in K.$$

Seja U uma qualquer vizinhança de s cujo fecho $\overline{U}$ é compacto. É claro que $\{s_i\}$ está eventualmente em U e portanto, pela condição acima, $\{x_i\}$ está eventualmente em $\overline{U}K = \{hy : h \in U, y \in K\}$.
Note-se ainda que como $f \in C_0(X)$ o conjunto $K = \{y \in X : |f(y)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ é compacto. Consequentemente, $\overline{U}K$ é também compacto (Proposição[1.2.5]) e $\{x_i\}$ tem uma subrede convergente (que se continua a designar por $\{x_i\}$). Existe então $x_0 \in \overline{U}K$ tal que $x_i \longrightarrow x_0$.
Mas então $\{s_i^{-1}x_i\}$ e $\{s^{-1}x_i\}$ convergem para o mesmo limite. A continuidade de f garante então que eventualmente

$$|f(s_i^{-1}x_i) - f(s^{-1}x_i)| < \epsilon\,,$$

o que é uma contradição. □

As acções contínuas de G em X induzem assim sistemas dinâmicos C^* na álgebra $C_0(X)$. O recíproco também é verdadeiro.

2.1.3. Teorema - *Sejam G um grupo localmente compacto e X um espaço localmente compacto Hausdorff. Qualquer sistema dinâmico $(G, C_0(X), \alpha)$ é induzido por uma acção contínua de G em X.*

Dem: Começa-se por se verficar que, para cada $s \in G$, existe um homeomorfismo $h_s : X \longrightarrow X$ tal que

$$\alpha_s(f) = f \circ h_s \,, \qquad \forall f \in C_0(X)\,.$$

Seja $\Delta \subset C_0(X)'$ o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $C_0(X)$ munido da topologia fraca-*. Pelo Teorema [1.1.9] sabe-se que X e Δ são homeomorfos via avaliações pontuais $x \mapsto \mathrm{ev}_x$.

Para cada $s \in G$, o operador transposto de α_s é uma aplicação contínua e bijectiva $\alpha_s{}' : C_0(X)' \longrightarrow C_0(X)'$. É simples verificar que a sua restrição a Δ é um homeomorfismo $\alpha_s{}' : \Delta \longrightarrow \Delta$. O diagrama seguinte sugere como definir o homeomorfismo h_s :

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "\alpha_s{}'"] & \Delta \\
X \arrow[u, "\mathrm{ev}"] \arrow[r, dotted, "h_s"'] & X \arrow[u, "\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}$$

Define-se então $h_s := (\mathrm{ev})^{-1} \circ \alpha_s{}' \circ \mathrm{ev}$. Tem-se então que

$$\alpha_s(f)(x) = \mathrm{ev}_x \circ \alpha_s\,(f) = (\alpha_s{}' \circ \mathrm{ev}_x)(f) = \mathrm{ev}_{h_s(x)}(f) = f \circ h_s(x)$$

para qualquer $f \in C_0(X)$ e $x \in X$.

Como α é um homomorfismo pode ver-se que, para qualquer $f \in C_0(X)$, se tem $f = f \circ h_e$ e também $f \circ h_{st} = f \circ h_t \circ h_s$. Como $C_0(X)$ separa os pontos de X, sai então que $h_e = \mathrm{id}_x$ e também $h_{st} = h_t \circ h_s$, ou seja, obtem-se uma acção (à esquerda) de G em X dada por $sx := h_{s^{-1}}(x)$. Esta acção satisfaz ainda a igualdade

$$\alpha_s(f)(x) = f(s^{-1}x), \qquad f \in C_0(X),\ x \in X.$$

Resta então provar que esta acção é contínua, ou seja, se $(s_i, x_i) \longrightarrow (s, x)$ então $s_i x_i \longrightarrow sx$. Suponha-se então que $(s_i, x_i) \longrightarrow (s, x)$. Como o homomorfismo α é contínuo tem-se que

$$\alpha_{s_i^{-1}}(f) \longrightarrow \alpha_{s^{-1}}(f)\,, \qquad \forall f \in C_0(X)\,.$$

Para qualquer $f \in C_0(X)$ tem-se também que

$$\begin{aligned}
|f(s_i x_i) - f(sx)| &\leq |f(s_i x_i) - f(s x_i)| + |f(s x_i) - f(sx)| \\
&\leq \|\alpha_{s_i^{-1}}(f) - \alpha_{s^{-1}}(f)\|_\infty + |f(s x_i) - f(sx)| \\
&\longrightarrow 0\,.
\end{aligned}$$

Pode-se agora provar que $s_i x_i \longrightarrow sx$. Suponha-se que tal não acontecia, ou seja, que $s_i x_i$ está frequentemente fora de uma alguma vizinhança compacta U de sx. Como X é localmente compacto Hausdorff, existe uma função $f \in C_0(X)$ que vale 1 em sx e 0 em $X - U$. Logo $|f(s_i x_i) - f(sx)| = 1$ frequentemente, o que é uma contradição. $\square$

Os resultados anteriores contêm informação interessante sobre sistemas dinâmicos C^* em álgebras C^* comutativas: há uma correspondência bijectiva entre sistemas dinâmicos e acções contínuas de grupos no espaço dos funcionais lineares multiplicativos de cada álgebra comutativa.

O estudo de sistemas dinâmicos C^* arbitrários pode então ser encarado como uma generalização não-comutativa do estudo de sistemas dinâmicos topológicos, correspondentes a acções contínuas de grupos em espaços topológicos.

2.2 Representações covariantes de sistemas dinâmicos

Dado um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ é natural considerar representações de $\mathcal{A}$ que preservam a estrutura do sistema dinâmico. Mais especificamente, é natural considerar representações de $\mathcal{A}$ em espaços de Hilbert em que o sistema dinâmico é implementado por conjugação por operadores unitários. Não existe, na realidade, perda de generalidade em considerar apenas este tipo de representações como é sugerido na Proposição seguinte.

2.2.1. Proposição - *Seja H um espaço de Hilbert e $(B(H), G, \alpha)$ um sistema dinâmico na álgebra $B(H)$. Existe uma representação unitária de G, $s \mapsto U_s$, tal que $\alpha_s(T) = U_s T U_{s^{-1}}$ para todo o operador $T \in B(H)$.*

Dem: Como, para cada $s \in G$, α_s é um automorfismo de $B(H)$, existe um operador unitário U_s tal que $\alpha_s(T) = U_s T U_s^*$ (ver, por exemplo, [9, II.5.514]). Como α é um homomorfismo, tem-se também que $U : s \mapsto U_s$ é também um homomorfismo. Resta provar que $s \mapsto U_s$ é contínua.

Seja $\{s_i\}$ uma rede em G tal que $s_i \longrightarrow t$. Tem-se que $\alpha_{s_i^{-1}} \longrightarrow \alpha_{t^{-1}}$, ou seja, $U_{s_i^{-1}} T U_{s_i} \longrightarrow U_{t^{-1}} T U_t$ para todo o $T \in B(H)$. Para cada $\xi \in H$ de norma 1, considere-se o operador de projecção $P_\xi(\eta) := \langle \eta, \xi \rangle \xi$. Tomando $T \equiv U_t P_\xi U_{t^{-1}}$ tem-se que

$$\begin{aligned}
0 \quad &\longleftarrow \quad \|U_{s_i^{-1}} U_t P_\xi U_{t^{-1}} U_{s_i} \xi - P_\xi \xi\|^2 \\
&= \quad |\langle U_{t^{-1}} U_{s_i} \xi, \xi \rangle|^2 + 1 - 2|\langle U_{t^{-1}} U_{s_i} \xi, \xi \rangle|^2 \\
&= \quad 1 - |\langle U_{t^{-1}} U_{s_i} \xi, \xi \rangle|^2 \,,
\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\|U_{s_i} \xi - U_t \xi\|^2 = 2 - 2\, Re \langle U_{s_i} \xi, U_t \xi \rangle \longrightarrow 0 \,,$$

o que mostra que $s \mapsto U_s$ é contínua. $\square$

2.2.2. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^*. Uma* representação covariante *de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ num espaço de Hilbert H é um par (π, U), onde $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$ é uma representação de $\mathcal{A}$ e $U : G \longrightarrow B(H)$ é uma representação unitária de G, tal que, para qualquer $a \in \mathcal{A}$ e $s \in G$, é satisfeita a condição*

$$\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_s^* \,.$$

- *Uma representação covariante* (π, U) *diz-se* não-degenerada *se* π *for não-degenerada.*

- *Um subespaço* $V \subseteq H$ *diz-se* invariante para (π, U) *se* $\pi(a)(V) \subseteq V$ *e* $U_s(V) \subseteq V$ *para quaisquer* $a \in \mathcal{A}$ *e* $s \in G$*. Uma representação covariante diz-se* irredutível *se os únicos subespaços fechados invariantes são os triviais:* $\{0\}$ *e* H*.*

Considere-se $\mathcal{B}$ uma álgebra C^* com unidade, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ uma subálgebra C^* e $u \in \mathcal{B}$ um elemento unitário que age por conjugação em $\mathcal{A}$, isto é, para qualquer $a \in \mathcal{A}$ tem-se que

$$uau^* \in \mathcal{A}.$$

Definindo para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k(a) := u^k a(u^k)^*$, obtém-se um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \alpha)$.
Seja $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow B(H)$ uma representação não-degenerada da álgebra $\mathcal{B}$ num espaço de Hilbert H. As restrições de π a $\mathcal{A}$ e a $\{u^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ são, respectivamente, uma representação de $\mathcal{A}$ e uma representação unitária de $\mathbb{Z}$ em H que originam uma representação covariante de $(\mathcal{A}, \mathbb{Z}, \alpha)$ pois

$$\pi(\alpha_k(a)) = \pi(u^k a(u^k)^*) = \pi(u)^k \pi(a)(\pi(u)^k)^*$$

para qualquer $a \in \mathcal{A}$ e $k \in \mathbb{Z}$. O operador $\pi(u)$ é unitário pois, como π é não-degenerada, a imagem por π da unidade de $\mathcal{B}$ é o operador identidade em $B(H)$ (Proposição[1.1.18]).

Considere-se em seguida a álgebra C^* $C_0(G)$, onde G é um grupo localmente compacto. A acção de G em si próprio por multiplicação à esquerda induz um sistema dinâmico $(C_0(G), G, \alpha)$, onde

$$\alpha_s(f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Seja $\lambda : G \longrightarrow B(L^2(G))$ a representação unitária de G dada, para cada $\xi \in L^2(G)$ e $s, t \in G$, por $[\lambda_s \xi](t) := \xi(s^{-1}t)$, e $\pi : C_0(G) \longrightarrow B(L^2(G))$ a representação de $C_0(G)$ como operadores de multiplicação, isto é, para cada $f \in C_0(G)$, $\pi(f)$ é o operador de multiplicação por f em $L^2(G)$.
Uma representação covariante de $(C_0(G), G, \alpha)$ é (π, λ), pois para qualquer $f \in C_0(G)$, $\xi \in L^2(G)$ e $t \in G$ tem-se que

$$\begin{aligned}
[\lambda_s \pi(f) \lambda_s^* \ \xi](t) &= f(s^{-1}t)\, [\lambda_s^* \ \xi](s^{-1}t) \\
&= f(s^{-1}t)\xi(t) \\
&= [\pi(\alpha_s(f))\, \xi](t)\,.
\end{aligned}$$

A finalizar a secção note-se que $(\mathcal{A}, \{e\}, \mathrm{id})$ e $(\mathbb{C}, G, \mathrm{id})$ são sistemas dinâmicos C^* triviais. As representações covariantes destes sistemas correspondem, respectivamente, às representações de $\mathcal{A}$ e às representações unitárias de G. O estudo de sistemas dinâmicos e suas representações covariantes engloba assim o estudo de representações de álgebras C^* e de representações unitárias de grupos localmente compactos.

As representações covariantes de um dado sistema dinâmico estão associadas a representações de certas álgebras, os produtos cruzados C^*, que são definidos na próxima secção.

2.3 Produtos cruzados C^*. Definição.

Começa-se a secção com uma breve motivação para a definição de produto cruzado C^* para o caso de grupos discretos.

Seja H um espaço de Hilbert e $\mathcal{A} \subset B(H)$ uma subálgebra C^* de $B(H)$ que possui a identidade de $B(H)$. Seja G um grupo discreto e $U : G \longrightarrow B(H)$ uma representação unitária de G em $B(H)$ que age por conjugação em $\mathcal{A}$, ou seja,

$$U_s a U_s^* \in \mathcal{A} \,, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall s \in G.$$

Tem-se um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ onde $\alpha_s(a) = U_s a U_s^*$. Seja $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$ a subálgebra C^* de $B(H)$ gerada por $\mathcal{A}$ e $U_G := \{U_s : s \in G\}$. Este tipo de álgebras são designadas por *álgebras geradas por sistemas dinâmicos*.

Seja $\mathcal{D}$ o conjunto das somas finitas da forma $\sum a_s U_s$, onde $a_s \in \mathcal{A}$ e $s \in G$, ou equivalentemente,

$$\mathcal{D} := \Big\{ \sum_{s \in G} a_s U_s : a \in C_c(G, \mathcal{A}) \Big\} \,,$$

onde cada função $a \in C_c(G, \mathcal{A})$ é definida por $s \mapsto a_s \in \mathcal{A}$. Pode verificar-se que $\mathcal{D}$ é um subespaço vectorial de $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$.

2.3.1. Proposição - *O subespaço $\mathcal{D}$ é denso em* $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$.

Dem : Note-se primeiramente que, como $\mathcal{A}$ tem unidade, $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$ é gerada (como álgebra) pelos elementos de $S_L \cup S_R$, onde $S_L := \{aU_s : a \in \mathcal{A}, s \in G\}$ e $S_R := \{U_s a : a \in \mathcal{A}, s \in G\}$. Pode ainda ver-se que $S_R \subseteq S_L$ pois

$$U_s a = U_s a U_s^* U_s = \alpha_s(a) U_s \in S_L \,, \qquad \forall a \in \mathcal{A}, \ \forall s \in G \,,$$

o que mostra que $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$ é gerada pelos elementos de S_L. Basta agora notar que o produto e a involução de elementos de S_L está ainda em S_L:

$$(aU_t)(bU_s) = aU_t b U_t^* U_t U_s = a\alpha_t(b)\, U_{ts} \in S_L \,,$$

$$(aU_s)^* = U_s^* a^* = U_s^* a^* U_s U_s^* = \alpha_{s^{-1}}(a^*) U_{s^{-1}} \in S_L \,. \, \square$$

A demonstração anterior sugere ainda que $\mathcal{D}$ é uma subálgebra-* de $B(H)$. Para verificar-se este facto pode calcular-se explicitamente o produto e a involução de elementos em $\mathcal{D}$, procedendo como na demonstração:

- $\left(\sum_t a_t U_t\right)\left(\sum_s b_s U_s\right) = \sum_{t,s} a_t \alpha_t(b_s) U_{ts} = \sum_s \left(\sum_t a_t \alpha_t(b_{t^{-1}s})\right) U_s \,,$
- $\left(\sum_s a_s U_s\right)^* = \sum_s (a_s U_s)^* = \sum_s \alpha_{s^{-1}}(a_s^*) U_{s^{-1}} = \sum_s \alpha_s(a_{s^{-1}}^*) U_s \,.$

Seja $\Phi : C_c(G, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{D}$ a transformação linear sobrejectiva definida por

$$\Phi(a) := \sum_s a_s U_s$$

A partir de Φ e das fórmulas para o produto e involução acima, pode dar-se uma estrutura de álgebra-* a $C_c(G, \mathcal{A})$:

Sejam $a, b \in C_c(G, \mathcal{A})$, define-se o produto $a * b$ e involução a^* por

- $(a * b)_s := \sum_t a_t \alpha_t(b_{t^{-1}s}) \,, \qquad s \in G \,,$
- $(a^*)_s := \alpha_s(a_{s^{-1}}^*) \,, \qquad s \in G \,.$

Note-se ainda que a partir de uma representação não-degenerada π de $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$ (ou mais geralmente, de $C_c(G, \mathcal{A})$) se pode obter uma representação covariante de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$. Note-se para este efeito que a restrição de π aos elementos da forma $a_e \in \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ define uma representação de $\mathcal{A}$. A restrição de π ao elementos U_s, com $s \in G$, define uma representação unitária de G. As representações obtidas formam uma representação covariante já que

$$\pi(U_s)\pi(a_e)\pi(U_s)^* = \pi(U_s a_e U_{s^{-1}}) = \pi(\alpha_s(a_e)) \,.$$

O recíproco, no entanto, pode já não ser possível, ou seja, uma representação covariante não-degenerada de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ não induz necessariamente uma representação de $\mathcal{D}$. Isto deve-se ao facto de poderem existir "demasiadas" relações álgébricas entre os elementos de $\mathcal{A}$ e os operadores unitários U_s, com $s \in G$, não permitindo que a representação correspondente à representação covariante esteja bem definida. Existem no entanto álgebras $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$, os produtos cruzados C^*, em que estas relações são minimais, permitindo que exista uma correspondência entre representações covariantes e representações do produto cruzado.

O estudo da álgebra $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$ (a álgebra gerada pelo sistema dinâmico) levou naturalmente à introdução de uma estrutura de álgebra-* em $C_c(G, \mathcal{A})$, através de um produto de convolução e uma involução apropriadas. Viu-se ainda que $\Phi(C_c(G, \mathcal{A})) = \mathcal{D}$ é densa em $\mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\}$. A construção de produtos cruzados C^*, a partir de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, é bastante semelhante: consiste, como veremos, na atribuição de uma estrutura de álgebra-* a $C_c(G, \mathcal{A})$ e no seu completamento para uma norma C^* apropriada.

Prossegue-se agora em direcção à definição de produto cruzado C^* . A construção que se apresenta não exige que as álgebras C^* tenham unidade ou que os grupos sejam discretos.

2.3.2. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico. Define-se um produto de convolução e uma involução em $C_c(G,\mathcal{A})$ através de*

- $(f * g)(s) := \displaystyle\int_G f(t)\, \alpha_t(g(t^{-1}s))\, d\mu(t)\,, \qquad s \in G\,,$
- $f^*(s) := \Delta(s^{-1})\, \alpha_s(f(s^{-1})^*)\,, \qquad s \in G\,.$

2.3.3. Lema - *Seja $h \in C_c(G,\mathcal{A})$. A função $(s,t) \longmapsto \alpha_t(h(t^{-1}s))$ é contínua $G \times G \longrightarrow \mathcal{A}$.*

Dem: Suponha-se que $(s_i, t_i) \longrightarrow (s,t)$. Pela desigualdade triangular é suficiente mostrar que

$$\begin{cases} \|\alpha_{t_i}(h(t_i^{-1}s_i)) - \alpha_{t_i}(h(t^{-1}s))\| \longrightarrow 0 \\ \|\alpha_{t_i}(h(t^{-1}s)) - \alpha_t(h(t^{-1}s))\| \longrightarrow 0 \end{cases}$$

A segunda condição segue directamente da continuidade de α.
A primeira segue de

$$\begin{aligned} \|\alpha_{t_i}(h(t_i^{-1}s_i)) - \alpha_{t_i}(h(t^{-1}s))\| &= \|\alpha_{t_i}\big(h(t_i^{-1}s_i) - h(t^{-1}s)\big)\| \\ &= \|h(t_i^{-1}s_i) - h(t^{-1}s)\| \longrightarrow 0\,. \quad \square \end{aligned}$$

2.3.4. Proposição - *As operações definidas em [2.3.2] estão bem definidas e induzem uma estrutura de álgebra-* em $C_c(G,\mathcal{A})$.*

Dem: Sejam $f, g \in C_c(G,\mathcal{A})$.

- Começa-se por se verificar que a função f^* está de facto em $C_c(G,\mathcal{A})$. Como $f^*(s) = \Delta(s^{-1})\, \alpha_s(f(s^{-1})^*)$ é imediato que o suporte de f^* é o inverso do suporte de f, e portanto f^* tem suporte compacto.
  Segue do Lema[2.3.3] que, para $h \in C_c(G,\mathcal{A})$, a função $s \longmapsto \alpha_s(h(s^{-1}))$ é contínua. Usando a continuidade da função modular Δ e tomando $h(s) := f(s)^*$, sai que f^* é contínua.

- Prova-se agora que $f * g$ está também em $C_c(G,\mathcal{A})$. Sejam K, $\widetilde{K}$ os suportes de f e g respectivamente. Uma verificação simples mostra que a função $(s,t) \longmapsto f(t)\alpha_t(g(t^{-1}s))$ tem suporte contido no compacto $K \cdot \widetilde{K} \times K$. Usando o Lema[2.3.3] vemos que $(s,t) \longmapsto f(t)\alpha_t(g(t^{-1}s))$ está em $C_c(G \times G, \mathcal{A})$. O resultado sai agora directamente do Teorema[1.2.14].

- Mostra-se agora que o produto é associativo. Este facto sai da versão vectorial do Teorema de Fubini (Teorema[1.2.14]) e do Teorema[1.2.13]:

$$
\begin{aligned}
f*(g*h)(s) &= \int_G f(t)\,\alpha_t((g*h)(t^{-1}s))\;d\mu(t)\\
&= \int_G f(t)\,\alpha_t\left(\int_G g(r)\,\alpha_r(h(r^{-1}t^{-1}s))\;d\mu(r)\right)\;d\mu(t)\\
&= \int_G f(t)\,\alpha_t\left(\int_G g(t^{-1}r)\,\alpha_{t^{-1}r}(h(r^{-1}s))\;d\mu(r)\right)\;d\mu(t)\\
&= \int_G\int_G f(t)\,\alpha_t\Big(g(t^{-1}r)\,\alpha_{t^{-1}r}(h(r^{-1}s))\Big)\;d\mu(r)\;d\mu(t)\\
&= \int_G\int_G f(t)\,\alpha_t(g(t^{-1}r))\,\alpha_r(h(r^{-1}s))\;d\mu(r)\;d\mu(t)\\
&= \int_G\int_G f(t)\,\alpha_t(g(t^{-1}r))\,\alpha_r(h(r^{-1}s))\;d\mu(t)\;d\mu(r)\\
&= \int_G (f*g)(r)\,\alpha_r(h(r^{-1}s))\;d\mu(r)\\
&= (f*g)*h\;(s)\,.
\end{aligned}
$$

- Mostra-se agora que $f^*(s) := \Delta(s^{-1})\,\alpha_s(f(s^{-1})^*)$ define de facto uma involução em $C_c(G,\mathcal{A})$. Tem-se que

$$
\begin{aligned}
(f^* * g^*)(s) &= \int_G f^*(t)\,\alpha_t(g^*(t^{-1}s))\;d\mu(t)\\
&= \int_G \Delta(t^{-1})\,\alpha_t(f(t^{-1})^*)\,\Delta(s^{-1}t)\,\alpha_{tt^{-1}s}(g(s^{-1}t)^*)\;d\mu(t)\\
&= \int_G \Delta(s^{-1})\,\alpha_{st}(f(t^{-1}s^{-1})^*)\,\alpha_s(g(t)^*)\;d\mu(t)\\
&= \Delta(s^{-1})\,\alpha_s\left(\int_G \alpha_t(f(t^{-1}s^{-1}))^* g(t)^*\;d\mu(t)\right)\\
&= \Delta(s^{-1})\,\alpha_s\left(\int_G g(t)\,\alpha_t(f(t^{-1}s^{-1}))\;d\mu(t)\right)^*\\
&= \Delta(s^{-1})\,\alpha_s((g*f)(s^{-1}))^*\\
&= (g*f)^*(s)\,.
\end{aligned}
$$

  As restantes propriedades da involução saem directamente.

- A distributividade do produto em relação à soma e as propriedades sobre multiplicação por escalares complexos saem directamente, usando as propriedades da integração em espaços de Banach (Teorema[1.2.13]) e o facto de α_s ser um automorfismo para cada $s \in G$. $\square$

2.3.5. Proposição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico. A função*

$$\|f\|_1 := \int_G \|f(s)\|\;d\mu(s)$$

define um norma em $C_c(G,\mathcal{A})$. Com esta norma, $C_c(G,\mathcal{A})$ tem uma estrutura de álgebra- normada. Em particular, é satisfeita a igualdade*

$$\|f^*\|_1 = \|f\|_1 \qquad \forall f \in C_c(G,\mathcal{A}). \tag{2.2}$$

Dem: O facto de $\|\cdot\|_1$ ser uma norma sai directamente das propriedades de $\|\cdot\|$ em $\mathcal{A}$. Mostra-se agora que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_G \|(f*g)(s)\| \, d\mu(s) \\
&= \int_G \Big\| \int_G f(t)\, \alpha_t(g(t^{-1}s)) \, d\mu(t) \Big\| \, d\mu(s) \\
&\leq \int_G \int_G \|f(t)\| \|\alpha_t(g(t^{-1}s))\| \, d\mu(t) \, d\mu(s) \\
&= \int_G \int_G \|f(t)\| \|g(t^{-1}s)\| \, d\mu(t) \, d\mu(s) \\
&= \int_G \|f(t)\| \Big(\int_G \|g(t^{-1}s)\| \, d\mu(s) \Big) \, d\mu(t) \\
&= \int_G \|f(t)\| \Big(\int_G \|g(s)\| \, d\mu(s) \Big) \, d\mu(t) \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1 \,.
\end{aligned}$$

Prova-se agora a última igualdade no enunciado da proposição:

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_1 &= \int_G \|f^*(s)\| \, d\mu(s) \\
&= \int_G \|\Delta(s^{-1})\, \alpha_s(f(s^{-1})^*)\| \, d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1}) \|f(s^{-1})\| \, d\mu(s) \\
&= \int_G \|f(s)\| \, d\mu(s) \\
&= \|f\|_1 \,,
\end{aligned}$$

onde o penúltimo passo provém do Teorema[1.2.12]. □

Pode agora definir-se o produto cruzado C^* de um sistema dinâmico C^*.

2.3.6. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^*.*
O produto cruzado C^* *de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ é definido como sendo a álgebra C^* envolvente de $C_c(G,\mathcal{A})$, e é denotado por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.*

2.4 Representações do produto cruzado C^*

Pelo Teorema[1.1.32] existe uma correspondência biunívoca entre representações do produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e representações contínuas de $C_c(G, \mathcal{A})$. Mais adiante nesta secção irá provar-se que existe também uma correspondência biunívoca entre representações contínuas não-degeneradas de $C_c(G, \mathcal{A})$ e representações covariantes não-degeneradas de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, e que esta correspondência preserva a irredutibilidade.

2.4.1. Teorema - *$C_c(G, \mathcal{A})$ possui uma aproximação da unidade à esquerda.*

Dem: Seja $\mathcal{V}$ o conjunto das vizinhanças de e, parcialmente ordenado com a inclusão inversa. Para cada $V \in \mathcal{V}$ tome-se uma função $\phi_V \in C_c(G)$ com suporte em V, positiva e com integral 1. Seja $\{e_i\}_{i\in I}$ uma aproximação da unidade em $\mathcal{A}$ (Teorema[1.1.4]). Define-se $f_{i,V} \in C_c(G, \mathcal{A})$ por

$$f_{i,V}(s) := \phi_V(s)e_i\,, \qquad\qquad s \in G\,, \tag{2.3}$$

e mostra-se agora que $\{f_{i,V}\}_{(i,V)\in\, I\times\mathcal{V}}$ é uma aproximação da unidade à esquerda para $C_c(G, \mathcal{A})$.

Seja $g \in C_c(G, \mathcal{A})$ e K o seu suporte. Para cada $s \in G$ tem-se que

$$\|f_{i,V} * g\,(s) - g(s)\| \leq \|f_{i,V} * g\,(s) - e_i g(s)\| + \|e_i g(s) - g(s)\|\,.$$

Pretende-se provar que ambas as parcelas convergem uniformemente (independentemente de s) para 0. Considere-se então a primeira parcela:

$$\begin{aligned}\|f_{i,V} * g\,(s) - e_i g(s)\| &= \|\int_G f_{i,V}(t)\,\alpha_t(g(t^{-1}s)) - \phi_V(t)e_i g(s)\,d\mu(t)\| \\ &\leq \int_G \|f_{i,V}(t)\|\|\alpha_t(g(t^{-1}s)) - g(s)\|\,d\mu(t)\,.\end{aligned}$$

Afirmamos que, dado $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $W \in \mathcal{V}$ tal que se $(t,s) \in W \times WK$ então $\|\alpha_t(g(t^{-1}s)) - g(s)\| < \epsilon$. Suponha-se, por absurdo, que tal não acontece, ou seja, que existem $\epsilon_0 > 0$ e redes $\{t_V\} \subset V$ e $\{s_V\} \subset VK$ tais que $\|\alpha_{t_V}(g(t_V^{-1}s_V)) - g(s_V)\| \geq \epsilon_0$. Note-se que $t_V \longrightarrow e$ e que $\{s_V\}$ tem uma subrede convergente (que continuamos a designar por $\{s_V\}$). Mas então $\{\alpha_{t_V}(g(t_V^{-1}s_V))\}$ e $\{g(s_V)\}$ convergem para o mesmo limite, e portanto eventualmente $\|\alpha_{t_V}(g(t_V^{-1}s_V)) - g(s_V)\| < \epsilon_0$, o que é uma contradição.

Dado $\epsilon > 0$ pode então escolher-se $W \in \mathcal{V}$ tal que para $V \subseteq W$

$$\int_G \|f_{i,V}(t)\|\|\alpha_t(g(t^{-1}s)) - g(s)\|\,d\mu(t) < \epsilon \int_G \|f_{i,V}(t)\|\,d\mu(t) \leq \epsilon\,,$$

ou seja, $\|f_{i,V} * g\,(s) - e_i g(s)\|$ converge uniformemente para 0. Mostra-se agora que isto também acontece com $\|e_i g(s) - g(s)\|$: suponha-se então (por absurdo) que existe $\epsilon_0 > 0$, uma subrede de $\{e_i\}$ (que se continua a denotar por $\{e_i\}$) e uma rede $\{s_i\} \subset K$ tal que $\|e_i g(s_i) - g(s_i)\| > \epsilon_0$. Tomando uma subrede convergente, que ainda designamos por $\{s_i\}$, e sendo s o seu limite, pode ver-se que

$$\begin{aligned}\|e_i g(s_i) - g(s_i)\| &\leq \|e_i g(s_i) - e_i g(s)\| + \|e_i g(s) - g(s)\| + \|g(s) - g(s_i)\| \\ &\leq \|g(s_i) - g(s)\| + \|e_i g(s) - g(s)\| + \|g(s) - g(s_i)\| \\ &\longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo $\|e_i g(s) - g(s)\|$ converge uniformemente para 0.

Seja $K_{V,g}$ o suporte de $f_{i,V} * g - g$. Pode agora verificar-se que

$$\|f_{i,V} * g - g\|_1 = \int_G \|f_{i,V} * g\,(s) - g(s)\|\, d\mu(s)$$
$$\leq \mu(K_{V,g}) \max_{s\in G} \|f_{i,V} * g\,(s) - g(s)\| \longrightarrow 0\,. \quad \square$$

2.4.2. Definição - *Seja (π, U) uma representação covariante de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ num espaço de Hilbert H.*
A função $\pi \rtimes U : C_c(G, \mathcal{A}) \longrightarrow B(H)$ definida por

$$\pi \rtimes U\,(f) := \int_G \pi(f(s)) U_s\, d\mu(s) \tag{2.4}$$

é designada por forma integral *de (π, U).*

As formas integrais de uma representação covariante de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ são a principal ferramenta para se lidar com representações de $C_c(G, \mathcal{A})$ e de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

2.4.3. Teorema - *Seja (π, U) uma representação covariante de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ num espaço de Hilbert H.*
A forma integral $\pi \rtimes U$ define uma representação contínua de $C_c(G, \mathcal{A})$ em H. Tem-se ainda que $\pi \rtimes U$ é não-degenerada se (π, U) for não-degenerada.

Dem:

- A linearidade de $\pi \rtimes U$ é óbvia.
- Sejam $f, g \in C_c(G, \mathcal{A})$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\pi \rtimes U\,(f * g) &= \int_G \pi(f * g\,(s)) U_s\, d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G \pi(f(t)) \pi(\alpha_t(g(t^{-1}s))) U_s\, d\mu(t)\, d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G \pi(f(t))\, U_t\, \pi(g(t^{-1}s)) U_{t^{-1}} U_s\, d\mu(s)\, d\mu(t) \\ &= \int_G \int_G \pi(f(t))\, U_t\, \pi(g(s)) U_s\, d\mu(s)\, d\mu(t) \\ &= [\pi \rtimes U\,(f)]\,[\pi \rtimes U\,(g)]\,.\end{aligned}$$

- Seja $f \in C_c(G, \mathcal{A})$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U\ (f^*) &= \int_G \pi(f^*(s)) U_s \, d\mu(s) \\
&= \int_G \pi(\Delta(s^{-1})\alpha_s(f(s^{-1})^*)) U_s \, d\mu(s) \\
&= \int_G \Delta(s^{-1})\, U_s\, \pi(f(s^{-1})^*)\, U_s^* U_s \, d\mu(s) \\
&= \Big(\int_G \Delta(s^{-1}) \pi(f(s^{-1}))\, U_{s^{-1}} \, d\mu(s) \Big)^* \\
&= \Big(\int_G \pi(f(s))\, U_s \, d\mu(s) \Big)^* \\
&= [\pi \rtimes U\ (f)]^* .
\end{aligned}$$

- Seja $f \in C_c(G, \mathcal{A})$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\pi \rtimes U\ (f)\| &= \| \int_G \pi(f(s)) U_s \, d\mu(s) \| \\
&\leq \int_G \|\pi(f(s)) U_s\| \, d\mu(s) \\
&\leq \int_G \|f(s)\| \, d\mu(s) \\
&= \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Pode então concluir-se que $\pi \rtimes U$ é uma representação contínua de $C_c(G, \mathcal{A})$. Mostra-se agora que esta representação é não-degenerada se (π, U) for não degenerada, isto é, se π for não-degenerada.

Suponha-se então que π é não-degenerada.

Seja $\{f_{i,V}\}$ uma aproximação da unidade à esquerda de $C_c(G, \mathcal{A})$, definida como em (2.3) na demonstração do Teorema[2.4.1]. Recorde-se que $f_{i,V}$ é definida por

$$f_{i,V}(s) = \phi_V(s) e_i \,, \qquad s \in G \,,$$

onde $\{e_i\}$ é uma aproximação da unidade em $\mathcal{A}$ e $\phi_V \in C_c(G)$ é uma função positiva, com integral 1 e com suporte em V (vizinhança de e).

Pretende-se mostrar que $\pi \rtimes U\ (f_{i,V})$ converge pontualmente para a identidade em $B(H)$. Note-se primeiramente que os operadores $\pi(e_i)$ e $\int_G \phi_V(s) U_s \, d\mu(s)$ convergem pontualmente para a identidade:

- $\pi(e_i)$ converge pontualmente para a identidade pois π é não-degenerada (Proposição[1.1.18]).
- Seja $\xi \in H$ e $\epsilon > 0$. Seja V_0 uma vizinhança compacta de e tal que $\|U_s \xi - \xi\| < \epsilon$ para todo o $s \in V_0$. Tem-se que, para toda a vizinhança V

de e tal que $V \subset V_0$,

$$\begin{aligned}
\| \int_G \phi_V(s) U_s \, d\mu(s) \, \xi - \xi \| &= \| \int_G \phi_V(s)(U_s \, \xi - \xi) \, d\mu(s) \| \\
&\leq \int_G \| \phi_V(s)(U_s \, \xi - \xi) \| \, d\mu(s) \\
&\leq \int_G \phi_V(s) \, \epsilon \, d\mu(s) \\
&= \epsilon \, ,
\end{aligned}$$

e portanto o operador $\int_G \phi_V(s) U_s \; d\mu(s)$ converge pontualmente para o operador identidade em $B(H)$.

Note-se agora que, para qualquer $\xi \in H$,

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U(f_{i,V}) \, \xi &= \int_G \pi(f_{i,V}(s)) U_s \; d\mu(s) \, \xi \\
&= \int_G \pi(e_i) \, \phi_V(s) \, U_s \; d\mu(s) \; \xi \\
&= \pi(e_i) \int_G \phi_V(s) \, U_s \; d\mu(s) \; \xi \\
&\longrightarrow \xi \, .
\end{aligned}$$

Pode então concluir-se, pela Proposição[1.1.18], que $\pi \rtimes U$ é não-degenerada.
□

As representações covariantes não-degeneradas de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ induzem assim representações contínuas não-degeneradas de $C_c(G, \mathcal{A})$. O recíproco também é verdadeiro.

2.4.4. Teorema - *Toda a representação contínua não-degenerada $\widetilde{\pi}$ de $C_c(G, \mathcal{A})$ é induzida por uma representação covariante não-degenerada (π, U) de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.*

Dem: Seja $\widetilde{\pi}$ uma representação contínua não-degenerada de $C_c(G, \mathcal{A})$ num espaço de Hilbert H e f_i uma aproximação da unidade à esquerda de $C_c(G, \mathcal{A})$. Para cada $a \in \mathcal{A}$, define-se a função $h_{i,a} \in C_c(G, \mathcal{A})$ por $h_{i,a}(s) := f_i(s) \alpha_s(a)$. Tem-se, para cada $g \in C_c(G, \mathcal{A})$ e $\xi \in H$, que

$$\widetilde{\pi}(h_{i,a}) \widetilde{\pi}(g) \, \xi = \widetilde{\pi}(f_i * (ag)) \, \xi \longrightarrow \widetilde{\pi}(ag) \, \xi \, ,$$

onde $ag \in C_c(G, \mathcal{A})$ é a função definida por $(ag)(s) := ag(s)$. Como a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada, a expressão anterior garante que $\widetilde{\pi}(h_{i,a})$ converge pontualmente para um operador $\pi(a) : H \longrightarrow H$. Este operador é linear e limitado pois

$$\| \pi(a) \, \xi \| = \lim \| \widetilde{\pi}(h_{i,a}) \, \xi \| \leq \lim \| h_{i,a} \|_1 \| \xi \| \leq \| a \| \| \xi \|, \qquad \forall_{\xi \in H} \, .$$

Pode agora ver-se que π é uma representação não-degenerada de $\mathcal{A}$ em H:

- Para quaisquer $g \in C_c(G, A)$ e $\xi \in H$ tem-se

$$\pi(a+b)\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}((a+b)g)\,\xi = \widetilde{\pi}(ag)\,\xi + \widetilde{\pi}(bg)\,\xi = [\pi(a)+\pi(b)]\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,$$

o que prova que $\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$ pois a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada.

- Do mesmo modo,

$$\pi(ab)\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}(abg)\,\xi = \pi(a)\widetilde{\pi}(bg)\,\xi = \pi(a)\pi(b)\widetilde{\pi}(g)\,\xi$$

para quaisquer $g \in C_c(G, A)$ e $\xi \in H$, o que prova que $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ pois a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada.

- Sejam $f, g \in C_c(G, \mathcal{A})$ e $a \in \mathcal{A}$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(a^*g)^* * f\ (t) &= \int_G (a^*g)^*(s)\,\alpha_s(f(s^{-1}t))\;d\mu(s)\\
&= \int_G \Delta(s^{-1})\,\alpha_s(g(s^{-1})^*a)\,\alpha_s(f(s^{-1}t))\;d\mu(s)\\
&= \int_G g^*(s)\,\alpha_s(af(s^{-1}t))\;d\mu(s)\\
&= g^* * (af)\ (t)\,.
\end{aligned}$$

Usando novamente o facto de $\widetilde{\pi}$ ser não-degenerada e a expressão anterior, pode concluir-se que $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, pois

$$\begin{aligned}
\langle \pi(a^*)\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,\ \widetilde{\pi}(f)\,\eta\rangle &= \langle \widetilde{\pi}(a^*g)\,\xi\,,\ \widetilde{\pi}(f)\,\eta\rangle\\
&= \langle \xi\,,\ \widetilde{\pi}((a^*g)^*)\,\widetilde{\pi}(f)\,\eta\rangle\\
&= \langle \xi\,,\ \widetilde{\pi}(g^* * (af))\,\eta\rangle\\
&= \langle \widetilde{\pi}(g)\xi\,,\ \widetilde{\pi}(af)\,\eta\rangle\\
&= \langle \widetilde{\pi}(g)\xi\,,\ \pi(a)\,\widetilde{\pi}(f)\,\eta\rangle\,.
\end{aligned}$$

- Seja e_i uma aproximação da unidade em $\mathcal{A}$. Usando o facto de que, para qualquer $g \in C_c(G, \mathcal{A})$, $e_i g \longrightarrow g$ na norma $\|\cdot\|_1$, verifica-se que

$$\pi(e_i)\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}(e_i g)\,\xi \longrightarrow \widetilde{\pi}(g)\,\xi\,.$$

Como $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada, pode concluir-se que também π é não-degenerada.

Para cada $r \in G$ e $g \in C_c(G, \mathcal{A})$ define-se a função $\widetilde{\alpha}_r(g) \in C_c(G, \mathcal{A})$ por $\widetilde{\alpha}_r(g)(s) := \alpha_r(g(r^{-1}s))$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_r(f_i) * g\ (t) &= \int_G \alpha_r(f_i(r^{-1}s))\,\alpha_s(g(s^{-1}t))\;d\mu(s)\\
&= \int_G \alpha_r(f_i(s))\,\alpha_{rs}(g(s^{-1}r^{-1}t))\;d\mu(s)\\
&= \alpha_r(f_i * g\ (r^{-1}t))\\
&= \widetilde{\alpha}_r(f_i * g)(t)\,.
\end{aligned}$$

Como f_i é uma aproximação da unidade à esquerda pode observar-se que, para qualquer $g \in C_c(G, \mathcal{A})$ e $\xi \in H$,

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_r(f_i))\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_r(f_i * g))\,\xi \longrightarrow \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_r(g))\,\xi\,.$$

Como a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada, a expressão anterior garante que $\widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_r(f_i))$ converge pontualmente para um operador $U_r : H \longrightarrow H$. Este operador é linear e limitado pois

$$\|U_r\,\xi\| = \lim \|\widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_r(f_i))\,\xi\| \leq \lim \|\widetilde{\alpha}_r(f_i)\|_1 \|\xi\| \leq \|\xi\|, \qquad \forall_{\xi \in H}\,.$$

Pode agora ver-se que U é uma representação unitária de G em H:

- Para quaisquer $g \in C_c(G, A)$ e $\xi \in H$ tem-se

  $$U_{st}\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_{st}(g))\,\xi = \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_s(\widetilde{\alpha}_t(g)))\,\xi = U_s\,\widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_t(g))\,\xi = U_s U_t\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,$$

  o que prova que $U_{st} = U_s U_t$ pois a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada.

- Tem-se que $U_e = I$. Logo, cada U_s é invertível e o seu inverso é $U_{s^{-1}}$. Como $\|U_s\| \leq 1$ e $\|U_{s^{-1}}\| \leq 1$ tem-se que U_s e U_s^{-1} são ambos contracções e portanto U_s é um operador unitário.

- Considere-se uma rede $\{s_i\}$ tal que $s_i \longrightarrow s$. Tem-se que

  $$U_{s_i}\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi = \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_{s_i}(g))\,\xi \longrightarrow \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_s(g))\,\xi = U_s\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,$$

  o que prova que U é contínua pois a representação $\widetilde{\pi}$ é não-degenerada.

Vai agora provar-se que o par (π, U) é uma representação covariante de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ e que $\widetilde{\pi} = \pi \rtimes U$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
U_s \pi(a) U_{s^{-1}}\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi &= U_s \pi(a)\,\widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_{s^{-1}}(g))\,\xi \\
&= U_s\,\widetilde{\pi}(a\widetilde{\alpha}_{s^{-1}}(g))\,\xi \\
&= \widetilde{\pi}(\widetilde{\alpha}_s(a\widetilde{\alpha}_{s^{-1}}(g)))\,\xi \\
&= \widetilde{\pi}(\alpha_s(a)g)\,\xi \\
&= \pi(\alpha_s(a))\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,
\end{aligned}$$

o que prova que $U_s \pi(a) U_s^* = \pi(\alpha_s(a))$, ou seja (π, U) é uma representação covariante de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$. Verifica-se também que

$$\begin{aligned}
\pi \rtimes U\;(f)\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi &= \Big(\int_G \pi(f(s))U_s\,d\mu(s)\Big)\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi \\
&= \int_G \pi(f(s))U_s\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,d\mu(s) \\
&= \int_G \widetilde{\pi}(f(s)\widetilde{\alpha}_s(g))\,\xi\,d\mu(s) \\
&= \widetilde{\pi}\Big(\int_G f(s)\widetilde{\alpha}_s(g)\,d\mu(s)\Big)\,\xi \\
&= \widetilde{\pi}(f * g)\,\xi \\
&= \widetilde{\pi}(f)\,\widetilde{\pi}(g)\,\xi\,,
\end{aligned}$$

o que prova que $\widetilde{\pi} = \pi \rtimes U$. $\square$

Dado um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ existe então uma correspondência biunívoca entre representações contínuas não-degeneradas de $C_c(G, \mathcal{A})$ e representações covariantes não-degeneradas de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$. Mostra-se agora que esta correspondência preserva a irredutibilidade.

2.4.5. Teorema - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sitema dinâmico e (π, U) uma sua representação covariante não-degenerada num espaço de Hilbert H. Tem-se que (π, U) é irredutível se e só se $\pi \rtimes U$ é irredutível.*

Dem: Basta mostrar que um subespaço fechado $V \subseteq H$ é invariante para (π, U) se e só se é invariante para $\pi \rtimes U$.

- Suponha-se que V é um subespaço fechado invariante para (π, U). Para quaisquer $\xi \in V$, $\eta \in V^{\perp}$ e $f \in C_c(G, \mathcal{A})$ tem-se que

$$\langle \pi \rtimes U(f)\, \xi, \eta \rangle = \int_G \langle \pi(f(s)) U_s\, \xi, \eta \rangle \, d\mu(s) = 0\,,$$

  pois $\pi(f(s))U_s\, \xi \in V$ para todo o $s \in G$, o que mostra que V é invariante para $\pi \rtimes U$.

- Suponha-se que V é um subespaço fechado invariante para $\pi \rtimes U$. Seja f_i uma aproximação da unidade à esquerda de $C_c(G, \mathcal{A})$. Como $\pi \rtimes U$ é não-degenerada, $\pi \rtimes U(f_i)$ converge pontualmente para o operador identidade em H. Tem-se que, para quaisquer $\xi \in V$, $\eta \in V^{\perp}$ e $s \in G$,

$$\begin{aligned}
\langle U_s\, \xi, \eta \rangle &= \lim \langle U_s [\pi \rtimes U(f_i)]\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \int_G U_s \pi(f_i(t)) U_t \, d\mu(t)\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \int_G \pi\big(\alpha_s(f_i(t))\big) U_{st} \, d\mu(t)\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \int_G \pi\big(\alpha_s(f_i(s^{-1}t))\big) U_t \, d\mu(t)\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \pi \rtimes U(\tilde{\alpha_s}(f_i))\, \xi, \eta \rangle \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

  onde $\tilde{\alpha_s}(f)$ é a função em $C_c(G, \mathcal{A})$ definida por $\tilde{\alpha_s}(f)(t) := \alpha_s(f(s^{-1}t))$. Portanto, V é invariante para U_s.

  De modo semelhante, para qualquer $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\langle \pi(a)\, \xi, \eta \rangle &= \lim \langle \pi(a) [\pi \rtimes U(f_i)]\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \int_G \pi(a) \pi(f_i(t)) U_t \, d\mu(t)\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \int_G \pi(a f_i(t)) U_t \, d\mu(t)\, \xi, \eta \rangle \\
&= \lim \langle \pi \rtimes U(a f_i)\, \xi, \eta \rangle \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que V é invariante para π. Conclui-se então que V é invariante para (π, U). $\square$

Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico. A correspondência biunívoca entre representações contínuas não-degeneradas de $C_c(G, \mathcal{A})$ e representações covariantes não-degeneradas de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ permite, mediante o Teorema[1.1.32], estabelecer uma correspondência biunívoca entre representações não-degeneradas do produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e representações covariantes não-degeneradas de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$. Esta correspondência preserva também a irredutibilidade.

2.4.6. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^* e π uma representação de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H. Sejam π_α a representação de $\mathcal{A}$ e λ a representação unitária de G no espaço de Hilbert $L^2(G, H)$ definidas por*

$$[\pi_\alpha(a)\,\xi]\,(t) := \pi(\alpha_t^{-1}(a))\,\xi(t)\,, \qquad \xi \in L^2(G, H),\ t \in G\,,$$

$$[\lambda_s\,\xi]\,(t) := \xi(s^{-1}t)\,, \qquad \xi \in L^2(G, H),\ s, t \in G\,.$$

O par (π_α, λ) é designado por representação regular *de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.*

2.4.7. Teorema - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^*, π uma representação de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H e (π_α, λ) a representação regular associada. Tem-se que*

- *Toda a representação regular (π_α, λ) é uma representação covariante de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.*
- *Se π for não-degenerada então (π_α, λ) é também não-degenerada.*
- *Se π é fiel então $\pi_\alpha \rtimes \lambda$ é uma representação fiel de $C_c(G, \mathcal{A})$.*

Dem:

- A representação regular (π_α, λ) é uma representação covariante de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, pois para qualquer $a \in \mathcal{A},\ \xi \in L^2(G, H),\ s, t \in G$ tem-se que

$$\begin{aligned}[\lambda_s \pi_\alpha(a) \lambda_{s^{-1}}\ \xi](t) &= [\pi_\alpha(a)\lambda_{s^{-1}}\ \xi](s^{-1}t) = \pi(\alpha_{t^{-1}s}(a))\ [\lambda_{s^{-1}}\xi](s^{-1}t) \\ &= \pi(\alpha_{t^{-1}} \circ \alpha_s(a))\ \xi(t) = [\pi_\alpha(\alpha_s(a))\ \xi](t)\,.\end{aligned}$$

- Suponha-se que π é não-degenerada. Pretende-se provar que π_α é também não-degenerada. Seja e_i uma aproximação da unidade em $\mathcal{A}$. Vai demonstrar-se que $\pi_\alpha(e_i)$ converge pontualmente para o operador identidade em $B(L^2(G, H))$, ou seja,

$$\pi_\alpha(e_i)\,\xi \longrightarrow \xi\,, \qquad \forall\,\xi \in L^2(G, H)\,.$$

Por densidade, basta mostrar que isto acontece para $\xi \in C_c(G, H)$. Repare-se primeiramente que, para qualquer $t \in G$, se tem

$$\| [\pi_\alpha(e_i)\, \xi](t) - \xi(t) \| = \| \pi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\, \xi(t) - \xi(t) \| \longrightarrow 0\,, \tag{2.5}$$

onde a convergência para 0 se deve ao facto de $\alpha_{t^{-1}}(e_i)$ ser também uma aproximação da unidade em $\mathcal{A}$ (visto que $\alpha_{t^{-1}}$ é um automorfismo), e π ser não-degenerada (Proposição[1.1.18])

Mostra-se agora que a convergência para 0 em (2.5) é uniforme no suporte de ξ (não depende de $t \in G$). Suponha-se, por absurdo, que tal não acontece. Então existe $\epsilon > 0$, uma subrede $\{e_i\}$ e uma rede $\{t_i\}$ no suporte de ξ, tal que

$$\| [\pi_\alpha(e_i)\, \xi](t_i) - \xi(t_i) \| > \epsilon\,.$$

Como o suporte de ξ é compacto podemos assumir (passando para uma subrede) que t_i converge para um certo $t \in G$. Mas então

$$\begin{aligned}
\| [\pi_\alpha(e_i)\, \xi](t_i) - \xi(t_i) \| &= \| \pi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\, \xi(t_i) - \xi(t_i) \| \\
&\leq \| \pi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\, \xi(t_i) - \pi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\, \xi(t) \| + \\
&+ \| \pi(\alpha_{t^{-1}}(e_i))\, \xi(t) - \xi(t) \| + \\
&+ \| \xi(t) - \xi(t_i) \| \longrightarrow 0\,,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Sendo K o suporte de ξ, pode ver-se que

$$\begin{aligned}
\| \pi_\alpha(e_i)\, \xi - \xi \|^2 &= \int_G \| [\pi_\alpha(e_i)\, \xi](t) - \xi(t) \|^2\, d\mu(t) \\
&\leq \mu(K) \max_{t \in K} \| [\pi_\alpha(e_i)\, \xi](t) - \xi(t) \|^2 \longrightarrow 0\,,
\end{aligned}$$

o que mostra que π_α é não-degenerada (Proposição[1.1.18]).

- Suponha-se que π é uma representação fiel de $\mathcal{A}$. Seja $f \in C_c(G, \mathcal{A})$ tal que $[\pi_\alpha \rtimes \lambda](f) = 0$ e $\{f_i\}$ uma aproximação da unidade à esquerda de $C_c(G, \mathcal{A})$. Para cada $h \in H$ definem-se ξ e $\eta \in C_c(G, H) \subset L^2(G, H)$ respectivamente por

$$\begin{aligned}
\xi(r) &:= \pi(\alpha_{r^{-1}}(f_i^*(r)))\, h\,, \qquad && r \in G\,, \\
\eta(r) &:= \pi(\alpha_{r^{-1}}(f * f_i^*(r)))\, h\,, \qquad && r \in G\,.
\end{aligned}$$

Tem-se que, para qualquer $t \in G$,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\pi_\alpha \rtimes \lambda)(f)\, \xi \,,\, \eta \rangle = \langle \int_G \pi_\alpha(f(s))\, \lambda_s \, d\mu(s)\, \xi \,,\, \eta \rangle \\
&= \int_G \langle \pi_\alpha(f(s))\, \lambda_s\, \xi \,,\, \eta \rangle \, d\mu(s) \\
&= \int_G \int_G \big\langle \pi(\alpha_{t^{-1}}(f(s)))\, \xi(s^{-1}t) \,,\, \eta(t) \big\rangle \, d\mu(t)\, d\mu(s) \\
&= \int_G \Big\langle \int_G \pi(\alpha_{t^{-1}}(f(s)))\pi(\alpha_{t^{-1}s}(f_i^*(s^{-1}t)))h \, d\mu(s) \,,\, \eta(t) \Big\rangle \, d\mu(t) \\
&= \int_G \Big\langle \pi\Big(\alpha_{t^{-1}}\Big(\int_G f(s)\alpha_s(f_i^*(s^{-1}t))\, d\mu(s)\Big)\Big)\, h \,,\, \eta(t) \Big\rangle \, d\mu(t) \\
&= \int_G \big\langle \pi(\alpha_{t^{-1}}(f * f_i^*(t)))\; h \,,\, \eta(t) \big\rangle \, d\mu(t) \\
&= \int_G \| \pi(\alpha_{t^{-1}}(f * f_i^*(t)))\; h \|^2 \, d\mu(t)\,.
\end{aligned}$$

Como a igualdade anterior é válida para qualquer $h \in H$ e π é fiel, tem-se que $f * f_i^*(t) = 0$ para todo o $t \in G$, ou seja,

$$f_i * f^* = (f * f_i^*)^* = 0\,.$$

Como f_i é uma aproximação da unidade à esquerda de $C_c(G, \mathcal{A})$, conclui-se que $f^* = 0$, e portanto $f = 0$, ou seja, $\pi_\alpha \rtimes \lambda$ é uma representação fiel de $C_c(G, \mathcal{A})$ em $B(L^2(G, H))$. $\square$

O Teorema de Gelfand-Naimark (1.1.20) assegura a existência de representações fieis de qualquer álgebra C^* num espaço de Hilbert apropriado. Conclui-se então do Teorema[2.4.7] que existem representações fieis de $C_c(G, \mathcal{A})$ para qualquer sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.

Recorde-se que o produto cruzado C^* relativo a $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ é definido como sendo a álgebra C^* envolvente de $C_c(G, \mathcal{A})$, ou seja, $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é o completamento de $C_c(G, \mathcal{A})/I$ na norma universal $\| \cdot \|_u$, onde $I \subseteq C_c(G, \mathcal{A})$ é o ideal definido por $I := \{ f \in C_c(G, \mathcal{A}) : \|f\|_u = 0\}$. Recorde-se ainda que a norma universal é definida por

$$\|f\|_u := \sup_\pi \|\pi(f)\|\,, \qquad\qquad f \in C_c(G, \mathcal{A})\,, \tag{2.6}$$

onde o supremo é tomado na classe das representações de $C_c(G, \mathcal{A})$ ([1.1.30]). A existência de representações fieis de $C_c(G, \mathcal{A})$ mostra que $I = \{0\}$, donde se conclui que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ é um completamento de $C_c(G, \mathcal{A})$ para uma norma C^* apropriada. Doravante não será feita qualquer distinção de notação entre um elemento $f \in C_c(G, \mathcal{A})$ e a sua imagem em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Pode agora estabelecer-se o seguinte resultado:

2.4.8. Teorema - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico. Existe uma correspondência biunívoca entre representações covariantes não-degeneradas de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$*

e representações não-degeneradas de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Esta correspondência preserva a irredutibilidade e é dada por

$$(\pi, U) \;\longleftrightarrow\; \pi \rtimes U\,,$$

onde $\pi \rtimes U$ é a extensão da forma integral de (π, U) a $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

O produto cruzado C^* de um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ pode ser bastante difícil de se estudar tendo em conta que a definição de norma universal $\|\cdot\|_u$ (1.1.30) requer o conhecimento das representações contínuas de $C_c(G, \mathcal{A})$ ou, equivalentemente, das representações covariantes de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$. Na prática é muitas vezes útil restringir-se a uma classe mais pequena de representações, e sob hipóteses bastante gerais sobre G (mediabilidade) esta restrição não afecta o produto cruzado C^*.

2.4.9. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico.*
Define-se a norma $\|\cdot\|_r$ em $C_c(G, \mathcal{A})$ por

$$\|f\|_r := \sup_{(\pi_\alpha,\,\lambda)} \|\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\|\,, \qquad\qquad f \in C_c(G, \mathcal{A})\,,$$

onde o supremo é tomado na classe das representações regulares de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$.

Pode ver-se que $\|\cdot\|_r$ define de facto uma norma em $C_c(G, \mathcal{A})$ por um argumento essencialmente análogo à demonstração de que a norma universal $\|\cdot\|_u$ é uma norma (Teorema[1.1.30]) e usando o facto de existirem representações fieis de $C_c(G, \mathcal{A})$ que provêm de uma forma integral de uma representação regular (Teorema[2.4.7]). Esta norma satisfaz também a condição C^*. Tem-se ainda que

$$\|\cdot\|_r \;\leq\; \|\cdot\|_u \;\leq\; \|\cdot\|_1\,. \tag{2.7}$$

2.4.10. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico.*
O completamento de $C_c(G, \mathcal{A})$ na norma $\|\cdot\|_r$ é uma álgebra C^* designada por produto cruzado C^* reduzido *de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ e é denotada por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$.*

Como a norma $\|\cdot\|_r$ é dominada pela norma $\|\cdot\|_u$, a inclusão canónica $\rho : (C_c(G, \mathcal{A}),\ \|\cdot\|_u) \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é contínua e portanto estende-se unicamente para um homomorfismo $\widetilde{\rho} : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$. Por ter imagem densa, este homomorfismo canónico é sobrejectivo (Teorema[1.1.15]), donde se conclui que o produto cruzado C^* reduzido $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é um quociente do produto cruzado total $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. Sob certas condições no grupo G é possível garantir que o homomorfismo canónico $\widetilde{\rho} : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é injectivo e portanto o produto cruzado e o produto cruzado reduzido são isomorfos.

2.4.11. Teorema - [18, Theorem 7.7.5 e 7.7.7] - *Seja G um grupo localmente compacto mediável e $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico. Então a norma $\|\cdot\|_r$ coincide com a norma universal em $C_c(G, \mathcal{A})$ e em particular $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ são canonicamente isomorfos, isto é a aplicação quociente $\widetilde{\rho} : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é um isomorfismo. Tem-se ainda que se π for uma representação fiel de $\mathcal{A}$, então $\pi_\alpha \rtimes \lambda$ é uma representação fiel de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.*

2.5 Produtos cruzados C^* por grupos discretos

Nesta secção são analisadas algumas propriedades dos produtos cruzados C^* e produtos cruzados C^* reduzidos associados a grupos discretos. Alguns dos resultados enunciados serão posteriormente utilizados no Capítulo 3.

O próximo resultado, de demonstração muito simples, mostra que para qualquer sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$, com G um grupo discreto, a álgebra $\mathcal{A}$ e o grupo G estão contidos no produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

2.5.1. Proposição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^*, com G um grupo discreto. Para cada $s \in G$ seja $\delta_s \in C_c(G)$ a função que vale 1 em s e 0 em todos os outros pontos. Tem-se que*

$$\{a\,\delta_e : a \in \mathcal{A}\}$$

é uma subálgebra C^* de $C_c(G, \mathcal{A})$ que é isomorfa a $\mathcal{A}$. No caso de $\mathcal{A}$ ter unidade tem-se ainda que

$$\{\delta_s : s \in G\}$$

é um grupo discreto de unitários em $C_c(G, \mathcal{A})$ isomorfo a G.

2.5.2. Definição - *Seja H um espaço de Hilbert e G um grupo discreto. Para cada $s \in G$ define-se $J_s : H \longrightarrow L^2(G, H)$ como sendo a isometria tal que a cada $\eta \in H$ associa a função em $L^2(G, H)$ que toma o valor η em s e vale zero nos restantes pontos de G.*

2.5.3. Proposição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico com G discreto. Seja π uma representação de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H e (π_α, λ) a representação regular associada. Para cada $s \in G$ seja $J_s \in B\big(H, L^2(G, H)\big)$ a isometria definida em [2.5.2]. Tem-se que, para cada $f \in C_c(G, \mathcal{A})$,*

$$J_s^*\big(\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\big)J_t = \pi\big(\alpha_s^{-1}(f(st^{-1}))\big)\,, \qquad s, g \in G\,.$$

Dem: Mostra-se primeiro que J_s^* é a aplicação tal que $J_s^*(\xi) = \xi(s)$, para qualquer $\xi \in L^2(G,H)$. Para tal basta notar que, para $\eta \in H$,

$$\big\langle J_s\eta,\, \xi\big\rangle_{L^2(G,H)} = \sum_{t\in G} \big\langle (J_s\eta)(t),\, \xi(t)\big\rangle_H = \big\langle \eta,\, \xi(s)\big\rangle_H \,.$$

Note-se agora que a forma integral $\pi_\alpha \rtimes \lambda$ é tal que, para $f \in C_c(G,\mathcal{A})$, $\xi \in L^2(G,H)$ e $s \in G$,

$$\begin{aligned} [(\pi_\alpha \rtimes \lambda)(f)\; \xi](s) &= \sum_{r\in G} [\pi_\alpha(f(r))\lambda_r\xi](s) \\ &= \sum_{r\in G} \pi\big(\alpha_s^{-1}(f(r))\big)\,(\lambda_r\xi)(s) \\ &= \sum_{r\in G} \pi\big(\alpha_s^{-1}(f(r))\big)\,\xi(r^{-1}s)\,. \end{aligned}$$

Pode então ver-se que, para qualquer $\eta \in H$, se tem

$$\begin{aligned} J_s^*\big(\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\big)J_t\,\eta &= [(\pi_\alpha \rtimes \lambda)(f)\; J_t\eta](s) \\ &= \sum_{r\in G} \pi\big(\alpha_s^{-1}(f(r))\big)\,(J_t\eta)(r^{-1}s) \\ &= \pi\big(\alpha_s^{-1}(f(st^{-1}))\big)\eta\,. \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. □

2.5.4. Proposição - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico com G discreto. Quando restritas a $C_c(G,\mathcal{A})$ as normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_r$, $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_1$ satisfazem as desigualdades*

$$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_r \le \|\cdot\|_u \le \|\cdot\|_1\,. \tag{2.8}$$

Dem: As desigualdades $\|\cdot\|_r \le \|\cdot\|_u \le \|\cdot\|_1$ são fáceis de verificar e foram estabelecidas em (2.7).

Sejam $f \in C_c(G,\mathcal{A})$, $s \in g$ e J_s a isometria definida em [2.5.2]. Seja ainda $\pi_0 : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$ uma representação fiel de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H e (π_α, λ) a representação regular associada. Pela Proposição[2.5.3] e pela definição da norma $\|\cdot\|_r$ tem-se que,

$$\|f(s)\| = \|\pi_0(f(s))\| = \|J_e^*\big(\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\big)J_s\| \le \|\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\| \le \|f\|_r\,,$$

o que mostra que $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_r$. □

Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico C^* com G discreto. Dada uma função $f \in C_c(G,\mathcal{A})$ podemos avaliá-la num ponto $s \in G$, ou seja, existe uma aplicação $E_s : C_c(G,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$E_s(f) := f(s)\,. \tag{2.9}$$

A desigualdade (2.8) mostra que E_s é uma aplicação contínua para qualquer norma $\|\cdot\|_r$, $\|\cdot\|_u$ ou $\|\cdot\|_1$ que se considere em $C_c(G,\mathcal{A})$. Estendendo por continuidade a função E_s a $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ (ou a $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$), faz então sentido falar-se no "valor" de um elemento f de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ (ou de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$) num ponto $s \in G$, embora os elementos do produto cruzado não tenham sido definidos à partida como funções em G.

Mostra-se em seguida que, no caso do produto cruzado C^* reduzido, os valores de um elemento $f \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ em cada ponto de G determinam univocamente o próprio elemento f.

2.5.5. Teorema - *Seja $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ um sistema dinâmico com G discreto. Seja $f \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ e, para cada $s \in G$, sejam $E_s : \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G \longrightarrow \mathcal{A}$ as aplicações de avaliação definidas em (2.9). Se $E_s(f) = 0$ para todo o $s \in G$, então $f = 0$.*

Dem: Seja $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$ uma representação de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert H e (π_α, λ) a representação regular associada. Pela Proposição[2.5.3] tem-se que, para qualquer $f \in C_c(G,\mathcal{A})$, $s,t \in G$,

$$J_s^*\big(\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\big)J_t = \pi\big(\alpha_s^{-1}(E_{st^{-1}}(f))\big)\,.$$

Por continuidade a igualdade anterior é ainda satisfeita para qualquer $f \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$. Logo, se $f \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é tal que $E_s(f) = 0$ para todo o $s \in G$, então $J_s^*\big(\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f)\big)J_t = 0$ para quaisquer $s,t \in G$. Tem-se então necessariamente que $\pi_\alpha \rtimes \lambda\,(f) = 0$. Como a representação π é arbitrária e f é um elemento do produto cruzado reduzido, conclui-se que $f = 0$, terminando a demonstração. $\square$

2.6 Produtos cruzados C^* não-clássicos

Os produtos cruzados C^* clássicos, estudados nas secções anteriores, encerram em si bastante informação relativa a um sistema dinâmico C^*. Nos sistemas dinâmicos $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ que têm sido considerados até aqui (Definição[2.1.1]) as transformações α_s são sempre automorfismos-* de $\mathcal{A}$, sendo portanto invertíveis com inverso $\alpha_{s^{-1}}$. Por esta razão este tipo de sistemas dinâmicos dizem-se *reversíveis*. Existem, no entanto, situações em que a dinâmica que interessa considerar não é estabelecida por transformações invertíveis. Neste caso não estamos perante uma acção de um grupo numa álgebra C^* mas sim perante a acção de um semigrupo. As transformações α_s passam então a ser apenas endomorfismos-*.

Nesta secção é discutida a construção de produtos cruzados C^* relativos a sistemas dinâmicos estabelecidos por semigrupos, também chamados de *produtos cruzados C^* por endomorfismos*. Não existe actualmente uma teoria geral de produtos cruzados para este tipo de sistemas dinâmicos, tendo sido propostas várias abordagens sob diferentes hipóteses. Nesta secção descreve-se a construção desenvolvida em [16].

Doravante assume-se que $\mathcal{A}$ é uma álgebra C^* com unidade 1 e que Γ é um grupo abeliano (discreto) totalmente ordenado. Denota-se por $End(\mathcal{A})$ o conjunto dos endomorfismos-* de $\mathcal{A}$ e por $\Gamma^+ := \{s \in \Gamma : 0 \leq s\}$ o semigrupo dos elementos positivos de Γ.

2.6.1. Definição - *Fixado um homomorfismo* $\alpha : \Gamma^+ \to End(\mathcal{A})$, *o terno* $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ *diz-se um sistema dinâmico* C^*.

A principal obstrução à construção de um produto cruzado relativo a um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ reside no facto de que em geral não existe o inverso de uma transformação α_s, com $s \in \Gamma^+$. O papel que cabia ao inverso $\alpha_{s^{-1}}$ será desenvolvido na presente situação por um *operador de transferência*:

2.6.2. Definição - *Seja* $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ *um sistema dinâmico* C^* *e* L *uma aplicação de* Γ^+ *em* $End(\mathcal{A})$ *tal que*

$$L_{s+t} = L_s \circ L_t\,, \qquad\qquad s, t \in \Gamma^+.$$

Diz-se que L *é uma* acção de transferência completa *se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $L_s(\alpha_s(a)b) = aL_s(b)$, *para quaisquer* $a, b \in \mathcal{A}$ *e* $s \in \Gamma^+$.

(ii) $\alpha_s(L_s(a)) = \alpha_s(1)a\alpha_s(1)$, *para quaisquer* $a \in \mathcal{A}$ *e* $s \in \Gamma^+$.

A existência e unicidade de acções de transferência completas não é garantida para qualquer sistema dinâmico C^* em geral. Em [16, Theorem 2.4] são estabelecidas algumas condições necessárias e suficientes para esse efeito. Atente-se ainda nesse sentido para a seguinte definição e subsequente resultado.

2.6.3. Definição - *Um sistema dinâmico* $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ *diz-se* bem representável *se existir um terno* (H, π, U) *consistindo num espaço de Hilbert* H, *uma representação fiel não-degenerada* $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ *e um homomorfismo* $U : \Gamma^+ \to B(H)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_s^*$,

(ii) $U_s^* \pi(a) U_s \in \pi(\mathcal{A})$,

(iii) $U_s \pi(a) = \pi(\alpha_s(a)) U_s$,

para quaisquer $s \in \Gamma^+$ *e* $a \in \mathcal{A}$.

2.6.4. Teorema - [16, Theorem 3.2] - *Um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ é bem representável se e só se existe uma (única) acção de transferência completa L para $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$.*

A construção do produto cruzado que aqui se apresenta assume que os sistemas dinâmicos em questão são bem representáveis, ou equivalentemente, que existem acções de transferência completas, o que, como foi salientado, não acontece para qualquer sistema dinâmico. No entanto, em [15] é desenvolvido um procedimento que permite estender qualquer sistema dinâmico C^* a um sistema dinâmico bem representável. Deste modo, a construção que se apresenta de seguida não é tão restritiva quanto à partida possa parecer.

Seja $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ um sistema dinâmico C^* bem representável e L a acção de transferência completa em $\mathcal{A}$, que existe e é unica pelo Teorema[2.6.4]. Define-se $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ como sendo o espaço constituído por funções $a : \Gamma \to \mathcal{A}$, escritas na forma $a = \{a_s\}_{s\in\Gamma}$, tais que

$$\begin{cases} a_s \in \mathcal{A}\alpha_s(1), & \text{se} \quad s \geq 0 \\ a_s \in \alpha_{-s}(1)\mathcal{A}, & \text{se} \quad s \leq 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

e cujos valores a_s são não-nulos apenas num conjunto finito de $s \in \Gamma$, com as operações de soma e multiplicação por escalares definidas pontualmente, ou seja,

$$(a + b)_s := a_s + b_s \qquad\qquad (\lambda a)_s := \lambda a_s,$$

onde $\{a_s\}_{s\in\Gamma}, \{b_s\}_{s\in\Gamma} \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Define-se ainda em $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ um produto, uma involução e uma norma dados por

$$(a * b)_s := \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{s=t-r \\ 0<t,r}} a_t\alpha_s(b_{-r}) + \sum_{\substack{s=r-t \\ 0<t,r}} L_t(a_{-t}b_r) + \sum_{\substack{s=t+r \\ 0\leq t,r}} a_t\alpha_t(b_r), & \text{se} \quad 0 \leq s \\ \displaystyle\sum_{\substack{s=t-r \\ 0<t,r}} \alpha_{-s}(a_t)b_{-r} + \sum_{\substack{s=r-t \\ 0<t,r}} L_r(a_{-t}b_r) + \sum_{\substack{s=-t-r \\ 0\leq t,r}} \alpha_r(a_{-t})b_{-r}, & \text{se} \quad s < 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$(a^*)_s := (a_{-s})^*, \tag{2.12}$$

$$\|a\|_1 := \sum_{s\in\Gamma} \|a_s\|, \tag{2.13}$$

onde $a, b \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ e $s \in \Gamma$.

2.6.5. Teorema - *O produto e involução dados por (2.11) e (2.12) estão bem definidos. Equipada com a norma $\|\cdot\|_1$ definida em (2.13), $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ constitui uma álgebra-* normada.*

Dem:

- Mostra-se primeiramente que o produto de dois elementos $a, b \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ está bem definido, ou seja, que $a * b$ satisfaz as relações (2.10). Seja $s \in \Gamma$ tal que $0 \leq s$ (o caso em que $s < 0$ pode ser demonstrado de forma similar). Sejam $r, t \in \Gamma$ tais que $0 \leq r, t$. Caso $s = t - r$ tem-se que

$$a_t \alpha_s(b_{-r}) = a_t \alpha_s(b_{-r}) \alpha_s(1) \in \mathcal{A}\alpha_s(1) .$$

Caso $s = r - t$ então, como $b_r \in \mathcal{A}\alpha_s(1)$ tem-se que $b_r \alpha_r(1) = b_r$, e portanto

$$L_t(a_{-t} b_r) = L_t(a_{-t} b_r \alpha_r(1)) = L_t\big(a_{-t} b_r \alpha_t(\alpha_s(1))\big) = L_t(a_{-t} b_r) \alpha_s(1) ,$$

ou seja, $L_t(a_{-t} b_r) \in \mathcal{A}\alpha_s(1)$. Caso $s = t + r$ então, usando novamente o facto de que $b_r \alpha_r(1) = b_r$, tem-se que

$$a_t \alpha_t(b_r) = a_t \alpha_t(b_r \alpha_r(1)) = a_t \alpha_t(b_r) \alpha_{t+r}(1) \in \mathcal{A}\alpha_s(1) .$$

Pode então concluir-se que $(a * b)_s \in \mathcal{A}\alpha_s(1)$.

- Seja $a \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ e $s \in \Gamma^+$. É claro que se $a_{-s} \in \mathcal{A}\alpha_s(1)$ então $a_{-s}^* \in \alpha_s(1)\mathcal{A}$, o que permite concluir que a involução está bem definida.

- Mostra-se agora que $(a * b)^* = b^* * a^*$. Seja $s \in \Gamma$ tal que $0 \leq s$. Tem-se que

$$(a * b)_{-s}^* = \sum_{\substack{-s=t-r \\ 0<t,r}} b_{-r}^* \alpha_s(a_t^*) + \sum_{\substack{-s=r-t \\ 0<t,r}} L_r(b_r^* a_{-t}^*) + \sum_{\substack{-s=-t-r \\ 0\leq t,r}} b_{-r}^* \alpha_r(a_{-t}^*)$$

e também

$$(b^* * a^*)_s = \sum_{\substack{s=t-r \\ 0<t,r}} b_{-t} \alpha_s(a_r^*) + \sum_{\substack{s=r-t \\ 0<t,r}} L_t(b_t^* a_{-r}^*) + \sum_{\substack{s=t+r \\ 0\leq t,r}} b_{-t}^* \alpha_t(a_{-r}^*) .$$

Trocando as variáveis mudas r, t na última igualdade pode verificar-se que $(a * b)_{-s}^* = (b^* * a^*)_s$. Um argumento semelhante pode ser utilizado para o caso $s < 0$, donde se conclui que $(a * b)^* = b^* * a^*$.

- A distributividade do produto em relação à soma é obvia. A associatividade do produto é mais difícil de se obter (ver [16, Theorem 4.3] para uma demonstração).

- Mostra-se agora que $\|a*b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$, para quaisquer $a, b \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$.

$$\begin{aligned}
\|a * b\|_1 &= \sum_{s\in\Gamma} \|(a * b)_s\| \\
&\leq \sum_{s\in\Gamma^+} \Big(\sum_{\substack{s=t-r \\ 0<t,r}} \|a_t\| \|b_{-r}\| + \sum_{\substack{s=r-t \\ 0<t,r}} \|a_{-t}\| \|b_r\| + \sum_{\substack{s=t+r \\ 0\leq t,r}} \|a_t\| \|b_r\| \Big) \\
&\quad + \sum_{s\in\Gamma^-} \Big(\sum_{\substack{s=t-r \\ 0<t,r}} \|a_t\| \|b_{-r}\| + \sum_{\substack{s=r-t \\ 0<t,r}} \|a_{-t}\| \|b_r\| + \sum_{\substack{s=t+r \\ t,r\leq 0}} \|a_t\| \|b_r\| \Big) \\
&= \Big(\sum_{s\in\Gamma} \|a_s\| \Big) \Big(\sum_{s\in\Gamma} \|b_s\| \Big) = \|a\|_1 \|b\|_1 .
\end{aligned}$$

- É óbvio que $\|a^*\| = \|a\|$ para qualquer $a \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$. $\square$

De modo similar à teoria de produtos cruzados C^* clássicos tem-se a seguinte definição de um produto cruzado C^* relativo a um sistema dinâmico $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$.

2.6.6. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ um sistema dinâmico C^* bem representável. O produto cruzado de $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ é definido como sendo a álgebra C^* envolvente de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ e é denotado por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \Gamma^+$.*

Os produtos cruzados C^* devem conter bastante informação relativa a um sistema dinâmico e como tal deve existir uma correspondência biunívoca entre representações não-degeneradas do produto cruzado e representações covariantes não-degeneradas do sistema dinâmico.

2.6.7. Definição - *Seja $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ um sistema dinâmico C^* bem representável. Uma* representação covariante *de $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ num espaço de Hilbert H é um par (π, U) onde $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ é uma representação de $\mathcal{A}$ e $U : \Gamma^+ \to B(H)$ é um homomorfismo satisfazendo as seguintes igualdades:*

$$U_s \pi(a) U_s^* = \pi(\alpha_s(a)), \qquad U_s^* \pi(a) U_s = \pi(L_s(a)).$$

Uma representação covariante (π, U) diz-se não-degenerada *quando π é não-degenerada.*

Analogamente aos produtos cruzados C^* clássicos, a partir de uma representação covariante pode definir-se uma forma integral que estabelece uma representação do produto cruzado.

2.6.8. Proposição - [16, Proposition 5.3] **-** *Seja (π, U) uma representação covariante de um sistema dinâmico bem representável $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ num espaço de Hilbert H. A função $\pi \rtimes U : C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A}) \to B(H)$ definida por*

$$\pi \rtimes U(a) := \sum_{s<0} U_{-s}^* \pi(a_s) + \pi(a_0) + \sum_{0<s} \pi(a_s) U_s$$

define uma representação de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ em H.

Pode agora estabelecer-se a principal propriedade dos produtos cruzados C^*:

2.6.9. Teorema - *Seja* $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ *um sistema dinâmico bem representável. Existe uma correspondência biunívoca entre representações covariantes não-degeneradas de* $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ *e representações não-degeneradas de* $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \Gamma^+$*. Essa correspondência é dada por*

$$(\pi, U) \longleftrightarrow \pi \rtimes U\,.$$

Dem: Note-se primeiramente que $\mathcal{A}$ é isomorfa a uma subálgebra-* de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$, constituída pelos elementos $a \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ tais que $a_s = 0$ para $s \neq 0$. O elemento de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ correspondente a um elemento $a_0 \in \mathcal{A}$ será denotado por $a_0\delta_0$.

Pela Proposição[2.6.8], a cada representação covariante (π, U) de $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$ num espaço de Hilbert H corresponde uma representação $\pi \rtimes U$ de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ em H. Mostra-se agora que $\pi \rtimes U$ é não-degenerada sempre que π é não-degenerada. Tem-se que, para qualquer $\xi \in H$ e $a_0 \in \mathcal{A}$

$$\pi \rtimes U(1\delta_0)\ [\pi(a_0)\xi] = \pi(1)\pi(a_0)\xi = \pi(a_0)\xi\,.$$

Como π é não-degenerada tem-se que $\pi \rtimes U(1\delta_0)$ é o operador identidade em $B(H)$, e portanto $\pi \rtimes U$ é não-degenerada. Pela propriedade da álgebra C^* envolvente (Teorema[1.1.32]) tem-se que $\pi \rtimes U$ induz uma representação não-degenerada de $\mathcal{A} \rtimes \Gamma^+$.

Suponha-se agora que Π é uma representação não-degenerada de $\mathcal{A} \rtimes \Gamma^+$ num espaço de Hilbert H. Novamente pelo Teorema[1.1.32], Π induz uma representação $\widetilde{\Pi}$ de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ em H. Define-se a representação $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$

$$\pi(a_0) := \widetilde{\Pi}(a_0\delta_0)\,.$$

Como $\widetilde{\Pi}$ é não-degenerada tem-se que $\widetilde{\Pi}(1\delta_0)$ é o operador identidade em $B(H)$, e portanto $\pi(1)$ é também o operador identidade em $B(H)$. Conclui-se deste modo que π é não-degenerada.

Para cada $s \in \Gamma^+$ (resp. $s \in \Gamma^-$) e $x_s \in \mathcal{A}\alpha_s(1)$ (resp. $x_s \in \alpha_{-s}(1)\mathcal{A}$) seja $x_s\delta_s$ o elemento de $C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$ que vale x_s em s e 0 nos restantes pontos de Γ. Seja $U : \Gamma^+ \to B(H)$ a aplicação dada por

$$U_s := \widetilde{\Pi}(\alpha_s(1)\delta_s)\,.$$

Tem-se que U é um homomorfismo pois

$$U_sU_t = \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(1)\delta_s * \alpha_t(1)\delta_t\big) = \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(1)\alpha_s(\alpha_t(1))\delta_{s+t}\big) = \widetilde{\Pi}\big(\alpha_{s+t}(1)\delta_{s+t}\big) = U_{s+t}$$

Mostra-se agora que (π, U) é uma representação covariante de $(\mathcal{A}, \Gamma^+, \alpha)$. Tem-se que, para quaisquer $a_0 \in \mathcal{A}$ e $s \in \Gamma^+$,

$$\begin{aligned} U_s\pi(a_0)U_s^* &= \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(1)\delta_s * a_0\delta_0 * \alpha_s(1)\delta_{-s}\big) \\ &= \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(a_0)\delta_s * \alpha_s(1)\delta_{-s}\big) \\ &= \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(a_0)\delta_0\big) = \pi(\alpha_s(a_0))\,, \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
U_s^*\pi(a_0)U_s &= \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(1)\delta_{-s} * a_0\delta_0 * \alpha_s(1)\delta_s\big) = \widetilde{\Pi}\big(\alpha_s(1)a_0\delta_{-s} * \alpha_s(1)\delta_s\big) \\
&= \widetilde{\Pi}\big(L_s(\alpha_s(1)a_0\alpha_s(1))\delta_0\big) = \pi\big(L_s(\alpha_s(1)a_0\alpha_s(1))\big) \\
&= \pi\big(L_s(a_0\alpha_s(1))\big) = \pi\big(L_s(\alpha_s(1)a_0^*)\big)^* \\
&= \pi\big(L_s(a_0^*)\big)^* = \pi\big(L_s(a_0)\big)\,,
\end{aligned}$$

o que permite concluir que (π, U) é uma representação covariante. Mostra-se agora que $\pi \rtimes U = \widetilde{\Pi}$. Seja $a \in C_c(\Gamma, \alpha, \mathcal{A})$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
(\pi \rtimes U)(a) &= \sum_{s<0} U_{-s}^*\pi(a_s) + \pi(a_0) + \sum_{0<s} \pi(a_s)U_s \\
&= \widetilde{\Pi}\Big(\sum_{s<0} \alpha_{-s}(1)\delta_s * a_s\delta_0 + a_0\delta_0 + \sum_{0<s} a_s\delta_0 * \alpha_s(1)\delta_s\Big) \\
&= \widetilde{\Pi}\Big(\sum_{s<0} \alpha_{-s}(1)a_s\delta_s + a_0\delta_0 + \sum_{0<s} a_s\alpha_s(1)\delta_s\Big) \\
&= \widetilde{\Pi}(a)\,,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Invertibilidade numa álgebra C^* de operadores funcionais

Neste capítulo são aplicadas as propriedades dos produtos cruzados C^*, desenvolvidas no Capítulo 2, ao estudo da invertibilidade numa álgebra C^* de operadores funcionais gerada por um sistema dinâmico C^*. A álgebra em questão, denotada por $\mathcal{B}$, é a álgebra C^* gerada pelos operadores de multiplicação em $B(L^2(\mathbb{T}))$ por funções seccionalmente fracamente oscilantes ($PSO(\mathbb{T})$) e por uma representação unitária de um grupo mediável de difeomorfismos de $\mathbb{T}$ com o mesmo conjunto de pontos fixos.

Sob certas hipóteses pode garantir-se que uma álgebra gerada por um sistema dinâmico é isomorfa a um produto cruzado C^*, e quando tal acontece pode estabelecer-se, pelo método das trajectórias locais, uma teoria de invertibilidade para para certas classes deste tipo de álgebras. Através da divisão de $\mathbb{T}$ em três subespaços apropriados a invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$ reduz-se ao estudo da invertibilidade em três álgebras com estruturas mais simples $\mathcal{B}_{arc}$, $\mathcal{B}^{\circ}$ e $\mathcal{B}_*$, sendo a primeira isomorfa a um produto cruzado C^* e a segunda uma álgebra C^* comutativa com um espectro que pode ser caracterizado. A terceira, $\mathcal{B}_*$, embora comutativa, não possui um espectro facilmente caracterizável. Mostra-se no entanto que a invertibilidade em $\mathcal{B}_{arc}$ e em $\mathcal{B}^{\circ}$ implica a invertibilidade em $\mathcal{B}_*$, obtendo-se assim uma teoria geral de invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$.

3.1 Uma álgebra C^* de operadores funcionais

A álgebra C^* de operadores que se vai definir nesta secção é uma álgebra gerada por operadores de multiplicação por funções da álgebra C^* de funções seccionalmente fracamente oscilantes e por um grupo de operadores unitários.

Inicia-se a secção definindo a álgebra C^* de funções seccionalmente fracamente oscilantes e caracterizando o seu espaço de funcionais lineares multiplicativos.

Seja $\mathbb{T}$ a circunferência unitária em $\mathbb{C}$ equipada com a topologia induzida e com a medida de Lebesgue.

Seja $L^\infty(\mathbb{T})$ a álgebra C^* das funções essencialmente limitadas em $\mathbb{T}$ com valores em $\mathbb{C}$ e $PC(\mathbb{T})$ o subespaço de $L^\infty(\mathbb{T})$ constituído pelas funções que possuem limites laterais em cada ponto de $\mathbb{T}$. $PC(\mathbb{T})$ é uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ e $PC^0(\mathbb{T})$, o espaço das funções em $PC(\mathbb{T})$ que têm apenas um número finito de descontinuidades, é uma subálgebra densa de $PC(\mathbb{T})$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{T}$ seja $C_b(\mathbb{T} \setminus \{\lambda\}) := C(\mathbb{T} \setminus \{\lambda\}) \cap L^\infty(\mathbb{T})$. Dada uma função $f \in C_b(\mathbb{T} \setminus \{\lambda\})$ a sua *oscilação* no conjunto $X \subseteq \mathbb{T}$ é definida por

$$\operatorname{osc}(f, X) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in X\}.$$

3.1.1. Definição - *Seja $\lambda \in \mathbb{T}$. Uma função $f \in C_b(\mathbb{T} \setminus \{\lambda\})$ diz-se* fracamente oscilante em λ *se*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \operatorname{osc}\big(f, \Gamma_{r\epsilon,\epsilon}(\lambda)\big) = 0\,,$$

onde $r \in (0,1)$ e $\Gamma_{r\epsilon,\epsilon}(\lambda) := \{s \in \mathbb{T} : r\epsilon \leq |s - \lambda| \leq \epsilon\}$.

O conjunto das funções fracamente oscilantes num ponto $\lambda \in \mathbb{T}$ constitui uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que será designada por $SO_\lambda(\mathbb{T})$.

A subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ gerada pelas álgebras $SO_\lambda(\mathbb{T})$ será designada por $SO(\mathbb{T})$

$$SO(\mathbb{T}) := \operatorname{alg}\{SO_\lambda(\mathbb{T}) : \lambda \in \mathbb{T}\}\,.$$

É claro que a noção de oscilação fraca num ponto $\lambda \in \mathbb{T}$ é um conceito local, podendo portanto falar-se de funções limitadas e contínuas em $\mathbb{T}$ excepto num número finito de pontos, onde as descontinuidades são do tipo fracamente oscilante. Analogamente a $SO_\lambda(\mathbb{T})$, o conjunto das funções em $C_b(\mathbb{T}\setminus\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$ que são fracamente oscilantes em $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ forma uma álgebra C^*, que será designada por $SO_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(\mathbb{T})$. O conjunto das funções contínuas em $\mathbb{T}$ excepto num número finito de pontos, onde as descontinuidades são do tipo fracamente oscilante, é designado por $SO^0(\mathbb{T})$ e é uma subálgebra densa em $SO(\mathbb{T})$.

A álgebra das funções seccionalmente fracamente oscilantes é definida como sendo

$$PSO(\mathbb{T}) := \operatorname{alg}\{SO(\mathbb{T}), PC(\mathbb{T})\}\,,$$

a subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ gerada por $SO(\mathbb{T})$ e $PC(\mathbb{T})$. Tem-se que o conjunto $PSO^0(\mathbb{T})$ das funções f da forma

$$f = \sum_{k=1}^{n} s_k p_k\,,$$

onde $s_k \in SO^0(\mathbb{T})$ e $p_k \in PC^0(\mathbb{T})$ para cada $1 \leq k \leq n$, forma uma subálgebra densa em $PSO(\mathbb{T})$.

Caracteriza-se agora o espaço dos funcionais lineares multiplicativos, ou equivalentemente, o espaço dos ideais maximais, das álgebras $PC(\mathbb{T})$, $SO(\mathbb{T})$ e $PSO(\mathbb{T})$.

Dada uma álgebra C^* comutativa com identidade $\mathcal{A}$ denota-se por $M(\mathcal{A})$ o espaço dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$ equipado com a topologia fraca-*.

3.1.2. Definição - *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra C^* comutativa com identidade e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ uma subálgebra C^* possuindo a mesma identidade de $\mathcal{A}$. Para cada $\varphi \in M(\mathcal{B})$ define-se a* fibra *de $M(\mathcal{A})$ sobre φ como sendo*

$$M_\varphi(\mathcal{A}) := \{\psi \in M(\mathcal{A}) : \psi|_{\mathcal{B}} = \varphi\}\,.$$

É claro que a restrição $\psi|_{\mathcal{B}}$ de qualquer $\psi \in M(\mathcal{A})$ é um funcional linear multiplicativo em $\mathcal{B}$. Sabe-se também (Teorema[1.1.27] e Teorema[1.1.28]) que qualquer funcional linear multiplicativo $\varphi \in M(\mathcal{B})$ se pode extender a um funcional linear multiplicativo em $M(\mathcal{A})$ e que o conjunto destas extensões é um conjunto compacto. Estas observações permitem concluir que as fibras $M_\varphi(\mathcal{A})$, com $\varphi \in M(\mathcal{B})$, são conjuntos não-vazios, compactos, disjuntos e ainda que

$$M(\mathcal{A}) = \bigcup_{\varphi \in M(\mathcal{B})} M_\varphi(\mathcal{A})\,. \tag{3.1}$$

Qualquer uma das álgebras $PC(\mathbb{T})$, $SO(\mathbb{T})$ ou $PSO(\mathbb{T})$ contém a álgebra $C(\mathbb{T})$. O espaço dos funcionais linerares multiplicativos de $C(\mathbb{T})$ é homeomorfo a $\mathbb{T}$ via avaliações pontuais, ou seja,

$$M(C(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T}\,,$$

onde cada ponto $t \in \mathbb{T}$ é identificado com o funcional de avaliação δ_t definido por $\delta_t(f) := f(t)$.

No caso da álgebra $PC(\mathbb{T})$ a estrutura do espaço dos funcionais lineares multiplicativos é também conhecida, tendo-se

$$M(PC(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T} \times \{0,1\}\,,$$

onde, para cada $t \in \mathbb{T}$, os pares $(t,0)$ e $(t,1)$ correspondem aos funcionais lineares multiplicativos dados pelos pelos limites laterais em t

$$(t,0)\,f := \lim_{s\to t^+} f(s)\,, \qquad (t,1)\,f := \lim_{s\to t^-} f(s)\,, \qquad f \in PC(\mathbb{T})\,,$$

obtidos fixando-se uma orientação em $\mathbb{T}$. A topologia de $\mathbb{T} \times \{0,1\}$ pode ser caracterizada pela base de abertos constituída pelos conjuntos da forma

$$\big((t,s] \times \{0\}\big) \cup \big((t,s) \times \{1\}\big) \qquad \text{e} \qquad \big((t,s) \times \{0\}\big) \cup \big([t,s) \times \{1\}\big)\,,$$

onde $t, s \in \mathbb{T}$ e supondo-se que $\mathbb{T}$ está orientado no sentido directo. As fibras de $M(PC(\mathbb{T}))$ sobre $C(\mathbb{T})$ são então

$$M_t(PC(\mathbb{T})) = \{(t,0),(t,1)\}\,, \qquad t \in \mathbb{T}\,.$$

3.1.3. Definição - *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas subálgebras C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contêm $C(\mathbb{T})$, e seja $\mathrm{alg}\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}$ a subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ gerada por $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. As álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dizem-se* assimptoticamente independentes *em $t \in \mathbb{T}$ se a aplicação*

$$\mu : M_t(\mathrm{alg}\{\mathcal{A},\mathcal{B}\}) \longrightarrow M_t(\mathcal{A}) \times M_t(\mathcal{B})$$
$$\mu(\psi) := (\psi|_{\mathcal{A}}, \psi|_{\mathcal{B}})$$

é um homeomorfismo. Como μ é injectiva e contínua e $M_t(alg\{\mathcal{A},\mathcal{B}\})$ é um compacto, a independência assimptótica entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é equivalente a μ ser sobrejectiva.

Seja $\lambda \in \mathbb{T}$. Como $C(\mathbb{T}) \subseteq SO_\lambda(\mathbb{T})$ tem-se então, de acordo com (3.1), que $M(SO_\lambda(\mathbb{T})) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t(SO_\lambda(\mathbb{T}))$. Para $t \in \mathbb{T}\setminus\{\lambda\}$ as fibras $M_t(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ podem ser facilmente caracterizadas pois dada uma função $f \in SO_\lambda(\mathbb{T})$ e $\psi \in M_t(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ tem-se que fh é contínua, onde h uma função contínua que vale 1 numa vizinhança de t não contendo λ e 0 numa vizinhança de λ, e portanto

$$\psi(f) = \psi(f)h(t) = \psi(f)\psi(h) = \psi(fh) = f(t)h(t) = f(t)\,,$$

ou seja $M_t(SO_\lambda(\mathbb{T})) = \{t\}$. O próximo resultado permite caracterizar a fibra $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T}))$. Será dada mais adiante na secção 3.3 uma demonstração deste resultado, mas fica também aqui a referência da literatura onde uma outra demonstração pode ser encontrada [7].

3.1.4. Proposição - *Tem-se que $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T})) = \overline{\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}}^{SO_\lambda'} \setminus \big(\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}\big)$, onde $\overline{\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}}^{SO_\lambda'}$ é o fecho para a topologia fraca-* de $\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}$ em $SO_\lambda(\mathbb{T})'$, o dual de $SO_\lambda(\mathbb{T})$.*

Da proposição anterior conclui-se que cada funcional linear multiplicativo $\psi \in M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ é o limite de uma rede de avaliações pontuais $\{\delta_{t_i}\}$ onde $t_i \in \mathbb{T}\setminus\{\lambda\}$ converge para λ. Como o limite é tomado na topologia fraca-*, tem-se ainda que $\psi(f) = \lim_i f(t_i)$ para qualquer $f \in SO_\lambda(\mathbb{T})$.

No caso de funções contínuas em $\mathbb{T}$ excepto num conjunto finito de pontos $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, onde as descontinuidades são do tipo fracamente oscilante, a caracterização das fibras de $M(SO_{\lambda_1,\ldots\lambda_k}(\mathbb{T}))$ sobre qualquer ponto de $\mathbb{T}$ é totalmente análoga.

Novamente de acordo com (3.1), tem-se que

$$M(SO(\mathbb{T})) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t(SO(\mathbb{T}))\,.$$

Seja $\psi \in M_t(SO(\mathbb{T}))$. Para cada $f \in SO(\mathbb{T})$ existe uma sucessão $\{f_n\} \subset SO^0(\mathbb{T})$ tal que $f_n \longrightarrow f$, e portanto $\psi(f) = \lim_n \psi(f_n)$. Como cada f_n pertence a uma álgebra do tipo $SO_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(\mathbb{T})$, tem-se que $\psi(f_n)$ é dado por um certo limite de f_n no ponto t.

Tem-se finalmente a caracterização de $M(PSO(\mathbb{T}))$. Usando novamente (3.1) tem-se que

$$M(PSO(\mathbb{T})) = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} M_t(PSO(\mathbb{T}))\,,$$

mas também, tomando as fibras sobre $M(SO(\mathbb{T}))$,

$$M(PSO(\mathbb{T})) = \bigcup_{\psi\in M(SO(\mathbb{T}))} M_\psi(PSO(\mathbb{T}))\,.$$

3.1.5. Teorema - [4, Theorem 4.6 e Lemma 4.7] **-** *As álgebras $SO(\mathbb{T})$ e $PC(\mathbb{T})$ são assimptoticamente independentes em cada $t \in \mathbb{T}$. Em particular, se $\psi \in M_t(SO(\mathbb{T}))$ então*

$$M_\psi(PSO(\mathbb{T})) = \{(\psi,0),(\psi,1)\}\,,$$

onde, para $\sigma \in \{0,1\}$, se tem $(\psi,\sigma)|_{SO(\mathbb{T})} = \psi$, $(\psi,\sigma)|_{PC(\mathbb{T})} = (t,\sigma)$ e $(\psi,\sigma)|_{C(\mathbb{T})} = t$.

Está-se agora em condições de definir a álgebra C^* de operadores cuja teoria de invertibilidade se vai desenvolver neste capítulo. Como $PSO(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T})$ pode identificar-se cada função $a \in PSO(\mathbb{T})$ com o operador de multiplicação por a em $L^2(\mathbb{T})$. Deste modo $PSO(\mathbb{T}) \subset B(L^2(\mathbb{T}))$. Seja G um grupo mediável e discreto de difeomorfismos de $\mathbb{T}$ em si próprio que preservam orientações e tal que os difeomorfismos $s \in G \setminus \{e\}$ possuem todos o mesmo conjunto de pontos fixos. Seja $U : G \to B(L^2(\mathbb{T}))$ a representação unitária de G tal que, para cada $s \in G$, o operador U_s é definido por

$$(U_s\xi)(t) := |(s^{-1})'(t)|^{1/2}\xi(s^{-1}(t))\,, \qquad \xi \in L^2(\mathbb{T}), t \in \mathbb{T}\,.$$

A álgebra C^* cuja teoria de invertibilidade se irá investigar é a subálgebra C^* de $B(L^2(\mathbb{T}))$, denotada por $\mathcal{B}$, gerada por $PSO(\mathbb{T})$ e pelo grupo de operadores unitários $U_G := \{U_s : s \in G\}$, ou seja,

$$\mathcal{B} := \text{alg}\{PSO(\mathbb{T}), U_G\}\,. \tag{3.2}$$

3.2 Representações do produto cruzado C^* e o método das trajectórias locais

Nesta secção são estudadas álgebras C^* geradas por sistemas dinâmicos implementados por um grupo mediável e discreto. Apresenta-se em primeiro lugar uma condição para a existência de um isomorfismo envolvendo o produto cruzado C^*. Em seguida, através da análise de uma classe de representações desse produto cruzado C^* estabelece-se o método das trajectórias locais, que fornece um critério de invertibilidade na álgebra gerada pelo sistema dinâmico.

Seja H um espaço de Hilbert e $B(H)$ a álgebra C^* dos operadores limitados em H. Sejam $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $B(H)$ e $\mathcal{Z}$ uma subálgebra C^* central de $\mathcal{A}$, ambas contendo o operador identidade $I \in B(H)$. Seja G um grupo discreto e $U : s \longmapsto U_s$ uma representação unitária de G em $B(H)$. Assuma-se que

(A1). *Para cada $s \in G$ as aplicações $\alpha_s : a \mapsto U_s\, a\, U_s^*$ são automorfismos-* das álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{Z}$.*

(A2). *G é um grupo mediável.*

Seja $\mathcal{B}$ a álgebra C^* gerada pelo sistema dinâmico $(\mathcal{A}, G, \alpha)$,

$$\mathcal{B} := \mathrm{alg}\{\mathcal{A}, U_G\},$$

ou seja, a álgebra gerada por $\mathcal{A}$ e pelo grupo de unitários $U_G := \{U_s : s \in G\}$. De acordo com $(A1)$, $\mathcal{B}$ é o fecho em $B(H)$ da álgebra $\mathcal{B}^0$ que consiste nos operadores da forma $b = \sum a_s U_s$, onde $a_s \in \mathcal{A}$ é diferente de 0 para apenas um número finito de $s \in G$. Mais adiante nesta secção, sob a hipótese de uma condição adicional, vai-se provar que $\mathrm{id} \rtimes U$ estabelece um isomorfismo entre o produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e a álgebra $\mathcal{B}$.

Do Teorema de Gelfand [1.1.11] a transformada de Gelfand estabelece um isomorfismo $\mathcal{Z} \cong C(M)$, onde M é o espaço dos funcionais lineares multiplicativos (ou equivalentemente, dos ideais maximais) de $\mathcal{Z}$. Assim, Proposição[2.1.3], cada automorfismo α_s de $\mathcal{Z}$ induz um homeomorfismo $\beta_s : M \longrightarrow M$ satisfazendo

$$\widehat{z}(\beta_s(m)) = \widehat{\alpha_s(z)}(m)\,, \qquad z \in \mathcal{Z}, m \in M\,,$$

onde $\widehat{z} \in C(M)$ denota a transformada de Gelfand do elemento $z \in Z$.

Seja $P_{\mathcal{A}}$ o conjunto dos estados puros de $\mathcal{A}$ equipado com a topologia fraca-*. Denote-se por J_m o ideal fechado de $\mathcal{A}$ gerado pelo ideal maximal $m \in M$ da álgebra C^* central $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$.

3.2.1. Lema - *Seja $\mu \in P_{\mathcal{A}}$ e $m := Z \cap Ker\,\mu = Ker\,\mu|_{\mathcal{Z}}$. Tem-se que $m \in M$ e $J_m \subset Ker\,\mu$.*

Dem: Pelo Teorema[1.1.29] tem-se que $\mu|_{\mathcal{Z}}$ é um homomorfismo e como $\mathcal{Z}$ possui a mesma unidade de $\mathcal{A}$ pode concluir-se que $\mu|_{\mathcal{Z}}$ é não-nulo, ou seja, $\mu|_{\mathcal{Z}}$ é um funcional linear multiplicativo de $\mathcal{Z}$. Tem-se então que $m := \mathrm{Ker}\mu|_{\mathcal{Z}}$ é um ideal maximal de $\mathcal{Z}$.

Tem-se que J_m é o fecho do espaço gerado pelos elementos da forma za, onde $z \in m$ e $a \in \mathcal{A}$. Novamente pelo Teorema[1.1.29] e por se ter $z \in m$ tem-se que $\mu(za) = \mu(z)\mu(a) = 0$. Conclui-se que $J_m \subset \mathrm{Ker}\mu$. □

Seja $\mu \in P_{\mathcal{A}}$. O Lema[3.2.1] assegura que $\mathcal{Z} \cap \mathrm{Ker}\,\mu = \mathrm{Ker}\,\mu|_{\mathcal{Z}}$ é um ideal maximal de $\mathcal{Z}$. Este ideal maximal será denotado por

$$m_\mu := \mathcal{Z} \cap \mathrm{Ker}\,\mu = \mathrm{Ker}\,\mu|_{\mathcal{Z}} \in M\,.$$

Assuma-se ainda a seguinte hipótese:

(A3). *Existe um conjunto* $M_0 \subseteq M$ *tal que para qualquer conjunto finito* $G_0 \subset G$ *e qualquer aberto não-vazio* $W \subset P_{\mathcal{A}}$ *existe* $\nu \in W$ *tal que* m_ν *pertence à* G*-órbita de* M_0 *e* $\beta_s(m_\nu) \neq m_\nu$ *para todo o* $s \in G_0 \setminus \{e\}$.

Para que $(A3)$ se verifique é suficiente tomar o conjunto M_0 como M e considerar-se apenas conjuntos singulares G_0. A referência a um conjunto M_0 com as proprieades descritas deve-se ao facto de que para estudar a invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$ basta analisar-se o conjunto M_0 e não todo o conjunto M, como será visto no método das trajectórias locais. Tem-se então a seguinte hipótese equivalente a $(A3)$:

(A3'). *Para qualquer* $s \in G \setminus \{e\}$ *e qualquer aberto não-vazio* $W \subset P_{\mathcal{A}}$ *existe* $\nu \in W$ *tal que* $\beta_s(m_\nu) \neq m_\nu$.

Se a álgebra $\mathcal{A}$ for comutativa o conjunto dos estados puros $P_{\mathcal{A}}$ coincide com o conjunto dos funcionais lineares multiplicativos de $\mathcal{A}$ (Teorema[1.1.28]), podendo portanto ser identificado com o conjunto dos ideais maximais $M(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. Se adicionalmente $\mathcal{Z}$ for tomada como a própria álgebra $\mathcal{A}$, então $(A3)$ pode ser rescrita na forma

(A3c). *Existe um conjunto* $M_0 \subseteq M(\mathcal{A})$ *tal que para qualquer conjunto finito* $G_0 \subset G$ *e qualquer aberto não-vazio* $W \subset M(\mathcal{A})$ *existe* $m_0 \in W$ *pertencente à* G*-órbita de* M_0 *tal que* $\beta_s(m_0) \neq m_0$ *para todo o* $s \in G_0 \setminus \{e\}$.

3.2.1 Isomorfismo com o produto cruzado C^*

Mostra-se nesta subsecção que, sob as hipóteses $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$, se tem um isomorfismo entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

3.2.2. Lema - *Suponha-se que* $(A1)$ *é satisfeita e que para qualquer elemento* $\sum a_s U_s$ *de* $\mathcal{B}^0$ *a seguinte igualdade se verifica:*

$$\|a_e\| \leq \|\sum a_s U_s\|. \tag{3.3}$$

Então qualquer elemento de $\mathcal{B}^0$ *pode ser escrito de forma única numa soma finita* $\sum a_s U_s$, *isto é, com coeficientes* $a_s \in \mathcal{A}$ *de* U_s *únicos.*

Dem: Basta verificar que se $\sum a_s U_s = 0$ então $a_s = 0$ para qualquer $s \in G$. Por (3.3) sai imediatamente que $a_e = 0$. Multiplicando por $U_{t^{-1}}$ tem-se que

$$\left(\sum a_s U_s\right) U_{t^{-1}} = \sum a_s U_{st^{-1}},$$

e novamente pela desigualdade (3.3) tem-se que $a_t = 0$. □

A aplicação $F_e : \mathcal{B}^0 \longrightarrow \mathcal{A}$ que devolve o coeficiente a_e,

$$F_e\left(\sum a_g U_g\right) := a_e\,, \tag{3.4}$$

está então bem definida, é linear e, por (3.3), é contínua. A existência e continuidade da aplicação F_e está na base do resultado seguinte, que sob algumas hipóteses adicionais, estabelece um isomorfismo entre $\mathcal{B}$ e o produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

3.2.3. Teorema - *Suponha-se que (A1) é satisfeita, que a desigualdade (3.3) se verifica para qualquer elemento de $\mathcal{B}^0$ e que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ são canonicamente isomorfos, isto é, que a aplicação quociente de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ é um isomorfismo. Então a forma integral* $\mathrm{id} \rtimes U$ *(2.4) estabelece um isomorfismo $\mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G \cong \mathcal{B}$.*

Dem: Seja $\mathrm{id} \rtimes U : C_c(G, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}$ a forma integral, definida em (2.4),

$$[\mathrm{id} \rtimes U]\,(f) := \sum_{s \in G} f(s) U_s\,,$$

associada à representação covariante (id, U), onde id é a representação identidade de $\mathcal{A}$. Por continuidade, $\mathrm{id} \rtimes U$ estende-se a um homomorfismo-* $\mathrm{id} \rtimes U : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathcal{B}$, e como $\mathrm{id} \rtimes U$ tem imagem densa, este homomorfismo-* é sobrejectivo (Teorema[1.1.15]). Resta mostrar que é também injectivo.

Como a desigualdade (3.3) é satisfeita por todos os elementos de $\mathcal{B}^0$, a aplicação $F_e : \mathcal{B}^0 \longrightarrow \mathcal{A}$, (3.4), está bem definida e é contínua. Para cada $s \in G$ definem-se também aplicações $F_s(b) := F_e(bU_{s^{-1}})$, com $b \in \mathcal{B}^0$. Estas aplicações são lineares, contínuas e satisfazem a propriedade

$$F_s\left(\sum a_t U_t\right) = a_s\,.$$

Para cada $s \in G$ sejam $E_s : \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G \longrightarrow \mathcal{A}$ as aplicações definidas em (2.9). É claro, das propriedades das aplicações F_s e E_s, que

$$F_s\big([\mathrm{id} \rtimes U](f)\big) = E_s(f)\,, \qquad f \in C_c(\mathcal{A}, G), s \in G\,.$$

Estendendo por continuidade as aplicações F_s a $\mathcal{B}$ e atendendo a que $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ canonicamente, ou seja, os completamentos de $C_c(G, \mathcal{A})$ nas normas $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_r$ são iguais, conclui-se que

$$F_s \circ [\mathrm{id} \rtimes U] = E_s \quad \text{em } \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G\,.$$

Logo, se $f \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ for tal que $[\mathrm{id} \rtimes U](f) = 0$ então, para qualquer $s \in G$, tem-se que $E_s(f) = 0$. Pelo Teorema[2.5.5] conclui-se que $f = 0$, ou seja, $\mathrm{id} \rtimes U$ é injectiva. $\square$

Mostra-se agora que sob as hipóteses $(A1)$ e $(A3)$ a desigualdade (3.3) é satisfeita por todos os elementos de $\mathcal{B}^0$.

3.2.4. Teorema - *Se* $(A1)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas, então a desigualdade*

$$\|a_e\| \leq \|\sum a_s U_s\|$$

é satisfeita por todos os elementos de $\mathcal{B}^0$*.*

Dem: Seja $b = \sum_{s \in G_0} a_s U_s$ um elemento de $\mathcal{B}^0$, onde $G_0 \subset G$ é um conjunto finito. Defina-se

$$\widetilde{a} := \sum_{s \in G_0} \alpha_s^{-1}(a_s^* a_s).$$

Pelo Teorema[1.1.26] existe um estado puro $\phi \in P_{\mathcal{A}}$ tal que $\|a_e\|^2 = \phi(a_e^* a_e)$. Como os elementos $\alpha_s^{-1}(a_s^* a_s)$ são positivos tem-se também que $\widetilde{a}$ é positivo (Teorema[1.1.22]). Pode então ver-se que

$$\|a_e\|^2 = \phi(a_e^* a_e) \leq \phi(\widetilde{a}).$$

Seja $\epsilon \geq 0$. Considere-se a vizinhança aberta $W \subset P_{\mathcal{A}}$ de ϕ definida por

$$W := \{\mu \in P_{\mathcal{A}} : |\phi(\widetilde{a}) - \mu(\widetilde{a})| < \epsilon\}.$$

De acordo com $(A3)$, aplicado ao conjunto finito $G_0' := \{s^{-1}t : s, t \in G_0\}$ e ao aberto W, existe um estado puro $\nu \in W$ tal que $\beta_s(m_\nu) \neq m_\nu$ para todo o $s \in G_0' \setminus \{e\}$. Tem-se então que

$$\|a_e\|^2 = \phi(a_e^* a_e) \leq \phi(\widetilde{a}) < \nu(\widetilde{a}) + \epsilon. \tag{3.5}$$

Como G_0' é um conjunto finito e as aplicações β_s são homeomorfismos de M, existe uma vizinhança aberta $\Delta \subset M$ de m_ν tal que

$$\beta_s(\Delta) \cap \Delta = \emptyset \tag{3.6}$$

para qualquer $s \in G_0'$. Seja $z_\Delta \in \mathcal{Z}$ um elemento de $\mathcal{Z}$ cuja transformada de Gelfand é uma função em M com valores no intervalo $[0,1]$ e tal que $z_\Delta(m_\nu) = 1$ e $z_\Delta(M \setminus \Delta) = \{0\}$.

Note-se que

$$b^* b = \widetilde{a} + \sum_{s,t \in G_0} \alpha_s^{-1}(a_s^* a_t) U_{s^{-1}t},$$

e portanto, como $\mathcal{Z}$ é uma subálgebra central de $\mathcal{A}$,

$$z_\Delta b^* b = z_\Delta \widetilde{a} + \sum_{s,t \in G_0} \alpha_s^{-1}(a_s^* a_t) z_\Delta U_{s^{-1}t}, \tag{3.7}$$

Pelo Teorema[1.1.29] tem-se que

$$\nu(z_\Delta \widetilde{a}) = \nu(z_\Delta)\nu(\widetilde{a}) = \nu(\widetilde{a})\,. \tag{3.8}$$

Seja ν_o uma extensão de ν a um estado puro de $B(H)$. Pelo Teorema[1.1.24] tem-se que

$$|\nu_o\big(\alpha_s^{-1}(a_s^* a_t)\, z_\Delta U_{s^{-1}t}\big)|^2 \leq \nu\big(\alpha_s^{-1}(a_s^* a_t a_t^* a_s)\big)\, \nu\big(U_{t^{-1}s}\, z_\Delta^2\, U_{s^{-1}t}\big)$$

para qualquer $s, t \in G_0$. Pelo modo como a vizinhança Δ foi escolhida (3.6), tem-se que

$$\nu\big(U_{t^{-1}s}\, z_\Delta^2\, U_{s^{-1}t}\big) = 0\,, \qquad\qquad \forall s, t \in G_0\,.$$

Pode então concluir-se que $|\nu_o(\alpha_s^{-1}(a_s^* a_t) z_\Delta U_{s^{-1}t})| = 0$ para qualquer $s, t \in G_0$, e portanto, recorrendo às igualdades (3.7) e (3.8),

$$\nu_o(z_\Delta b^* b) = \nu(\widetilde{a})\,. \tag{3.9}$$

Recorrendo novamente ao Teorema[1.1.24] tem-se que

$$|\nu_o(z_\Delta b^* b)|^2 \leq \nu(z_\Delta^2)\, \nu_o\big((b^* b)^* b^* b\big) \leq \|b\|^4,$$

o que juntamente com as expressões (3.5) e (3.9) permite concluir que

$$\|a_e\|^2 < \nu(\widetilde{a}) + \epsilon = \nu_o(z_\Delta b^* b) + \epsilon \leq \|b\|^2 + \epsilon,$$

ou seja, $\|a_e\|^2 < \|b\|^2 + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente, tem-se necessariamente que $\|a_e\| \leq \|b\|$. $\square$

3.2.5. Corolário - *Suponha-se que* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$ *são satisfeitas. Então a forma integral* $\mathrm{id} \rtimes U$ *estabelece um ismomorfismo* $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

Dem: Pelo Teorema[3.2.4] a desigualdade $\|a_e\| \leq \|\sum a_s U_s\|$ é satisfeita por todos os elementos de $\mathcal{B}^0$. Como por $(A2)$ o grupo G é mediável, tem-se um isomorfismo canónico $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ (Teorema[2.4.11]). Pelo Teorema[3.2.3] conclui-se que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$. $\square$

A hipótese $(A2)$, de G ser mediável, foi utilizada para garantir que o produto cruzado C^* e o produto cruzado C^* reduzido são isomorfos canonicamente (usando o Teorema[2.4.11]). Na verdade, se as hipóteses $(A1)$ e $(A3)$ forem satisfeitas e se $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha^r G$ canonicamente, a mesma demonstração permite ainda concluir que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$.

Existem exemplos de álgebras C^* e de grupos localmente compactos em que o produto cruzado e o produto cruzado reduzido são canonicamente isomorfos sem que o grupo seja mediável (ver [9, II.10.4.3], por exemplo). No entanto, para álgebras C^* com unidade e grupos discretos, as duas condições são de facto equivalentes ([14, Theorem 2.2]). A hipótese $(A2)$, de G ser mediável, é então não só a hipótese mais natural de ser assumida, dado que é uma condição que depende apenas do grupo e é satisfeita para uma classe muito ampla de grupos, mas também a hipótese mais geral para os resultados em questão.

3.2.2 Método das trajectórias locais

Enuncia-se agora o método das trajectórias locais, que sob as hipóteses $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$, estabelece um critério de invertibilidade para a álgebra $\mathcal{B}$ através da análise de uma classe das suas representações.

Assume-se no que se segue as condições $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$. Para cada $m \in M$ seja $\widetilde{\pi}_m$ uma representação fiel não-degenerada,

$$\widetilde{\pi}_m : \mathcal{A}/J_m \longrightarrow B(H_m)\,,$$

da álgebra C^* quociente $\mathcal{A}/J_m$ num espaço de Hilbert H_m. Através da aplicação quociente $q_m : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/J_m$ a representação $\widetilde{\pi}$ induz uma representação

$$\pi'_m : \mathcal{A} \longrightarrow B(H_m)\,, \qquad\qquad \pi'_m := \widetilde{\pi}_m \circ q_m\,.$$

Seja Ω o conjunto das G-órbitas dos pontos $m \in M_0$. Para cada $\omega \in \Omega$ escolha-se um ponto m_ω na G-órbita ω e, por simplicidade, é utilizada a seguinte notação: $H_\omega := H_{m_\omega}$ e $\pi'_\omega := \pi'_{m_\omega}$. Considere-se, para cada $\omega \in \Omega$, a representação $\pi_\omega : \mathcal{B} \longrightarrow B(L^2(G, H_\omega))$ definida por

$$[\pi_\omega(a)\xi](t) := \pi'_\omega\big(\alpha_t^{-1}(a)\big)\xi(t)\,, \qquad [\pi_\omega(U_s)\xi](t) := \xi(s^{-1}t)\,, \tag{3.10}$$

onde $a \in \mathcal{A}$, $s, t \in G$ e $\xi \in L^2(G, H_\omega)$.

3.2.6. Lema - *Suponha-se que $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ são satisfeitas. Então, para cada $\omega \in \Omega$, a representação π_ω de $\mathcal{B}$ em $L^2(G, H_\omega)$ dada por (3.10) está bem definida*

Dem: Seja $\big((\pi'_\omega)_\alpha, \lambda\big)$ a representação regular de $(\mathcal{A}, G, \alpha)$ associada à representação π'_ω de $\mathcal{A}$. Tomando a sua forma integral obtém-se uma representação $(\pi'_\omega)_\alpha \rtimes \lambda : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow B(L^2(G, H_\omega))$. Como as hipóteses $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ são satisfeitas, tem-se, pelo Corolário[3.2.5], que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ e portanto a representação $(\pi'_\omega)_\alpha \rtimes \lambda$ induz então uma representação Φ de $\mathcal{B}$ em $L^2(G, H_\omega)$. É simples verificar que para qualquer $a \in \mathcal{A}$ se tem

$$[\Phi(a)\xi](t) := \pi'_\omega\big(\alpha_t^{-1}(a)\big)\xi(t)\,, \qquad \xi \in L^2(G, H_\omega)\,, t \in G\,,$$

e para qualquer $s \in G$

$$[\Phi(U_s)\xi](t) := \xi(s^{-1}t)\,, \qquad \xi \in L^2(G, H_\omega)\,, t \in G,$$

É então suficiente tomar $\pi_\omega := \Phi$. $\square$

Estabelece-se agora o método das trajéctórias locais.

3.2.7. Teorema - *Suponha-se que $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ são satisfeitas. Então, um elemento $b \in \mathcal{B}$ é invertível se e só se para qualquer órbita $\omega \in \Omega$ o operador $\pi_\omega(b)$ é invertível em $L^2(G, H_\omega)$ e*

$$\sup\{\|\big(\pi_\omega(b)\big)^{-1}\| : \omega \in \Omega\} < \infty.$$

Esta última condição é automaticamente satisfeita quando Ω é finito.

Dem: Considere-se a representação $\pi := \bigoplus_{\omega\in\Omega} \pi_\omega$ de $\mathcal{B}$ no espaço de Hilbert $\bigoplus_{\omega\in\Omega} L^2(G, H_\omega)$. Vai demonstrar-se que π é um *-isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\pi(\mathcal{B})$. Para tal, começa-se por se verificar que isto acontece para a álgebra $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{A} \cong \pi(\mathcal{A})$. Pelo Teorema[1.1.15] basta verficar-se que π, quando restrita a $\mathcal{A}$, é injectiva. Suponha-se então que $\pi(a) = 0$ para algum $a \in \mathcal{A}$. Tem-se então que $\pi_\omega(a) = 0$ para qualquer $\omega \in \Omega$. Por definição de π_ω conclui-se que $\pi'_{m_\omega}(\alpha_s(a)) = 0$ para quaisquer $\omega \in \Omega$ e $s \in G$, ou seja,

$$\widetilde{\pi}_{m_\omega} \circ q_{m_\omega} \circ \alpha_s(a) = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega\,, s \in G\,.$$

Como $\widetilde{\pi}_{m_\omega}$ é injectiva por hipótese tem-se então que $q_{m_\omega} \circ \alpha_s(a) = 0$ para todo o $\omega \in \Omega$ e $s \in G$, ou seja,

$$\alpha_s(a) \in J_{m_\omega} \qquad \forall \omega \in \Omega\,, s \in G\,. \tag{3.11}$$

Para cada $Y \subseteq M$ defina-se

$$P_Y := \bigcup_{m\in Y} P_m\,, \qquad P_m := \{\mu \in P_{\mathcal{A}} : \mathrm{Ker}\mu|_Z = m\}.$$

Pelo Lema[3.2.1] e pela condição (3.11) pode concluir-se que se $\mu \in P_{m_\omega}$ então $\mu(\alpha_s(a)) = 0$, para quaisquer $\omega \in \Omega$ e $s \in G$. Como a acção de G em $P_{\mathcal{A}}$, dada para cada $s \in G$ por $\mu \mapsto \mu \circ \alpha_s$, leva P_m em $P_{\beta_s(m)}$ pode concluir-se que

$$\mu(a) = 0 \qquad \forall \mu \in P_{G(M_0)}\,.$$

Como por hipótese $P_{G(M_0)}$ é denso (na topologia fraca-*) em $P_{\mathcal{A}}$, tem-se que $\mu(a) = 0$ para qualquer estado puro $\mu \in P_{\mathcal{A}}$, o que implica que $a = 0$. Mostrou-se então que π é uma representação fiel de $\mathcal{A}$.

Considere-se a álgebra C^* $\pi(\mathcal{A})$, a subálgebra C^* central $\pi(\mathcal{Z})$ e a representação unitária de G dada por $s \longrightarrow \pi(U_s)$. Mostra-se em seguida que as condições (A_1), (A_2) e (A_3) são satisfeitas para estas álgebras.

- Seja $s \in G$. Para cada $\pi(a) \in \pi(\mathcal{A})$ tem-se que $\pi(U_s)\pi(a)\pi(U_s)^* = \pi(U_s a U_s^*) \in \pi(\mathcal{A})$, e de modo semelhante, para cada $\pi(z) \in \pi(\mathcal{Z})$ tem-se que $\pi(U_s)\pi(z)\pi(U_s)^* \in \pi(\mathcal{Z})$. Portanto, a aplicação $\alpha'_s : \pi(a) \mapsto \pi(U_s)\pi(a)\pi(U_s)^*$ é um automorfismo-* de $\pi(\mathcal{A})$ e $\pi(\mathcal{Z})$. Logo, a condição $(A1)$ é satisfeita.

- G é um grupo mediável, portanto $(A2)$ é obviamente satisfeita.

- Como as álgebras $\mathcal{Z}$ e $\pi(\mathcal{Z})$ são isomorfas, pode identificar-se o espaço dos ideais maximais de $\pi(\mathcal{Z})$ com M. Seja $P_{\pi(\mathcal{A})}$ o conjunto dos estados puros de $\pi(\mathcal{A})$. Como π é um isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\pi(\mathcal{A})$ tem-se que $\nu \longmapsto \nu \circ \pi^{-1}$ estabelece um homeomorfismo entre $P_{\mathcal{A}}$ e $P_{\pi(\mathcal{A})}$. Para cada $m \in M$, este homeomorfismo mapeia também $\{\nu \in P_{\mathcal{A}} : \mathrm{Ker}\nu|_{\mathcal{Z}} = m\}$ em $\{\nu' \in P_{\pi(\mathcal{A})} : \mathrm{Ker}\nu'|_{\pi(\mathcal{Z})} = m\}$, o que permite concluir que $(A3)$ é também satisfeita.

Como π é isomorfismo entre $\mathcal{A}$ e $\pi(\mathcal{A})$ a aplicação $\Psi : C_c(G, \mathcal{A}) \longrightarrow C_c(G, \pi(\mathcal{A}))$, definida por

$$\Psi(f)\,(s) = \pi(f(s))\,,$$

estende-se para um isomorfismo $\Psi : \mathcal{A} \rtimes_\alpha G \longrightarrow \pi(\mathcal{A}) \rtimes_{\alpha'} G$.

É claro que $\pi(\mathcal{B})$ é a álgebra gerada por $\pi(\mathcal{A})$ e pelo grupo de unitários $\{\pi(U_s) : s \in G\}$. Pelo Corolário[3.2.5] tem-se que $\mathrm{id} \rtimes \pi(U)$ estabelece um isomorfismo entre $\pi(\mathcal{A}) \rtimes_{\alpha'} G$ e $\pi(\mathcal{B})$. Pode ver-se facilmente que a representação π é dada como se indica no diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \rtimes_\alpha G \arrow[r] \arrow[d, "\Psi"] & \mathcal{B} \arrow[d, dotted, "\pi"'] \\
\pi(\mathcal{A}) \rtimes_{\alpha'} G \arrow[r] & \pi(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

onde as aplicações horizontais são respectivamente $\mathrm{id} \rtimes U$ e $\mathrm{id} \rtimes \pi(U)$. Como a aplicação da esquerda e as aplicações horizontais são isomorfismos, conclui-se que π é também um isomorfismo.

Se $b \in \mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{B}$, então $\pi(b)$ é invertível em $\pi(\mathcal{B})$, com inverso $\bigoplus_{\omega\in\Omega} \pi_\omega(b^{-1})$. Consequentemente, para cada $\omega \in \Omega$ o operador $\pi_\omega(b)$ é invertível e tem-se que $\sup\{\|\big(\pi_\omega(b)\big)^{-1}\| : \omega \in \Omega\} < \infty$. Reciprocamente, se para cada $\omega \in \Omega$ o operador $\pi_\omega(b)$ é invertível e $\sup\{\|\big(\pi_\omega(b)\big)^{-1}\| : \omega \in \Omega\} < \infty$, então $\bigoplus_{\omega\in\Omega} \pi_\omega(b)^{-1}$ define um operador limitado em $\bigoplus_{\omega\in\Omega} L^2(G, H_\omega)$ e é o inverso de $\pi(b)$. Como as álgebras C^* são fechadas para inversos (Teorema[1.1.6]), $\pi(b)$ é invertível em $\pi(\mathcal{B})$, e portanto b é invertível em $\mathcal{B}$. $\square$

Existem generalizações do método das trajectórias locais, baseadas em medidas espectrais, que permitem estudar a invertibilidade em álgebras geradas por sistemas dinâmicos C^* onde a condição $(A3)$ não é satisfeita (ver [6]).

3.3 A invertibilidade na álgebra de operadores funcionais

Nesta secção é estudada a invertibilidade na álgebra C^* de operadores funcionais

$$\mathcal{B} := \mathrm{alg}\{PSO(\mathbb{T}), U_G\} \subset B(L^2(\mathbb{T}))$$

definida no final da secção 3.1. Utilizar-se-á a mesma notação para uma função $a \in PSO(\mathbb{T})$ e para o respectivo operador de multiplicação em $L^2(\mathbb{T})$.

3.3.1. Lema - [4, Lemma 4.2] **-** *Seja $\lambda \in \mathbb{T}$, $a \in SO_\lambda$, β um homeomorfismo de $\mathbb{T}$ e λ_0 um ponto de $\mathbb{T}$ tal que $\beta(\lambda_0) = \lambda$. Se $\beta'(\lambda_0) \neq 0$, então $a \circ \beta \in SO_{\lambda_0}$.*

Pelo Lema[3.3.1], para qualquer $a \in PSO(\mathbb{T})$ e $s \in G$, tem-se que $a \circ s \in PSO(\mathbb{T})$. Portanto, para cada $s \in G$, a aplicação $\alpha_s : PSO(\mathbb{T}) \longrightarrow B(L^2(\mathbb{T}))$

definida por

$$\alpha_s(a) := U_s\, a\, U_s^* = a \circ s^{-1}$$

é um automorfismo-* de $PSO(\mathbb{T})$. Como os difeomorfismos $s \in G$ preservam a orientação de $\mathbb{T}$, cada automorfismo-* α_s induz um homeomorfismo $\beta_s : M(PSO(\mathbb{T})) \longrightarrow M(PSO(\mathbb{T}))$

$$\beta_s(\psi, \sigma) := (s(\psi), \sigma)\,,$$

onde $\psi \mapsto s(\psi)$ é o homeomorfismo de $M(SO(\mathbb{T}))$ dado por

$$\widehat{a}(s(\psi)) = (\widehat{a \circ s^{-1}})(\psi)$$

para qualquer $a \in SO(\mathbb{T})$ e $\psi \in M(SO(\mathbb{T}))$.

Seja Λ o conjunto dos pontos fixos de todos os difeomorfismos $s \in G$, ou seja, $\Lambda := \{t \in \mathbb{T} : s(t) = t,\ \forall s \in G\}$.

3.3.2. Lema - [6, Lemma 4.2] **-** *O conjunto dos pontos fixos comuns a todos os homeomorfismos β_s, com $s \in G$, é*

$$\mathcal{M}_\Lambda := \bigcup_{t\in\Lambda} M_t(SO(\mathbb{T})) \times \{0,1\} \subset M(PSO(\mathbb{T}))\,.$$

Sejam Λ° o interior de Λ e $\Lambda_\pm$ os conjuntos de pontos $t \in \partial\Lambda$ que são pontos limite dos conjuntos $V_t^\pm \cap \Lambda^\circ$ respectivamente, onde V_t^+ (V_t^-) é uma semi-vizinhança à direita (esquerda) de t em $\mathbb{T}$. Sejam ainda Λ_d° e Λ_e° os conjuntos de pontos iniciais e finais respectivamente de todos os arcos abertos que constituem o conjunto Λ°. Tem-se que $\overline{\Lambda^\circ} = \Lambda^\circ \cup \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ e ainda $\Lambda_d^\circ \subset \Lambda_-$ e $\Lambda_e^\circ \subset \Lambda_+$.

Sejam $\mathbb{T}_{arc}^* := \mathbb{T} \setminus \overline{\Lambda^\circ}$ e $\Lambda_* := \Lambda_+ \cup \Lambda_-$. Os conjuntos Λ°, $\mathbb{T}_{arc}^*$ e Λ_* são disjuntos, invariantes pela acção de G e a sua união é $\mathbb{T}$. Sendo χ°, χ_{arc} e χ_* as correspondentes funções características, tem-se imediatamente que

3.3.3. Lema - *Um operador $A \in \mathcal{B}$ é invertível em $L^2(\mathbb{T})$ se e só se as seguintes três condições se verificam:*

(i) se $\mathrm{med}(\Lambda^\circ) > 0$, *o operador $\chi^\circ A$ é invertível em $L^2(\Lambda^\circ)$,*

(ii) se $\mathrm{med}(\mathbb{T}_{arc}^*) > 0$, *o operador $\chi_{arc} A$ é invertível em $L^2(\mathbb{T}_{arc}^*)$,*

(iii) se $\mathrm{med}(\Lambda_*) > 0$, *o operador $\chi_* A$ é invertível em $L^2(\Lambda_*)$.*

onde $\mathrm{med}(S)$ *é a medida de Lebesgue do subconjunto $S \subseteq \mathbb{T}$.*

O estudo da invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$ fica deste modo reduzido ao estudo da invertibilidade em cada um dos espaços $L^2(\Lambda^\circ)$, $L^2(\mathbb{T}_{arc}^*)$ e $L^2(\Lambda_*)$.

Sejam $\mathcal{M}^\circ$, $\mathcal{M}^*_{arc}$ e $\mathcal{M}_*$ os seguintes subconjuntos de $M(PSO(\mathbb{T}))$:

$$\mathcal{M}^\circ := \bigcup_{t\in\Lambda^\circ} M_t(SO(\mathbb{T}))\times\{0,1\}\,,$$
$$\mathcal{M}^*_{arc} := \bigcup_{t\in\mathbb{T}^*_{arc}} M_t(SO(\mathbb{T}))\times\{0,1\}\,,$$
$$\mathcal{M}_* := \bigcup_{t\in\Lambda_*} M_t(SO(\mathbb{T}))\times\{0,1\}\,.$$

Os conjuntos $\mathcal{M}^\circ$ e $\mathcal{M}^*_{arc}$ são abertos e invariantes pela acção dos homeomorfismos β_s, com $s\in G$. O conjunto $\mathcal{M}_*$ é fechado e também invariante pela acção de G.

Considere-se as seguintes subálgebras C^* de $B(L^2(\Lambda^\circ))$, $B(L^2(\mathbb{T}^*_{arc}))$ e $B(L^2(\Lambda_*))$ respectivamente,

$$\mathcal{B}^\circ := \mathrm{alg}\{\chi^\circ a,\ \chi^\circ U_s : a\in PSO(\mathbb{T}),\ s\in G\}\,,$$
$$\mathcal{B}_{arc} := \mathrm{alg}\{\chi_{arc}\, a,\ \chi_{arc}\, U_s : a\in PSO(\mathbb{T}),\ s\in G\}\,,$$
$$\mathcal{B}_* := \mathrm{alg}\{\chi_*\, a,\ \chi_*\, U_s : a\in PSO(\mathbb{T}),\ s\in G\}\,.$$

As álgebras $\mathcal{B}^\circ$, $\mathcal{B}_{arc}$ e $\mathcal{B}_*$ são quocientes de $\mathcal{B}$ pois as aplicações

$$A\mapsto \chi^\circ A\,,\qquad A\in\mathcal{B}\,,$$
$$A\mapsto \chi_{arc}A\,,\qquad A\in\mathcal{B}\,,$$
$$A\mapsto \chi_* A\,,\qquad A\in\mathcal{B}\,,$$

são homomorfismos-* de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}^\circ$, $\mathcal{B}_{arc}$ e $\mathcal{B}_*$ respectivamente.

Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contém as funções contínuas e $M(\mathcal{A})$ o seu espaço de funcionais lineares multiplicativos. Dado um conjunto $\Delta\subset\mathbb{T}$, denotar-se-á por M_Δ o conjunto das fibras $M_s(\mathcal{A})$ com $s\in\Delta$.

3.3.4. Lema - *Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contém as funções contínuas. Se uma função $a\in\mathcal{A}$ se anula num aberto $\Delta_1\subset\mathbb{T}$ então*

$$\phi(a)=0\,,\qquad \forall\phi\in M_{\Delta_1}\,.$$

Dem: Seja $\Delta_2\subset\Delta_1$ um aberto cujo fecho $\overline{\Delta_2}$ está contido em Δ_1. Seja h uma função contínua que vale 1 em Δ_2 e 0 no complementar de Δ_1. Tem-se que $ha=0$. Seja ϕ um elemento de M_{Δ_2}. Tem-se que

$$0=\phi(ha)=\phi(h)\phi(a)=\phi(a)$$

pois $\phi(h)=h(s)\neq 0$ para algum $s\in\Delta_2$ dado que h é contínua. Como o conjunto Δ_2 pode ser escolhido arbitrariamente dentro de Δ_1, tem-se que $\phi(a)=0$ para qualquer $\phi\in M_{\Delta_1}$. $\square$

3.3.5. Lema - *Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contém as funções contínuas e Δ_1 um aberto em $\mathbb{T}$. Se $a \in \mathcal{A}$ for tal que*

$$\phi(a) = 0\,, \qquad\qquad \forall \phi \in M_{\Delta_1}\,,$$

então a anula-se em Δ_1.

Dem: Sejam Δ_2 e Δ abertos de t satisfazendo

$$\Delta_2 \subset \overline{\Delta_2} \subset \Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Delta_1\,.$$

Seja h uma função contínua que vale 1 em $\overline{\Delta_2}$ e 0 no complementar de Δ. Como $\mathcal{A}$ contém as funções contínuas, tem-se que $ha \in \mathcal{A}$. Caso $\phi \in M_{\mathbb{T}\setminus\overline{\Delta}}$ tem-se que $\phi(ha) = \phi(a)\phi(h) = 0$ pois h anula-se em $\mathbb{T} \setminus \overline{\Delta}$. Caso $\phi \in M_{\Delta_1}$ então $\phi(ha) = \phi(h)\phi(a) = 0$ por hipótese. Logo $\phi(ha) = 0$ para qualquer funcional linear multiplicativo de $\mathcal{A}$, o que significa que $ha = 0$. Conclui-se que a tem que se anular em Δ_2. Como o conjunto Δ_2 pode ser escolhido arbitrariamente dentro de Δ_1, tem-se que a se anula em Δ_1.□

3.3.6. Teorema - *Seja $\mathcal{A}$ uma subálgebra C^* de $L^\infty(\mathbb{T})$ que contém as funções contínuas e Δ um aberto em $\mathbb{T}$. Então o conjunto dos ideais maximais de $\chi_\Delta\mathcal{A}$ é homeomorfo a $\overline{\mathcal{M}_\Delta}$. O homeomorfismo faz corresponder a cada funcional linear multiplicativo ϕ de $\chi_\Delta\mathcal{A}$ o funcional linear multiplicativo $\widetilde{\phi}$ de $\mathcal{A}$ dado por*

$$\widetilde{\phi}(a) := \phi(\chi_\Delta a)\,, \qquad\qquad a \in \mathcal{A}\,.$$

Consequentemente as álgebras C^* $\chi_\Delta\mathcal{A}$ e $C(\overline{\mathcal{M}_\Delta})$ são isomorfas-.*

Dem: A aplicação $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ é contínua pois se $\{\phi_i\}$ é uma rede convergente para $\phi_\circ$ então, para qualquer $a \in \mathcal{A}$,

$$\widetilde{\phi_i}(a) = \phi_i(\chi_\Delta a) \longrightarrow \phi_\circ(\chi_\Delta a) = \widetilde{\phi_\circ}(a)\,,$$

ou seja, $\{\widetilde{\phi_i}\}$ converge para $\widetilde{\phi_\circ}$. Como a aplicação $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ é claramente injectiva e o conjunto dos ideais maximais de $\chi_\Delta\mathcal{A}$ é compacto, a aplicação $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ é um homeomorfismo na sua imagem.

Mostra-se agora que a imagem do homeomorfismo $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ contém $\mathcal{M}_\Delta$. Seja $\Phi \in \mathcal{M}_\Delta$. Define-se um funcional linear multiplicativo ϕ de $\chi_\Delta\mathcal{A}$ por

$$\phi(\chi_\Delta a) := \Phi(a)\,. \tag{3.12}$$

Repare-se que a aplicação ϕ está bem definida pois, como Δ é aberto em $\mathbb{T}$, se existirem $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $\chi_\Delta a = \chi_\Delta b$ então $a - b$ anula-se em Δ, o que pelo Lema[3.3.4] implica que $\Phi(a - b) = 0$, ou seja, $\Phi(a) = \Phi(b)$. É claro que $\widetilde{\phi} = \Phi$ e portanto a imagem de homeomorfismo contém $\mathcal{M}_\Delta$.

Sendo compacta, a imagem do homeomorfismo $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ terá então de conter $\overline{\mathcal{M}_\Delta}$. Mostra-se agora que não contém mais pontos para além destes. Suponha-se por absurdo que a imagem do homeomorfismo contém um ponto Φ de $M(\mathcal{A})$ tal que $\Phi \notin \overline{\mathcal{M}_\Delta}$. Existe então um elemento não-nulo $\chi_\Delta a \in \chi_\Delta \mathcal{A}$ tal que a transformada de Gelfand de a se anula em $\mathcal{M}_\Delta$. Pelo Lema[3.3.5] tem-se necessariamente que a se anula em Δ e portanto $\chi_\Delta a = 0$, o que é uma contradição. $\square$

Seja $\mathbb{T}_{arc} := \mathbb{T} \setminus \Lambda$ e $\Lambda^{ext} := \Lambda \setminus \Lambda^\circ$. Tem-se que Λ°, $\mathbb{T}_{arc}$ e Λ^{ext} formam uma partição de $\mathbb{T}$, em que os dois primeiros conjuntos são abertos e o terceiro é um fechado de interior vazio. Note-se que, em particular, $\Lambda_* \subset \Lambda^{ext}$. Denote-se por $\mathcal{M}^{ext}$ (resp. $\mathcal{M}_{arc}$) o subconjunto de $M(PSO(\mathbb{T}))$ formado pelas fibras que estão sobre Λ^{ext} (resp. $\mathbb{T}_{arc}$), ou seja,

$$\mathcal{M}^{ext} := \bigcup_{t \in \Lambda^{ext}} M_t(SO(\mathbb{T})) \times \{0,1\}\,,$$
$$\mathcal{M}_{arc} := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_{arc}} M_t(SO(\mathbb{T})) \times \{0,1\}\,.$$

3.3.7. Proposição - *Tem-se que $\mathcal{M}^{ext}$ tem interior vazio. Em particular, $\mathcal{M}_*$ tem também interior vazio.*

Dem: Suponha-se, por absurdo, que existe um aberto $W \subset \mathcal{M}^{ext}$. Então existe também um elemento $a \in PSO(\mathbb{T})$ cuja transformada de Gelfand, $\widehat{a}$, é uma função contínua não-nula com suporte em W. Neste caso $\widehat{a}$ anula-se em $\mathcal{M}^\circ$ e em $\mathcal{M}_{arc}$, logo pelo Lema[3.3.5] tem-se que a se anula em Λ° e em $\mathbb{T}_{arc}$. Mostra-se agora que não pode existir nenhuma função em $PSO(\mathbb{T})$ com essa propriedade. Como $a \neq 0$ tem que existir um $\delta > 0$ tal que o conjunto de pontos onde $\delta < |a|$ tem medida positiva. Denote-se este conjunto por V. É claro das observações anteriores que V tem que estar contido em Λ^{ext} e que $\delta < \|a\|_\infty$.

Tem-se também que $|a|$ pode ser aproximado por elementos de $PSO^0(\mathbb{T})$ e seja $b \in PSO^0(\mathbb{T})$ tal que $\||a| - b\|_\infty < \frac{\delta}{4}$. Como $b \in PSO^0(\mathbb{T})$, existe apenas um número finito de pontos onde b não é contínua. Seja $\Delta \subset \mathbb{T}$ um aberto onde b é contínua, tal que $\Delta \cap V$ tem medida positiva (por exemplo, o conjunto $\mathbb{T}$ excepto os pontos de descontinuidade). Como a se anula em $\Lambda^\circ \cup \mathbb{T}_{arc}$ tem-se que

$$\|b\|_{L^\infty(\Delta \cap (\Lambda^\circ \cup \mathbb{T}_{arc}))} = \||a| - b\|_{L^\infty(\Delta \cap (\Lambda^\circ \cup \mathbb{T}_{arc}))} < \frac{\delta}{4}\,.$$

Como b é contínua em Δ, e o conjunto $\Delta \cap \left(\Lambda^\circ \cup \mathbb{T}_{arc}\right)$ é denso em Δ, tem-se que $\|b\|_{L^\infty(\Delta)} < \frac{\delta}{4}$. No entanto, como

$$\|a\|_{L^\infty(\Delta \cap V)} - \|b\|_{L^\infty(\Delta \cap V)} \leq \||a| - b\|_{L^\infty(\Delta \cap V)} < \frac{\delta}{4}$$

e $\delta < \|a\|_{L^\infty(\Delta \cap V)}$, pois $\Delta \cap V$ tem medida positiva, tem-se que

$$\frac{3\delta}{4} < \|b\|_{L^\infty(\Delta \cap V)}\,,$$

o que é uma contradição já que $\|b\|_{L^\infty(\Delta\cap V)} < \frac{\delta}{4}$. $\square$

Usando o Lema[3.3.5] pode agora dar-se uma demonstração relativamente simples da Proposição[3.1.4]:

Dem da Proposição[3.1.4]: Viu-se antes de se enunciar a Proposição[3.1.4] que $M_t(SO_\lambda(\mathbb{T})) = \{t\}$ para $t \in \mathbb{T}\backslash\{\lambda\}$. É então claro que $\mathbb{T}\backslash\{\lambda\} \subset M(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ e como $M(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ é compacto tem-se que $\overline{\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}} \subset M(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ (onde o fecho está obviamente a ser tomado na topologia fraca-*). Suponha-se agora que o interior de $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ é não-vazio. Existe então uma função $f \in SO_\lambda(\mathbb{T})$ cuja transformada de Gelfand, $\widehat{f}$, é não-nula e tem suporte no interior de $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T}))$. Como $\widehat{f}$ se anula em $M_t(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ para qualquer $t \in \mathbb{T}\setminus\{\lambda\}$ tem-se, pelo Lema[3.3.5], que f se anula em $\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}$. Sendo f um elemento de $L^\infty(\mathbb{T})$ é claro que $f = 0$, o que é uma contradição. Conclui-se que $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T}))$ tem interior vazio e portanto $M_\lambda(SO_\lambda(\mathbb{T})) = \overline{\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}} \setminus \big(\mathbb{T}\setminus\{\lambda\}\big)$. $\square$

3.3.1 A invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}_{arc}$

Nesta subsecção estabelece-se um critério de invertibilidade para a álgebra $\mathcal{B}_{arc}$ a partir do método das trajectórias locais.

Considere-se a subálgebra C^* $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ de $B(L^2(\mathbb{T}^*_{arc}))$ e a representação unitária de G em $B(L^2(\mathbb{T}^*_{arc}))$ dada por $s \mapsto \chi_{arc}\,U_s$. Por definição tem-se que

$$\mathcal{B}_{arc} = \operatorname{alg}\{\chi_{arc}PSO(\mathbb{T}),\, \chi_{arc}U_G\}\,,$$

onde $\chi_{arc}U_G := \{\chi_{arc}\,U_s : s \in G\}$. Para cada $s \in G$ as aplicações $\alpha_{s,\,arc} := \chi_{arc}\,\alpha$, definidas para cada $\chi_{arc}\,a \in \chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ por

$$\alpha_{s,\,arc}(\chi_{arc}\,a) := \chi_{arc}\,U_s\,\chi_{arc}\,a\,\chi_{arc}\,U_s^* = \chi_{arc}(a \circ s^{-1})$$

são automorfismos-* de $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$. Como G é um grupo mediável tem-se imediatamente que as condições $(A1)$ e $(A2)$ da secção 3.2 são satisfeitas para a álgebra $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ e a representação unitária $\chi_{arc}U_G$.

Pelo Teorema[3.3.6] o conjunto $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$ é canonicamente identificado com o espaço dos ideais maximais de $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$. Os automorfismos-* $\alpha_{s,\,arc}$ induzem assim homeomorfismos $\beta_{s,\,arc}$ em $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$, que são precisamente as restrições dos homeomorfismos β_s de $\mathcal{M}$ ao conjunto $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$. Pelo Lema[3.3.2] $\mathcal{M}_\Lambda \cap \mathcal{M}^*_{arc}$ é conjunto dos pontos fixos de todos os homeomorfismos $\beta_{s,\,arc}$.

A Proposição[3.3.7] juntamente com o facto de $\mathbb{T}_{arc}$ ser denso em $\mathbb{T}^*_{arc}$ garantem que $\overline{\mathcal{M}_{arc}} = \overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$, ou seja, $\mathcal{M}_{arc}$ é denso em $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$.

Mostra-se agora que a condição $(A3)$ é satisfeita pela a álgebra $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ e a representação unitária $\chi_{arc}U_G$. Seja W um aberto de $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$ e $G_0 \subset G$ um subconjunto finito. Como $\mathcal{M}_{arc}$ é denso em $\overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$, existe um elemento (ψ,σ) de $\mathcal{M}_{arc}$ que pertence a W. Sendo $t \in \mathbb{T}_{arc}$ tal que $(\psi,\sigma) \in M_t(SO(\mathbb{T})) \times \{0,1\}$, tem-se que t não é fixo para nenhum difeomorfismo $s \in G_0 \setminus \{e\}$. Como $s(\psi) \in M_{s^{-1}(t)}(SO(\mathbb{T}))$, tem-se que (ψ,σ) não é fixo por nenhum homeomorfismo $\beta_{s,\,arc}$, com $s \in G_0$. Conclui-se que a condição $(A3)$ é satisfeita com $M_0 := \mathcal{M}_{arc}$.

Para cada $(\psi,\sigma)\in\mathcal{M}_{arc}$ seja $J_{(\psi,\sigma)}$ o ideal maximal de $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ que lhe está associado. Como $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})$ é uma álgebra C^* comutativa, a aplicação $\widetilde{\pi}_{(\psi,\sigma)}:\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})/J_{(\psi,\sigma)}\longrightarrow\mathbb{C}$, dada por

$$\widetilde{\pi}_{(\psi,\sigma)}\big(\chi_{arc}a+J_{(\psi,\sigma)}\big):=\widehat{a}(\psi,\sigma)\,,$$

é um isomorfismo-* de $\chi_{arc}PSO(\mathbb{T})/J_{(\psi,\sigma)}$ em $\mathbb{C}$. Seguindo os passos do método das trajectórias locais (subsecção 3.2.2) e o Lema[3.2.6], constrói-se uma representação $\pi_{(\psi,\sigma)}:\mathcal{B}_{arc}\longrightarrow B(L^2(G))$ definida por

$$\begin{cases}[\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}\,a)\xi](t):=\widehat{(a\circ t)}(\psi,\sigma)\;\xi(t)\\ [\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}\,U_s)\xi](t):=\xi(s^{-1}t)\,,\end{cases}\tag{3.13}$$

onde $a\in PSO(\mathbb{T})$, $s,t\in G$ e $\xi\in L^2(G)$. A representação $\pi_{(\psi,\sigma)}$ pode ser escrita da seguinte forma: para cada operador $A=\sum_{s\in F}\chi_{arc}\,a_sU_s$, onde $F\subset G$ é um conjunto finito, $\pi_{(\psi,\sigma)}(A)=:A_{(\psi,\sigma)}$ é o operador em $L^2(G)$ dado por

$$[A_{(\psi,\sigma)}\xi]\;(t)=\sum_{s\in F}[\widehat{(a_s\circ t)}(\psi,\sigma)]\;\xi(s^{-1}t)\,,\tag{3.14}$$

onde $t,s\in G$ e $\xi\in L^2(G)$.

Seja $\mathcal{O}_{arc}$ um subconjunto de $\mathbb{T}_{arc}$ contendo exactamente um ponto em cada G-órbita definida pela acção de G em $\mathbb{T}_{arc}$, e seja $\mathcal{R}_{arc}$ o conjunto

$$\mathcal{R}_{arc}:=\bigcup_{t\in\mathcal{O}_{arc}}M_t(PSO(\mathbb{T}))\,.\tag{3.15}$$

O conjunto $\mathcal{R}_{arc}$ contém exactamente um ponto de cada G-órbita definida pela acção de G em $\mathcal{M}_{arc}$. O método das trajéctorias locais, Teorema[3.2.7], fornece assim o seguinte critério de invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}_{arc}$:

3.3.8. Teorema - *Para cada $A\in\mathcal{B}$, o operador $\chi_{arc}A\in\mathcal{B}_{arc}$ é invertível em $L^2(\mathbb{T}^*_{arc})$ se e só se para qualquer $(\psi,\sigma)\in\mathcal{R}_{arc}$ o operador $\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}A)$ definido por (3.13) é invertível em $L^2(G)$ e*

$$\sup_{(\psi,\sigma)\in\mathcal{R}_{arc}}\|\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}A)^{-1}\|<\infty\,.$$

3.3.2 A invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}^\circ$

Como $\Lambda^\circ\subset\Lambda$ contém apenas pontos fixos comuns a todos os difeomorfismos $s\in G$, cada operador $\chi^\circ U_s$ é o operador identidade em $L^2(\Lambda^\circ)$. Portanto, para qualquer operador em $\mathcal{B}$ da forma $A=\sum_{s\in F}a_sU_s$, onde $F\subset G$ é um conjunto finito, tem-se que $\chi^\circ A=\chi^\circ\sum_{s\in F}a_s$, donde se conclui que $\mathcal{B}^\circ=\chi^\circ PSO(\mathbb{T})$. Pelo Teorema[3.3.6] as álgebras $\chi^\circ PSO(\mathbb{T})$ e $C(\overline{\mathcal{M}^\circ})$ são isomorfas de forma canónica e portanto um operador $\chi^\circ A\in\mathcal{B}^\circ$ é invertível em $L^2(\Lambda^\circ)$ se e só se $\widehat{\chi^\circ A}$ é invertível em $C(\overline{\mathcal{M}^\circ})$. Obtém-se deste modo o seguinte critério de invertibilidade em $\mathcal{B}^\circ$:

3.3.9. Teorema - *Para cada $A \in \mathcal{B}$, o operador $\chi^\circ A \in \mathcal{B}^\circ$ é invertível em $L^2(\Lambda^\circ)$ se e só se $\widehat{\chi^\circ A}(\psi, \sigma) \neq 0$ para todo $(\psi, \sigma) \in \overline{\mathcal{M}^\circ}$.*

3.3.3 A invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}_*$

Nesta subsecção mostra-se que a invertibilidade nas álgebras $\mathcal{B}^\circ$ e $\mathcal{B}_{arc}$ implica a invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}_*$.

Como $\Lambda_* \subset \Lambda$ contém apenas pontos fixos comuns a todos os difeomorfismos $s \in G$, cada operador $\chi_* U_s$ é o operador identidade em $L^2(\Lambda_*)$. Portanto, de modo semelhante à álgebra $\mathcal{B}^\circ$, para qualquer operador em $\mathcal{B}$ da forma $A = \sum_{s \in F} a_s U_s$, onde $F \subset G$ é um conjunto finito, tem-se que $\chi_* A = \chi_* \sum_{s \in F} a_s$, donde se conclui que $\mathcal{B}_* = \chi_* PSO(\mathbb{T})$.

3.3.10. Lema - *O conjunto dos ideais maximais de $\chi_* PSO(\mathbb{T})$ é homeomorfo a um subconjunto de $\mathcal{M}_*$. O homeomorfismo faz corresponder a cada funcional linear multiplicativo ϕ de $\chi_* PSO(\mathbb{T})$ o funcional linear multiplicativo $\widetilde{\phi}$ de $PSO(\mathbb{T})$ dado por*

$$\widetilde{\phi}(a) := \phi(\chi_* a)\,, \qquad\qquad a \in PSO(\mathbb{T})\,.$$

Dem: Analogamente à demonstração do Teorema[3.3.6] se mostra que a aplicação $\phi \to \widetilde{\phi}$ é contínua. Sendo injectiva e como o conjunto dos ideais maximais de $\chi_* PSO(\mathbb{T})$ é compacto, tem-se que a aplicação $\phi \to \widetilde{\phi}$ é um homeomorfismo na sua imagem.

Mostra-se agora que a imagem do homeomorfismo $\phi \to \widetilde{\phi}$ está contida em $\mathcal{M}_*$. Seja ϕ um funcional linear multiplicativo de $\chi_* PSO(\mathbb{T})$. Suponha-se por absurdo que $\widetilde{\phi}|_{C(\mathbb{T})} = t$ com $t \in \mathbb{T} \setminus \Lambda_*$. Como Λ_* é fechado existe $a \in C(\mathbb{T})$ que toma o valor 1 em t e 0 em Λ_*. Mas então $\phi(\chi_* a) = 0$, o que é uma contradição. Logo $\widetilde{\phi}|_{C(\mathbb{T})} = t$ com $t \in \Lambda_*$, ou seja, a imagem do homeomorfismo $\phi \to \widetilde{\phi}$ está contida em $\mathcal{M}_*$. $\square$

O subconjunto de $\mathcal{M}_*$ correspondente aos ideais maximais de $\chi_* PSO(\mathbb{T})$ será denotado por $\mathcal{M}_*^{sub}$. Assume-se que a transformada de Gelfand $\widehat{\chi_* A}$ de um operador $A \in \mathcal{B}$ está definida em $\mathcal{M}_*^{sub}$, de acordo com o Lema[3.3.10].

3.3.11. Proposição - *Dado um operador $A \in \mathcal{B}$, o operador $\chi_* A$ é invertível em $L^2(\Lambda_*)$ se e só se $\widehat{\chi_* A}(\psi, \sigma) \neq 0$ para todo $(\psi, \sigma) \in \mathcal{M}_*^{sub}$.*

Suponha-se agora que dado $A \in \mathcal{B}$, os operadores $\chi^\circ A$ e $\chi_{arc} A$ são invertíveis em $L^2(\Lambda^\circ)$ e $L^2(\mathbb{T}^*_{arc})$, respectivamente. Então, para qualquer $(\psi, \sigma) \in \overline{\mathcal{M}^\circ} \cap \mathcal{M}_*^{sub}$ tem-se, pelo Teorema[3.3.9], que $\widehat{\chi_\circ A}(\psi, \sigma) \neq 0$. Pelo Lema[3.3.10] e Teorema[3.3.6] verifica-se que, para operadores da forma $A = \sum_{s \in F} a_s U_s$ onde $F \subset G$ é um conjunto finito, $\widehat{\chi_\circ A} = \widehat{\chi_* A}$ em $\overline{\mathcal{M}^\circ} \cap \mathcal{M}_*^{sub}$. Como estes operadores formam um subconjunto denso em $\mathcal{B}$, a igualdade mantém-se qualquer que seja $A \in \mathcal{B}$. Conclui-se então que $\widehat{\chi_* A}(\psi, \sigma) \neq 0$.

Considere-se agora $(\psi, \sigma) \in \overline{\mathcal{M}^*_{arc}} \cap \mathcal{M}^{sub}_*$. É claro que (ψ, σ), visto como um funcional linear multiplicativo, é uma representação irredutível de $\chi_{arc} PSO(\mathbb{T})$ em $\mathbb{C}$. Considere-se ainda a representação unitária constante $u : G \to \mathbb{C}$, tal que $u_s = 1$ para qualquer $s \in G$. Tem-se que $\big((\psi, \sigma), u\big)$ é uma representação covariante de $(\chi_{arc} PSO(\mathbb{T}), G, \alpha_{arc})$, pois para $\chi_{arc} a \in \chi_{arc} PSO(\mathbb{T})$ tem-se que

$$\begin{aligned} u_s[(\psi, \sigma)(\chi_{arc}\, a)] u_{s^{-1}} &= (\psi, \sigma)(\chi_{arc}\, a) \\ &= (\psi, \sigma)(\chi_{arc}\, (a \circ s^{-1})) \\ &= (\psi, \sigma)(\alpha_{s,\, arc}\, (\chi_{arc}\, a))\,, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade provém do facto de (ψ, σ) pertencer a $\mathcal{M}_*$, sendo portanto fixo pela acção de G (Lema[3.3.2]).

Como a álgebra $\mathcal{B}_{arc}$ satisfaz as condições $(A1)$, $(A2)$ e $(A3)$ tem-se que, pelo Corolário[3.2.5], $\mathcal{B}_{arc}$ é o produto cruzado $\chi_{arc} PSO(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_{arc}} G$. Tem-se então que a forma integral $\Pi_{(\psi,\sigma)} := (\psi, \sigma) \rtimes u$ define uma representação de $\mathcal{B}_{arc}$ em $\mathbb{C}$ (Teorema[2.4.8]). A representação $\Pi_{(\psi,\sigma)}$ é dada, para operadores da forma $\sum_{s \in F} \chi_{arc}\, a_s U_s$ onde $F \subset G$ é um conjunto finito, por

$$\Pi_{(\psi,\sigma)} \left(\sum_{s \in F} \chi_{arc}\, a_s U_s \right) := \sum_{s \in F} (\psi, \sigma)(\chi_{arc}\, a_s) = \sum_{s \in F} \widehat{a_s}(\psi, \sigma)\,.$$

Por hipótese, o operador $\chi_{arc} A$ é invertível em $L^2(\mathbb{T}^*_{arc})$ e portanto $\Pi_{(\psi,\sigma)}(A) \neq 0$. Pelo Lema[3.3.10] verifica-se que $\Pi_{(\psi,\sigma)}(A) = \widehat{\chi_* A}(\psi, \sigma)$ para operadores da forma $A = \sum_{s \in F} a_s U_s$ onde $F \subset G$ é um conjunto finito. Como estes operadores formam um subconjunto denso de $\mathcal{B}$, a igualdade mantém-se para qualquer $A \in \mathcal{B}$. Conclui-se então que $\widehat{\chi_* A}(\psi, \sigma) \neq 0$.

Pela Proposição[3.3.7] tem-se que $\mathcal{M}^{sub}_* \subseteq \overline{\mathcal{M}^\circ} \cup \overline{\mathcal{M}^*_{arc}}$, donde se conclui que $\widehat{\chi_* A}(\psi, \sigma) \neq 0$ para qualquer $(\psi, \sigma) \in \mathcal{M}^{sub}_*$, o que implica a invertibilidade de $\chi_* A$ em $L^2(\Lambda_*)$ (Proposição[3.3.11]). Mostrou-se então o seguinte resultado:

3.3.12. Teorema - *Seja $A \in \mathcal{B}$. Se $\chi^\circ A$ e $\chi_{arc} A$ são invertíveis em $L^2(\Lambda^\circ)$ e $L^2(\mathbb{T}^*_{arc})$, respectivamente, então $\chi_* A$ é invertível em $L^2(\Lambda_*)$*

3.3.4 A invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$

O estudo da invertibilidade nas álgebras $\mathcal{B}^\circ$, $\mathcal{B}_{arc}$ e $\mathcal{B}_*$, realizado nas subsecções anteriores, fornece uma representação Π da álgebra $\mathcal{B}$ contendo toda a informação sobre a invertibilidade em $\mathcal{B}$,

$$\Pi : \mathcal{B} \longrightarrow B\Big(\big(\bigoplus_{(\psi,\sigma) \in \mathcal{R}_{arc}} L^2(G) \big) \oplus \big(\bigoplus_{(\psi,\sigma) \in \overline{\mathcal{M}^\circ}} \mathbb{C} \big) \Big)\,,$$

dada para cada $A \in \mathcal{B}$ por

$$\Pi(A) := \Big(\bigoplus_{(\psi,\sigma)\in\mathcal{R}_{arc}} \pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}A) \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{(\psi,\sigma)\in\overline{\mathcal{M}^\circ}} \widehat{\chi^\circ A}(\psi,\sigma) \Big) ,$$

onde $\mathcal{R}_{arc}$ é o conjunto definido em (3.15) e $\pi_{(\psi,\sigma)}$ é a representação definida para cada $(\psi,\sigma) \in \mathcal{R}_{arc}$ em (3.13).

A partir do Lema[3.3.3] e dos critérios de invertibilidade estabelecidos para as álgebras $\mathcal{B}_{arc}$, $\mathcal{B}^\circ$ e $\mathcal{B}_*$, dados pelos teoremas [3.3.8], [3.3.9] e [3.3.12], pode estabelecer-se o seguinte critério geral de invertibilidade na álgebra $\mathcal{B}$.

3.3.13. Teorema - *Seja $A \in \mathcal{B}$. Tem-se que A é invertível em $L^2(\mathbb{T})$ se e só se são satisfeitas as duas seguintes condições:*

(i) $\widehat{\chi^\circ A}(\psi,\sigma) \neq 0$ *para qualquer* $(\psi,\sigma) \in \overline{\mathcal{M}^\circ}$.

(ii) $\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}A)$ *é invertível em* $L^2(G)$ *para qualquer* $(\psi,\sigma) \in \mathcal{R}_{arc}$ *e*

$$\sup_{(\psi,\sigma)\in\mathcal{R}_{arc}} \|\pi_{(\psi,\sigma)}(\chi_{arc}A)^{-1}\| < \infty \, .$$

Bibliografia

[1] A.B. Antonevich, *Linear Functional Equations. Operator Approach*, Operator Theory Adv. Appl., vol. 83, Birkhäuser, Basel, 1996.

[2] W. Arveson, *A Short Course on Spectral Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 209, Springer, 2002.

[3] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, "A C^*-Algebra of Functional Operators with Shifts having a Nonempty Set of Periodic Points", Proc. ISAAC 2008, to appear.

[4] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, "C^*-Algebras of Integral Operators with Piecewise Slowly Oscillating Coefficients and Shifts Acting Freely", *Integral Equations and Operator Theory*, **55**, 19-67, 2006.

[5] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, "C^*-algebras of singular integral operators with shifts having the same nonempty set of fixed points", *Complex Analysis and Operator Theory*, **2**, 241-272, 2008.

[6] M.A. Bastos, C.A. Fernandes, Yu.I. Karlovich, "Spectral measure in a C^*-algebra with shifts not acting freely. Fredholm Theory", *J. Functional Analysis*, **242**, 86-126, 2007.

[7] A. Böttcher, Yu.I. Karlovich, V.S. Rabinovich, "The method of limit operators for one-dimensional singular integrals with slowly oscillating data", *J. Operator Theory*, **43**, 171-198, 2000.

[8] O. Bratteli, D.W. Robinson *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1: C^*- and W^*-Algebras, Symmetry Groups, Decomposition of States*, Springer, New York, 1979.

[9] B. Blackadar, *Operator Algebras: Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer, 2006.

[10] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, , 2nd edition, Springer-Verlag, 1990.

[11] K.R. Davidson, *C^*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[12] P. Halmos, *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 18, Springer-Verlag, 1988.

[13] R. Kadison, J. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I*, Academic Press, New York, 1983.

[14] Yu.I. Karlovich, "A local-trajectory method and isomorphism theorems for nonlocal C^*-algebras", *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 170, Birkhäuser, 137-166, 2007.

[15] B.K. Kwasniewski, "Extensions of C^*-dynamical systems to systems with complete transfer operators", preprint *http://arxiv.org/abs/math/0703800.*

[16] B.K. Kwasniewski, A.V. Lebedev, "Crossed product of a C^*-algebra by a semigroup of endomorphisms generated by partial isometries", preprint *http://arxiv.org/abs/math/0507143.*

[17] G. McCarty, *Topology: An Introduction with Applications to Topological Groups*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.

[18] G. Pedersen, *C^*-algebras and their Automorphism Groups*, London Mathematical Society Monographs, No. 14, Academic Press, 1979.

[19] N.C. Phillips, "Ottawa summer school course on crossed product C^*-algebras", draft 2, Fields Institute, 2007.

[20] V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1774, Berlin, Springer-Verlag, 2002.

[21] D.P. Williams, *Crossed Products of C^*-Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[22] K. Zhu, *An introduction to Operator Algebras*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1993.