Volumes de paralelepípedos

1 Revisão sobre espaços Euclidianos

Recorde que um *espaço Euclidiano (real)* V de dimensão m é um espaço vectorial real de dimensão m equipado com um *produto interno*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} ,$$

ou seja, uma função bilinear, simétrica e definida positiva. Qualquer espaço Euclidiano admite uma *base ortonormal* $(v_1, \ldots, v_m)$, ou seja uma base tal que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} ,$$

(por exemplo obtida a partir de qualquer outra base pelo método de ortogonalização de Gram–Schmidt).

Exemplo: O *produto escalar* de $\mathbb{R}^m$, definido por

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i ,$$

é um produto interno, para o qual a base canónica $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$ é ortonormal. Nestas notas consideraremos sempre que $\mathbb{R}^m$ é um espaço Euclidiano com este produto interno: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

Seja V um espaço Euclidiano de dimensão m e $(v_1, \ldots, v_m)$ uma base ortonormal. A função

$$C : V \to \mathbb{R}^m$$

que a cada vector $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$ de V atribui o seu vector de coordenadas

$$C(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$$

é uma transformação linear bijectiva e é uma *isometria*, ou seja, preserva o produto interno:

$$\left\langle \sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j} a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i a_i b_i = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \ .$$

Portanto C é uma transformação que preserva todos os comprimentos de vectores (normas) e ângulos entre vectores.

2 Volumes de paralelepípedos

Dados m vectores $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ de $\mathbb{R}^n$, com $m \leq n$, o *paralelepípedo-m* gerado por estes vectores é o conjunto

$$P = \{t_1 \boldsymbol{d}_1 + \cdots + t_m \boldsymbol{d}_n : t_1, \ldots, t_m \in [0,1]\} \ .$$

Seja $D = [\boldsymbol{d}_1 \cdots \boldsymbol{d}_m]$ a matriz $n \times m$ cuja coluna j é, para cada $j = 1, \ldots, m$, o vector $\boldsymbol{d}_j$. No caso de se ter $m = n$ a matriz é quadrada e sabemos que o *volume-m* de P é

$$V_m(P) = |\det D| \ .$$

No entanto, se $m < n$, a matriz D não é quadrada e por isso esta fórmula não faz sentido.

A fim de encontrar uma fórmula para o volume-m de P quando $m < n$, seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vectorial de dimensão m que contém os m vectores $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_m$ (se os vectores forem linearmente independentes então V é a expansão linear deste conjunto de vectores, ou seja, é o espaço das colunas de D — caso contrário há vários espaços V possíveis). O espaço V, munido do produto escalar de $\mathbb{R}^n$, é também um espaço Euclidiano e por isso existe uma isometria

$$C : V \to \mathbb{R}^m \ .$$

Seja $S = [C\boldsymbol{d}_1 \cdots C\boldsymbol{d}_m]$ a matriz quadrada $m \times m$ cuja linha j é, para cada $j = 1, \ldots, m$, o vector $C\boldsymbol{d}_j$. O paralelepípedo gerado pelos m vectores $C\boldsymbol{d}_j$ coincide com a imagem CP e, uma vez que C preserva distâncias e ângulos, faz sentido considerar que CP é geometricamente indistinguível de P. Por isso podemos definir o volume-m de P como sendo o volume-m de CP, ou seja:

Definição: $V_m(P) = |\det S|$.

No entanto esta escolha parece depender da escolha da isometria C. Para ver que de facto esta definição não depende da escolha da isometria comecemos por notar o seguinte:

Lema: $D^tD = S^tS$.

Demonstração: Sejam $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ os i-ésimo e j-ésimo vectores da base canónica de $\mathbb{R}^m$. Então tem-se, pelo facto de C ser uma isometria,

$$\begin{aligned}(D^tD)_{ij} &= \boldsymbol{e}_i^t D^t D\boldsymbol{e}_j = \langle D\boldsymbol{e}_i, D\boldsymbol{e}_j\rangle = \langle \boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{d}_j\rangle \\ &= \langle C\boldsymbol{d}_i, C\boldsymbol{d}_j\rangle = \langle S\boldsymbol{e}_i, S\boldsymbol{e}_j\rangle = \boldsymbol{e}_i^t S^t S\boldsymbol{e}_j = (S^tS)_{ij} \ .\end{aligned}$$

Obtemos assim uma fórmula para o volume-m de P que não depende da escolha da isometria, mas apenas da matriz D:

Teorema: $V_m(P) = \sqrt{\det(D^tD)}$.

Demonstração: Tem-se

$$\begin{aligned}V_m(P) &= |\det S| \\ &= \sqrt{(\det S)(\det S)} = \sqrt{(\det S^t)(\det S)} = \sqrt{\det(S^tS)} \\ &= \sqrt{\det(D^tD)} \ .\end{aligned}$$

Exemplo: Na definição de integral numa variedade diferencial M parametrizada por $\boldsymbol{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$,

$$\int_M f = \int_U f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))\sqrt{\det(D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})^tD\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))}\, du_1 \ldots du_m \ ,$$

o *factor de escala* $\sqrt{\det(D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})^tD\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))}$ é o volume-m do paralelepípedo $P \subset T_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})}M$ que é gerado pelas m derivadas parciais de $\boldsymbol{g}$ no ponto $\boldsymbol{u}$.

Exercício: Seja V um espaço Euclidiano qualquer, de dimensão m, seja $(v_1, \ldots, v_m)$ uma base ortonormal e seja $C : V \to \mathbb{R}^m$ a isometria definida por

$$C(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = (a_1, \ldots, a_m) \ .$$

Dados m vectores $d_1, \ldots, d_m \in V$, seja S a matriz cuja coluna j é, para cada $j = 1, \ldots, m$, o vector Cd_j. Mostre que faz sentido definir o volume-m do *paralelepípedo*

$$P = \{t_1d_1 + \cdots + t_md_m : t_1, \ldots, t_m \in [0, 1]\}$$

pela fórmula

$$V_m(P) = |\det S| \ .$$

(Sugestão: mostre que para qualquer outra base ortonormal o volume obtido é igual.)