INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Departamento de Engenharia Informática

resumo alargado da dissertação

Physics, Computation and Definability

do curso de

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA E DE COMPUTADORES

pelo aluno Bruno Serra Loff Barreto, *número* 52336

25 de Julho de 2007

Prefácio

A maior parte do trabalho desta dissertação é um resultado da excelente e rica colaboração entre a minha pessoa e o Professor José Félix Costa, do Instituto Superior Técnico; incluindo, em diferentes ocasiões, o Professor Jerzy Mycka, da Universidade Maria Curie-Skodowska, e os Professores Edwin Beggs e John Tucker, da Universidade de Swansea.

O trabalho resultou em cinco artigos [1-5], um relatório técnico [6] e várias apresentações e aulas de seminário. No entanto, o texto foi inteiramente re-escrito para esta submissão ao Departamento de Engenharia Informática.

O elemento comum de todo o trabalho consiste na tentativa de olhar para a Física sob o ponto de vista da Teoria da Computação; mas os temas da dissertação afastar-se-ão progressivamente da Física, e discutiremos temas e estruturas matemáticas mais abstractas, com pouca relevância para o mundo físico. Este aspecto é salientado pela organização da tese, em **três partes**.

Na primeira parte iremos discutir mais directamente a ligação entre a Física, a Filosofia da Ciência e a Teoria da Computação — em particular a Computabilidade.

A segunda parte é uma tentativa de estudar um modelo físico do ponto de vista computacional, com uma caracterização da sua computabilidade e complexidade; o carácter abstracto do modelo dificultará a interpretação dos resultados, à qual dedicaremos um esforço considerável.

Já na terceira parte, estudaremos um modelo matemático de *definibilidade*. Este modelo é baseado num conceito, *recorrência diferencial*, com fortes ligações aos integradores de disco-e-roda, utilizados nos computadores analógicos dos anos quarenta. Iremos ver que existe uma correspondência exacta entre este modelo e a *hierarquia analítica*, uma estrutura matemática muito abstracta, e sem nenhuma ligação imediata com a Física.

Resumo da Parte I

Existe uma ligação imediata entre Física e Computação — os sistemas computacionais são frequentemente utilizados para simular e estudar sistemas físicos, e os limites do nosso conhecimento de Física impõem limites tecnológicos àquilo que conseguimos efectivamente computar.

No entanto, há uma ligação de natureza mais profunda, entre a Física e a Computação, em particular a Computabilidade. A Física, como disciplina do saber, procura descobrir as leis, ou regras, que governam o Universo. A Computabilidade estuda as regras que podem, de facto, ser utilizadas no cálculo — feito, *exempli gratia*, por seres humanos.

Utilizamos a palavra "regra" em ambos os casos, mas não é óbvio se estamos de facto a falar da mesma coisa, isto é, não temos forma de responder à pergunta:

Serão as regras do Universo semelhantes às da Computação?

Na **Parte I** da dissertação discutiremos um conjunto de *ferramentas para pensar* na ligação entre a Física e a Computabilidade. Estas ferramentas são chamadas *tese física de Church–Turing* e *tese da simulação*. São ambas variantes da tese de Church–Turing, especializadas ao estudo do mundo físico de modo a se tornarem relevantes para a Física.

A nossa abordagem destes assuntos é nova, apesar da matéria em questão não o ser. Iremos começar, no **Capítulo 1**, por estudar a tese de Church–Turing; no **Capítulo 2** discutiremos a tese física de Church–Turing e no **Capítulo 3** a tese da simulação. A organização de cada capítulo é semelhante: propomos uma formulação cuidada da tese, previamente justificada, e explicamos o significado desta formulação de forma clara e atenciosa. No caso das duas variantes, apresentamos brevemente um método de investigação. O **Capítulo 4** oferece algumas considerações finais, e motiva a segunda parte da dissertação.

Resumo da Parte II

Computação experimental é o estudo de como é possível fazer computação por meio de sistemas físicos e experiências nestes sistemas. Este tipo de estudo foi e continua a ser alvo de controvérsia, devido à ideia, apresentada por bastantes investigadores, de que vários sistemas físicos parecem ter um comportamento *não computável* [e.g., 7-10]. Estas descobertas foram severamente criticadas: ou consideradas irrelevantes para a realidade, ou acusadas de falhas e imprecisões técnicas que obscurecem o resultado [e.g., respectivamente, 11-14]. Poderá ser dito, pelo menos, que alguns destes estudos não são inteiramente claros quanto à meta procurada, aos métodos utilizados e às implicações dos resultados obtidos.

Uma excepção notável, que sobressai pela clareza de objectivos, técnicas e consequências, é o trabalho de Edwin Beggs e John Tucker [15-18]. Eles oferecem o que talvez possa ser considerado a primeira exposição clara e inequívoca de o que é computação experimental, qual o objectivo de estudar computação experimental, como deve ser estudada e qual é o valor esperado de tal estudo. A sua metodologia oferece uma fundação para melhorar o nosso entendimento da ligação entre a Física e a Computação.

A **Parte II** começa, então, no **Capítulo 5**, onde fazemos uma apresentação completa dos seus métodos, e incluímos algumas considerações nossas sobre a natureza dos procedimentos experimentais e do equipamento experimental. Os **Capítulos 6, 7 e 8** serão dedicados a cada um dos passos da metodologia apresentada no Capítulo 3 (para investigação da tese física de Church--Turing), e teremos o cuidado de satisfazer simultaneamente os requisitos da metodologia de Beggs e Tucker.

A maior parte dos resultados destes capítulos resultam de uma colaboração entre o autor, Edwin Beggs, José Félix Costa e John Tucker [5].

Resumo da Parte III

Em 1996, Cris Moore publicou um artigo seminal, *Recursive theory on the reals and continuous-time computation* [19], aonde define uma classe indutiva de funções de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, com o objectivo de fornecer uma teoria aonde fenómenos descritos em tempo contínuo pudessem ser estudados do ponto de vista computacional. Esta classe foi definida como o fecho de um conjunto de algumas funções básicas para as operações de composição, solução de equações diferenciais ordinárias e minimização.

Foi feito algum trabalho utilizando esta definição [20-23], mas havia alguns princípios adoptados por Moore que não eram aceites por outras pessoas interessadas na teoria (e.g., $0 \times \perp = 0$, principio oposto ao da indefinibilidade restrita). A aparente necessidade de utilizar estes princípios advinha da tentativa de Moore de transplantar o operador de minimização — utilizado na teoria de recursão clássica — para o contexto contínuo.

Portanto, em 2004, Jerzy Mycka e José Félix Costa [24] propuseram uma definição semelhante à de Moore, em que substituem a operação de minimização pela operação de limite.

Restrições deste esquema indutivo resultam em várias caracterizações interessantes de Computabilidade [25-28] e Complexidade [21,29-32]; estes estudos são análogos aos estudos da *sub-recursão* na teoria clássica das funções recursivas. São também estudadas ligações com outras áreas, *exempli gratia*, o estudo da periodicidade na teoria das funções reais recursivas, e as ligações entre máquinas de Turing infinitas e funções reais recursivas [33-34].

Apesar da teoria ser rica e diversa, só estaremos interessados nos seus aspectos mais gerais, que foram investigados nos artigos de Mycka e Costa [24,35-36]. A característica de maior destaque da teoria mais geral, em oposição ao que chamámos de sub-recursão, é o acesso a um operador de limite sem restrições; este operador de limite pode ser utilizado como um operador de busca sobre os reais.

O objectivo da **Parte III** é servir de texto fundacional para estes aspectos mais gerais da teoria; incluímos vários resultados já previamente conhecidos, e acrescentamos bastantes resultados fruto do nosso trabalho pessoal e em colaboração.

Começamos, no **Capítulo 9**, por estudar álgebras de funções e equações diferenciais; depois desta preparação, introduzimos a definição indutiva da classe das funções reais recursivas, e terminamos o capítulo com algumas considerações adicionais sobre equações diferenciais e limites infinitos.

No **Capítulo 10** provamos os resultados fundamentais da teoria, e mostramos que a classe das funções reais recursivas pode ser estratificada numa hierarquia. No **Capítulo 11** resolvemos o problema da universalidade, mostrando que não existe uma função real recursiva universal. O **Capítulo 12** é dedicado ao estudo da relação entre a hierarquia analítica de predicados e as funções reais recursivas; mostramos que existe uma correspondência exacta entre os dois conceitos. Finalmente, no **Capítulo 13**, atacamos o problema do colapso da hierarquia, sem o conseguir resolver completamente, mas avançando com alguns resultados preliminares.

Bibliografia

[1] Bruno Loff, José Félix Costa, e Jerzy Mycka. Computability on reals, infinite limits and differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007. Aceite para publicação.

[2] Bruno Loff. A functional characterisation of the analytical hierarchy. Em Barry Cooper, Benedikt Löwe, e Andrea Sorbi (eds.), *Computability in Europe 2007: Computation and Logic in the Real World*, pp. 247–256, 2007.

[3] José Félix Costa, Bruno Loff, e Jerzy Mycka. The new promise of analog computation. Em *Computation and Logic in the Real World (CiE 2007)*, volume 4497 das *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 189–195. Springer–Verlag, 2007.

[4] Bruno Loff e José Félix Costa. Five views of hypercomputation. *International Journal of Unconventional Computing*, 2007. Aceite para publicação.

[5] Edwin Beggs, José Félix Costa, Bruno Loff, e John Tucker. The computational complexity of the analog-digital scatter machine, 2007. Por completar.

[6] Bruno Loff. On two variants of the Church–Turing thesis. Relatório Técnico, Instituto Superior Técnico, 2007.

[7] Marian Pour-El e Ian Richards. The wave equation with computable initial data such that its unique solution is not computable. *Advances in Mathematics*, 39(4):215–239, 1981.

[8] Mark Hogarth. Non-Turing computers and non-Turing computability. *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 1:126–138, 1994.

[9] Hava Siegelmann. Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit. Birkhäuser, 1999.

[10] Tien Kieu. Quantum hypercomputation. *Minds and Machines*, 12(4):541–561, 2002.

[11] Klaus Weihrauch e Ning Zhong. Is wave propagation computable or can wave computers beat the Turing machine? *Proceedings of the London Mathematical Society*, 85(2):312–332, 2002.

[12] Oron Shagrir e Itamar Pitowsky. Physical hypercomputation and the ChurchTuring thesis. *Minds and Machines*, 13(1):87–101, 2003.

[13] Martin Davis. The myth of hypercomputation. Em Christof Teuscher (ed.), *Alan Turing: the life and legacy of a great thinker*, pp. 195–212. Springer, 2006.

[14] Andrew Hodges. Can quantum computing solve classically unsolvable problems? Archive

preprint `http://arxiv.org/quant-ph/0512248`, 2005.

[15] Edwin Beggs e John Tucker. Computations via experiments with kinematic systems. Relatório Técnico 4.04, University of Wales Swansea, 2004.

[16] Edwin Beggs e John Tucker. Embedding infinitely parallel computation in newtonian kinematics. *Applied Mathematics and Computation*, 178(1):25–43, 2006.

[17] Edwin Beggs e John Tucker. Can Newtonian systems, bounded in space, time, mass and energy compute all functions? *Theoretical Computer Science*, 371(1):4–19, 2007.

[18] Edwin Beggs e John Tucker. Experimental computation of real numbers by Newtonian machines. *Proceedings of the Royal Society*, 463(2082):1541–1561, 2007.

[19] Cris Moore. Recursion theory on the reals and continuous-time computation. *Theoretical Computer Science*, 162(1):23–44, 1996.

[20] Manuel Campagnolo, Cris Moore, e José Félix Costa. Iteration, inequalities, and differentiability in analog computers. *Journal of Complexity*, 16(4):642–660, 2000.

[21] Manuel Campagnolo, Cris Moore, e José Félix Costa. An analog characterization of the Grzegorczyk hierarchy. *Journal of Complexity*, 18(4):977–1000, 2002.

[22] Jerzy Mycka. μ-recursion and infinite limits. *Theoretical Computer Science*, 302:123–133, 2003.

[23] Jerzy Mycka. Infinite limits and R-recursive functions. *Acta Cybernetica*, 16(1):83–91, 2003.

[24] Jerzy Mycka e José Félix Costa. Real recursive functions and their hierarchy. *Journal of Complexity*, 20(6):835–857, 2004.

[25] Daniel Graça e José Félix Costa. Analog computers and recursive functions over the reals. *Journal of Complexity*, 19(5):644–664, 2003.

[26] Olivier Bournez e Emmanuel Hainry. Real recursive functions and real extensions of recursive functions. Em Maurice Margenstern (ed), *Machines, Computations and Universality (MCU 2004)*, volume 3354 das *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 116–127. Springer–Verlag, 2004.

[27] Olivier Bournez e Emmanuel Hainry. Recursive analysis characterized as a class of real recursive functions. *Fundamenta Informaticae*, 74(4):409–433, 2006.

[28] Manuel Campagnolo e Kerry Ojakian. The elementary computable functions over the real numbers: Applying two new techniques. *Archive for Mathematical Logic.*, 2006. Aceite para publicação.

[29] Manuel Campagnolo. The complexity of real recursive functions. Em Cristian Calude, Michael Dinneen, and Ferdinand Peper (eds), *Unconventional Models of Computation (UMC 2002)*, volume 2509 das *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 1–14. Springer–Verlag, 2002.

[30] Olivier Bournez e Emmanuel Hainry. Elementarily computable functions over the real numbers and R-sub-recursive functions. *Theoretical Computer Science*, 348(2–3):130–147, 2005.

[31] Jerzy Mycka e José Félix Costa. The P ≠ NP conjecture in the context of real and complex analysis. *Journal of Complexity*, 22(2):287–303, 2006.

[32] Jerzy Mycka e José Félix Costa. The conjecture P ≠ NP presented by means of some classes of real functions. Em Arnold Beckmann, Ulrich Berger, Benedikt Löwe, and John Tucker (eds), *Logical Approaches to Computational Barriers (CiE 2006)*, volume 3988 das Lecture Notes in Computer Science, pp. 47–57. Springer–Verlag, 2006.

[33] Luís Mendes Gomes. Applications of Real Recursive Infinite Limits. PhD thesis, Universidade dos Açores, 2006.

[34] Luís Mendes Gomes e José Félix Costa. Hybrid finite computation. Em Barry Cooper, Benedikt Löwe, e Andrea Sorbi (eds.), *Computability in Europe 2007: Computation and Logic in the Real World*, pp. 178–185, 2007.

[35] Jerzy Mycka e José Félix Costa. Undecidability over continuous-time. *Logic Journal of the IGPL*, Oxford University Press, 14:649 – 658, 2006.

[36] Jerzy Mycka e José Félix Costa. A new conceptual framework for analog computation. *Theoretical Computer Science*, 374(1–3):277–290, 2007.