Espaços tangentes a variedades

Recordar: Um vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente* a um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\boldsymbol{a} \in M$ se existir $\varepsilon > 0$ e um caminho diferenciável

$$\boldsymbol{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$$

tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \boldsymbol{v}$.

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferencial de dimensão m ($m < n$) e seja $\boldsymbol{a} \in M$. O *espaço tangente a M no ponto $\boldsymbol{a}$* é o conjunto

$$T_{\boldsymbol{a}}M$$

formado por todos os vectores tangentes a M no ponto $\boldsymbol{a}$.

Teorema: *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferencial de dimensão m ($m < n$) definida numa vizinhança aberta $A \subset \mathbb{R}^n$ de um ponto $\boldsymbol{a} \in M$ pela condição*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} ,$$

onde $\boldsymbol{F} : A \to \mathbb{R}^{n-m}$ é uma função de classe C^1 tal que a matriz $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ tem característica máxima (ou seja, $n - m$). Então o espaço tangente a M no ponto $\boldsymbol{a}$ é um espaço vectorial de dimensão m que coincide com o núcleo de $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$:

$$T_{\boldsymbol{a}}M = \operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) .$$

Demonstração: A primeira parte da demonstração (que foi feita na aula) consiste em mostrar que todos os vectores tangentes a M no ponto $\boldsymbol{a}$ pertencem ao núcleo da derivada, ou seja, que

$$T_{\boldsymbol{a}}M \subset \operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) .$$

Para verificar isto, seja $\boldsymbol{v}$ um vector tangente arbitrário e seja

$$\boldsymbol{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$$

um caminho diferenciável tal que $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \boldsymbol{v}$. Então

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathbf{0}$$

para qualquer $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ e, pelo teorema da derivada da função composta,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))|_{t=0} = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(0))\boldsymbol{\gamma}'(0) = D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} \ .$$

Conclui-se assim que $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$.

A segunda parte da demonstração consiste em mostrar a inclusão no sentido inverso, ou seja, que também se tem

$$\operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \subset T_{\boldsymbol{a}}M \ .$$

Para tal, seja $\boldsymbol{v}$ um vector arbitrário do núcleo e seja $\boldsymbol{f}$ uma função de classe C^1 definida num subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ tal que nalguma vizinhança aberta de $\boldsymbol{a}$ a variedade M coincide com o gráfico de $\boldsymbol{f}$ (uma tal função $\boldsymbol{f}$ existe, pelo teorema da função implícita). Reordenando as variáveis podemos assumir que a condição que define M,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \ ,$$

é equivalente a

$$(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \boldsymbol{f}(x_1, \ldots, x_m) \ ,$$

e a condição $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ é equivalente a ter-se

$$\begin{bmatrix} v_{m+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = D\boldsymbol{f}(a_1, \ldots, a_m) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \ .$$

(Exercício: porquê?) Por outras palavras, os vectores do núcleo de $D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ são os pontos do gráfico da transformação linear $D\boldsymbol{f}(a_1, \ldots, a_m)$, e por isso concluímos que o vector $\boldsymbol{v}$ tem a forma

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{w}, D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{w}) \ ,$$

onde $\boldsymbol{b} = (a_1, \ldots, a_m)$ e $\boldsymbol{w} = (v_1, \ldots, v_m)$. Para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno os pontos $\boldsymbol{b}+t\boldsymbol{w}$ com $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ pertencem ao domínio de $\boldsymbol{f}$ (devido à continuidade da função que a cada t faz corresponder o vector $\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{w}$) e assim podemos definir um caminho diferenciável

$$\boldsymbol{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$$

fazendo

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{w}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b} + t\boldsymbol{w})) \ .$$

Evidentemente tem-se $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{a}$ e, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\boldsymbol{\gamma}'(0) = (\boldsymbol{w}, D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \ .$$

Portanto concluímos que $\boldsymbol{v} \in T_{\boldsymbol{a}}M$, como pretendido, ficando demonstrada a igualdade

$$T_{\boldsymbol{a}}M = \operatorname{Nuc} D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) \ .$$