Introdução

O objectivo deste trabalho é o estudo da *Teoria Clássica de Galois* no contexto das álgebras de operadores; é o estudo da Teoria Clássica de Galois no contexto da *Teoria dos Subfactores*. Na Teoria Clássica de Galois estudamos corpos e extensões de corpos; no nosso contexto substituimos os corpos por álgebras de von Neumann; é a extensão da Teoria Clássica de Galois para um contexto não-comutativo com centro trivial. Uma álgebra de von Neumann com centro trivial é o que denominamos por *factor*.

Faz-se um esforço para respeitar o espírito histórico desta aventura. Segue-se de perto as notações e terminologia do clássico de Jacques Dixmier, à semelhança dos construtores desta aventura. A obra aqui utilizada é a tradução para inglês deste clássico (ver [4]), onde se autonomiza, pela primeira vez, o conceito de *álgebra de von Neumann*, até então designada por *anel de operadores* (ver Observação 1.1.23). Por exemplo, apesar de ser prática comum na teoria dos operadores usar $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ para representar o conjunto dos *operadores lineares e limitados* sobre o Hilbert $\mathcal{H}$ (do inglês **B**ounded), usa-se a notação $\mathbf{L}(\mathcal{H})$, à semelhança de Dixmier, que previligia uma etimologia latina à etimologia anglo-saxónica. Segue-se de perto o contributo John von Neumann, da escola Japonesa, de Alain Connes e de Vaughan Jones.

Do estudo de Connes resulta que: sendo $\mathbf{R}$ um factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}$ e dado $N \subseteq \mathbf{R}$ tal que $dim(N) = \infty$ então $N \simeq \mathbf{R}$. Assim, a identificação desta classe equivale à busca de *invariantes sensíveis à inclusão*: dados dois subfactores $N_1 \subseteq \mathbf{R}$ e $N_2 \subseteq \mathbf{R}$ as inclusões $(N_1 \subseteq \mathbf{R})$ e $(N_2 \subseteq \mathbf{R})$ são conjugadas quando existe um automorfismo $\theta \in Aut(\mathbf{R})$ tal que $\theta(N_1) = N_2$, e escreve-se

$$(N_1 \subseteq \mathbf{R}) \sim (N_2 \subseteq \mathbf{R}) \text{ ou } (N_1 \subseteq \mathbf{R}) \overset{\theta}{\sim} (N_2 \subseteq \mathbf{R}). \tag{1}$$

O índice de Jones $[N : \mathbf{R}]$ da inclusão $(N \subseteq \mathbf{R})$ é um primeiro invariante, que deve corresponder na Teoria Clássica de Galois à *extensão de corpos*. O segundo invariante é o Grupo de Galois, $Gal(\mathbf{R}, N)$, da inclusão $(N \subseteq \mathbf{R})$, que extende naturalmente o *Grupo de Galois* , $\mathrm{Gal}(\mathbf{R} : N)$, *para a extensão de corpos* $\mathbf{R} : N$, quando $\mathbf{R}$ e N são corpos. Neste trabalho estudamos a série de Galois e demonstramos que quando $N \subseteq M$

$$|Gal(M, N)| \leq [M : N]. \tag{2}$$

Também iremos provar propriedades gerais do grupo de Galois e proceder ao cálculo explícito do grupo de Galois das inclusões $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}\right)$ e $(\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$. Quando H é subgrupo normal de G, calculamos o grupo de Galois das inclusões $\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right)$ e $(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G)$, onde a acção externa do grupo finito G sobre $\mathbf{R}$ é dada por $\alpha : G \to Aut(\mathbf{R})$. Além disso, estabelecemos a correspondência de Galois

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^G \subseteq Q \subseteq \mathbf{R} \tag{3}$$

entre subgrupos de G e sub-álgebras Q, entre $\mathbf{R}^G$ e $\mathbf{R}$. Estabelecemos também uma correspondência de Galois

$$H \leq G \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \tag{4}$$

entre subgrupos de G e sub-álgebras P, onde P é o produto cruzado $\mathbf{R} \rtimes_\alpha H$. Também se prova o resultado

$$Gal(\mathbf{R} \rtimes G, \mathbf{R}) \simeq G/[G,G], \qquad Gal(\mathbf{R}, \mathbf{R}^G) \simeq G \tag{5}$$

onde $[G,G]$ designa o comutador de G. Provamos também que, sempre que H é subgrupo normal de G (denotado $H \trianglelefteq G$) o subfactor $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ é conjugado do subfactor $\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}$, a saber

$$\left(\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H\right) \overset{\varphi}{\sim} \left(\mathbf{R}^{G/H} \subseteq \mathbf{R}\right), \tag{6}$$

e o subfactor $\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G$ é conjugado do subfactor $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha (G/H)$, a saber

$$(\mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G) \overset{\psi}{\sim} (\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha (G/H)). \tag{7}$$

Assim, generalizamos para a correspondência de Galois

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R}^G \subseteq Q \subseteq \mathbf{R}^H \tag{8}$$

entre subgrupos de G/H e sub-álgebras $Q = \varphi^{-1}\left(\mathbf{R}^{\widetilde{H}}\right)$, a correspondência de Galois para a álgebra dos pontos fixos obtida em (3), a menos da conjugação φ; ou generalizamos para a correspondência de Galois

$$\widetilde{H} \leq G/H \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{R} \rtimes_\alpha H \subseteq P \subseteq \mathbf{R} \rtimes_\alpha G \tag{9}$$

entre os subgrupos de G/H e sub-álgebras $P = \psi^{-1}\left(\mathbf{R} \rtimes_\alpha \widetilde{H}\right)$ a correspondência de Galois para o produto cruzado obtida em (4), a menos da conjugação ψ.

O plano do remanescente da tese é como se segue.

O Capítulo 1 tem três Secções. A primeira Secção é o percurso que vai das álgebras de operadores às álgebras de von Neumann. A segunda Secção é um refinamento da primeira Secção, sendo de realçar o *Teorema da densidade do bicomutante* (Teorema 1.2.29) e o conceito de *álgebra hiperfinita* (Definição 1.2.33). Na terceira Secção dedicamo-nos a esquematizar alguns aspectos da Teoria e a dar exemplos concretos dos vários factores possíveis. O conceito mais importante aí discutido é o de *factor* (Definição 1.3.5). Procede-se também à uma classificação dos factores ao estilo de von Neumann, que juntamente com Murray apresentou a primeira classificação dos factores.

O Capítulo 2 desenvolve os instrumentos para a Teoria de Galois não-comutativa. Os conceitos mais importantes aí discutidos são *acção externa* (Definição 2.1.12) e *produto cruzado* (Definição 2.2.3). Na Secção 2.3 procede-se à construção do factor hiperfinito do tipo $\mathbf{II}_1$, denotado $\mathbf{R}$ (ver Teorema 2.3.2). Na Secção 2.4 dado um grupo finito G constroi-se uma acção externa de G sobre $\mathbf{R}$. Estas duas Secções são essenciais para o

Capítulo 3, uma vez que fica garantida a existência de uma acção externa de qualquer grupo finito sobre **R**.

O Capítulo 3 é o capítulo onde provamos os resultados fundamentais deste trabalho. Bem poderia designar-se de *capítulo dos invariantes*. São discutidos os seguintes invariantes de conjugação de subfactores: o *índice de Jones* (ver Definição 3.3.4), o *grupo de Galois* (ver Definição 3.3.6) e a *série de Galois* (ver Definição 3.4.2). Apresentamos e demostramos a desigualdade (2) (ver Teorema 3.4.8) que é fundamental por relacionar os dois invariantes em estudo e estabecer uma cisão com a teoria clássica, onde estes invariantes têm um papel diferenciador equivalente. O conceito de *conjugação* quando aplicado a subgrupos normais é um instrumento fundamental. Fica aqui ilustrado este facto, sendo que as demonstrações aqui apresentadas são mais simples que as existentes na bibliografia de suporte (ver Teorema 3.2.4). Os resultados ilustrados em (5) estão enquadrados neste Capítulo, e permitem-nos determinanar os grupos de Galois, tanto para o caso das álgebras dos pontos fixos bem como no caso de álgebras resultantes do produto cruzado (ver Teoremas 3.6.1 e 3.6.3). Na Secção 3.5 analisamos a Teoria de Galois para factores do tipo **I** e verifica-se, por exemplo, que o Grupo de Galois é infinito. Ilustramos, por exemplos, que a correspondência de Galois não é válida para factores do tipo **I** (ver os Exemplos 3.5.5, 3.5.6 e a Observação 3.5.2). É mais uma achega para a importância deste estudo no âmbito dos factores do tipo **II**, como nas Secções seguintes. Na Secção 3.6 determinamos explicitamente os grupos de Galois dos subfactores $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}$ e $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \rtimes G$. Generalizamos nesta mesma Secção, como corolário do Teorema **??**, o cálculo dos grupos de Galois para as inclusões $\mathbf{R}^G \subseteq \mathbf{R}^H$ e $\mathbf{R} \rtimes H \subseteq \mathbf{R} \rtimes G$, com H subgrupo normal de G. Na Secção 3.7 provamos que a correspondência de Galois verifica-se para factores do tipo **II**. Nomeadamente, estabelecem-se as correspondências de Galois ilustradas nos pontos (3), (4), (8) e (9) (Teoremas 3.7.1, 3.7.2, 3.7.3, 3.7.4, respectivamente).

O Apêndice discorre sobre os preliminares à Teoria aqui desenvolvida. Depois de definirmos algumas *noções base* numa primeira Secção, na segunda Secção fazemos uma incursão pelas topologias envolvidas numa álgebra de operadores. As topologias são absolutamente cruciais para a compreensão das álgebras de operadores. Pretende−se dar aqui uma ideia concreta de como construir uma topologia para uma álgebra de operadores. Pretende-se que esta secção funcione como uma espécie de dicionário elementar das topologias numa álgebra de operadores. Por exemplo, a aplicação do Teorema do Bicomutante (Teorema 1.2.30) faz-nos pensar que numa álgebra de von Neumann todas as topologias mais finas do que a *topologia da norma do operador* são equivalentes. Mas até para as álgebras de von Neumann faz sentido diferenciar as topologias: apenas as topologias $*$ são contínuas para as operações de involução (ver as Definições A.2.3, A.2.5, A.2.8 e A.2.10). A terceira Secção é um simples resumo da Teoria de Galois Clássica.