Matemática Computacional

Exercícios

MEC/LEGM – 2º Semestre — 2013/14

Capítulo I
Teoria dos erros

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente x em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos

(a)	$x = 1/6$	(b)	$x = 1/3$	(c)	$x = -83784$
(d)	$x = -83785$	(e)	$x = 83798$	(f)	$x = 0.0013296$.

2. Tomaram-se para valores aproximados de $N_1 = 0.3000 \times 10^1$, $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$ e $N_3 = 0.3000 \times 10^4$, respectivamente os valores $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$, $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$ e $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.

3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.

   (a) Pretendem-se aproximações $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ de x e y, respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.

   (b) Calcule os erros absolutos e relativos de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.

   (c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em ponto flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y. Determine $fl\,(\,fl(x) - fl(y)\,)$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?

4. Determine os erros absoluto e relativo cometidos no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema de ponto flutuante com mantissa de comprimento 4.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \tag{1}$$

   (a) Calcule $f(10^{-6})$ utilizando a fórmula (1).

   (b) Obtenha uma aproximação de $f(10^{-6})$, utilizando o desenvolvimento de Maclaurin da função $\cos(x)$.

   (c) Sabendo que $1 - \cos x = 2\,\sin^2(x/2)$, calcule $f(10^{-6})$ utilizando uma nova fórmula para f.

   (d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

6. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito grande.

   (a) Verifique que o erro relativo é 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

   (b) Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erros relativos tão grandes.

7. Na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, admita que os coeficientes são todos positivos e exactos e que $b^2 \gg ac$. Como é sabido, as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faça $a = 1$, $b = 62.10$ e $c = 1$. A equação correspondente tem raízes $x_1 \simeq -0.01610723$ e $x_2 \simeq -62.08390$. Usando aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para x_1 e x_2. Dê uma explicação para o mau valor que obteve para x_1 e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.

Capítulo II
Equações não lineares

Método da bissecção

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.
   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.
   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.
   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Use o método da bissecção para aproximar, com erro inferior a 10^{-2}, a raiz da equação

$$e^{-x} - \sin x = 0.$$

   mais próxima de zero.

Método do ponto fixo

3. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}$$

   e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...$
   (a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.
   (b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.
   (c) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo $[2, 3]$. Poderá usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

4. Considere a iteração do ponto fixo

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, ...$$

   com função iteradora $g(x) = 1 + \arctan(x)$.
   (a) Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função g.
   (b) Aproxime o ponto fixo de g com erro inferior a 10^{-6}. Qual a ordem de convergência do método?

5. Calcule um valor aproximado de $\sqrt{10}$ usando o seguinte método numérico

$$x_{m+1} = \frac{30\,x_m + x_m^3}{10 + 3\,x_m^2}.$$

Mostre que a ordem de convergência deste método é 3.

6. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad\qquad x_5 = 0.43814.$$

Sabendo que $|\phi'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

7. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0, \tag{2}$$

a qual tem apenas três raízes reais $z_1 < z_2 < z_3$. Sabe-se que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

   (a) Para aproximar as raízes positivas da equação (2), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

   $$g(x) = \frac{1}{2}\,e^{x/2}$$

      i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

      ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

   (b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

   (c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

8. Seja $\varphi \in C([0, 1])$. Considere a equação $2\,x\,\varphi(x^2) = \varphi(x)$.

   a) Mostre que a equação admite pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$. (*Sugestão*: aplique o Teorema de Rolle à função $F(x) = \int_x^{x^2} \varphi(u)\,du$).

   Seja $\varphi(x) = e^x$ e $g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2\,\varphi(x^2)}$.

   b) Mostre que o método do ponto fixo, com a função iteradora g e qualquer $x_0 \in [0, 1]$, converge para a única raiz da equação dada.

c) Efectue duas iterações com $x_0 = 1/2$ e majore $|z - x_2|$.

d) Justifique a convergência linear do método.

`TESTE, LEAmb 05/04/2003`

9. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = 1 - \frac{1}{b\,x_k}, \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

onde b é um número real dado.

a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

b) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k\to\infty} x_k$.

c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica

$$|z - x_{k+1}| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

10. Considere a equação

$$3\,x^2 - e^x = 0$$

a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

b) Considere as seguintes sucessões

$$(S_1) \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}} \qquad\qquad (S_2) \quad x_{n+1} = \ln(3\,x_n^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma destas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

c) Efectue duas iterações usando a sucessão S_1 com $x_0 = 1$. Dê um majorante para o erro da aproximação obtida.

d) Será possível usar a sucessão S_1 para aproximar a maior raiz positiva da equação? Poderá usar a sucessão S_2 para aproximar a menor raiz positiva da equação?

11. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2+1)$$

a) Prove que a sucessão definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ (para $n = 0, 1, \ldots$), e para qualquer valor inicial $x_0 \in [-1, 1]$, converge para um número real $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência do método.

b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 1$ e calcule os quocientes $\frac{|e_i|}{(e_{i-1})^2}$. Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior?

12. Considere a equação

$$x^3 - x = \frac{1}{4}\cos(x).$$

a) Com base nos teoremas sobre localização de raízes mostre que esta equação tem no máximo 3 raízes reais.

b) Mostre que a equação considerada tem duas raízes reais z_1 e z_2 situadas, respectivamente, nos intervalos $[-0.5, -0.2]$ e $[1.0, 1.5]$, e que existe apenas uma raiz em cada um destes intervalos.

c) Considere as funcões iteradoras

$$g_1(x) = x^3 - \frac{1}{4}\cos(x) \qquad g_2(x) = (x + \frac{1}{4}\cos(x))^{1/3}.$$

Se partirmos da aproximação inicial $x_0 = 0.5$ e aplicarmos cada uma das funcões iteradoras, obtemos sucessões que convergem para cada uma das raízes consideradas na alínea anterior. Diga qual das funções corresponde a cada uma das raízes e justifique, com base no teorema do ponto fixo.

d) Indique uma nova função iteradora que permita obter aproximações de cada uma das raízes consideradas, de tal modo que a convergência das respectivas sucessões seja quadrática. `EXAME, LEIC 29/01/2004`

13. Considere a iteração do ponto fixo $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, e as funções iteradoras

$$g_1(x) = 1 + \arctan(x), \quad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}.$$

a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas.

b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}. Determine a ordem de convergência para cada um dos métodos.

14. Considere o seguinte método iterativo

$$x_0 \in I\!R, \quad x_{m+1} = \frac{\alpha\, x_m + 1 + 2\, e^{-x_m}}{2+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in I\!R \backslash \{-2\}$.

a) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método converge para a solução da equação

$$f(x) = e^x - 2x\, e^x + 2 = 0$$

, qualquer que seja $x_0 \geq 0$.

Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

b) Determine o valor de α de tal modo que a convergência seja a mais rápida possível.

c) Aplique o método para aproximar a solução da equação $f(x) = 0$, com erro inferior a 10^{-5}.

15. Considere a função real

$$f(x) = 2\, x - \cos(x).$$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui uma só raiz α no intervalo $(0, \pi/4)$ e calcule-a com erro inferior a 0.25. Justifique.

b) Mostre que o processo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{\cos(x_n)}{2} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge para o número α, independentemente da escolha que fizer de $x_0 \in (0, \pi/4)$. Dê uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência. A convergência é monótona? Justifique.

c) Faça $x_0 = \pi/8$. Calcule um majorante para o erro absoluto de x_{16}.

`EXAME LEIC 15/12/2001`

Método de Newton

16. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

(a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.

(c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

17. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x = 1,$$

no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas teria ainda que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

18. Considere o seguinte método para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) O método de Newton aplicado à função $f_1(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método converge e a convergência é da ordem 2. Calcule 3 iteradas e indique um majorante para o erro de x_3. O que acontece se escolher $x_0 > 4$?

b) O método de Newton aplicado a função $f_2(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge, mostre que a ordem de convergência é 3.

19. Mostre que a equação $\ln(x) - (x - 2)^2 = 0$ tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1,\ x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$?

Mostre que para o valor x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência do método e efectue uma iteração.

20. Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ da equação

$$e^x - 4\,x^2 = 0$$

(ver problema 7).

(a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a ordem de convergência do método.

(b) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1. Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.

Método da secante

21. Considere a equação
$$x\tan(x) - 1 = 0.$$
Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

22. Considere a equação
$$e^x = 2 - x^2.$$
   (a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5, 1.0[$. Por bissecção determine um subintervalo I que contenha a raiz.

   (b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0, de modo que possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

   (c) Indique um majorante do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

23. Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

   a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

   b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$, verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

Vários métodos

24. Considere a equação
$$f(x) = \cos(x) - x = 0.$$
   (a) Mostre que o método de Newton converge para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

   (b) Calcule a primeira iterada x_1, começando com $x_0 = 1$. Justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

   (c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

   (d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b), calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

25. Considere a função
$$f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 + \frac{1}{1+x^2}.$$
Aproxime, com erro inferior a 10^{-4}, todas as raízes da equação $f(x) = 0$.

26. Sabendo que $h(x)$ e $h'(x)$ são crescentes, diferenciáveis, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação
$$F(x) = x + h(x) = 0,$$
usando o seguinte método:
$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$
Verifique que F tem uma única raiz em I e que existem valores a e b para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

`EXAME, LEC 22/07/1996`

27. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$, então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. Poderá aplicar o teorema do ponto fixo à função g no intervalo $[a, b]$?

28. Considere a função
$$f(x) = \cos(\frac{x}{2}) - x$$

a) Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de f, qualquer que seja a iterada inicial em $[0.5, 1.5]$.

b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

c) Use uma estimativa baseada na fórmula de Lagrange para calcular outro majorante para x_1 da alínea b). Comente.

d) Calcule x_3 e apresente uma estimativa para o erro.

e) Com base nos valores x_0 e x_1 obtidos em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

Capítulo III

Resolução numérica de sistemas de equações

1 Normas, erros e condicionamento

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \quad 10^{-6}]^T$, que tem por solução exacta $x = [1 \quad 1]^T$.

a) Determine $cond(A)$ na $\| \, \|_\infty$.

b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1+\epsilon \quad 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

c) Considere ainda $\tilde{b} = [1 \quad 2\times 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

2. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcule os números de condição associados à norma $\|.\|_\infty$ e à norma $\|.\|_1$.

b) Mostre que $cond_1(A) = cond_\infty(A)$.

c) Seja $|a| > 1$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, o segundo membro é afectado de um erro tal que $\|\delta b\|_\infty \leq \epsilon$. Determine um majorante de $\|\delta x\|_\infty$.

d) Para que valores de a o sistema é mal condicionado?

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{Verifique que } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

a) Calcule as normas $\|.\|_\infty$ e $\|.\|_1$ da matriz A.

b) Calcule $cond_\infty(A)$ e $cond_1(A)$. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz ?

c) E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 3$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, com um certo valor de a, se obteve a solução $x = (1, 1, 1)$. Determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre esta solução e a que se obteria se o valor de a fosse afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ϵ (sendo $\epsilon < |a - 3|$).

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

   (b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução.

6. Seja A_n uma matriz quadrada, de dimensão $n \times n$, da forma

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Implemente rotinas que, para qualquer n, lhe permitam construir a matriz A_n e a sua inversa.

b) Escreva rotinas que lhe permitam calcular a norma 1 ou a norma ∞ duma matriz dada.

c) Com base nas alíneas anteriores, deduza fórmulas para calcular $\|A_n^{-1}\|_\infty$ e $\mathrm{cond}_\infty(A_n)$. Que conclusão pode tirar sobre o condicionamento de A_n?

d) Considere o sistema linear $A_n x = b$. Seja $\tilde{b}$ um valor perturbado de b, tal que $\|\delta_b\|_\infty \leq 2^{-n}$. Determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$. Comente.

2 Métodos iterativos para sistemas lineares

1. O sistema de equações lineares $A\,x = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -w\,a & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & w\,a \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} x^{(k)} + w\,b.$$

a) Para que valores de a o método converge se $w = 1$?

b) se $a = -1/2$ e $w = 1/2$ o método converge?

2. Considere um sistema de duas equações na forma geral

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem, dada uma qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$, se e só se $|m| < 1$, onde $m = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty,$$

onde x é a solução exacta do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(\dfrac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \dfrac{|a_{21}|}{|a_{22}|})$.

c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3\,x + y = 8 \\ x + 2\,y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2, 1)$. Com base na alínea anterior determine um majorante para o erro do resultado obtido.

d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

3. Considere o sistema $A\,x = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}.$$

a) Será possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

b) Escreva o sistema na forma iterativa e calcule $x^{(2)}$, considerando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

c) Determine um majorante para $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

4. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z & = & 2 \\ -x + y & = & 0 \\ x + 2\,y - 3\,z & = & 0 \end{cases}$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta do sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial.

Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $x^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

c) Obtenha um valor do parâmetro w para o qual possa garantir convergência do método das relaxações sucessivas para a solução do sistema dado.

5. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um método iterativo da forma $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$. Identifique a matriz C e o vector d.

Se $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)$, estime o erro $\|x - x^{(k)}\|_\infty$.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1+\cos(\theta) \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $A\,x = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = (0, -212, 10^5)$.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iterada com $x^{(0)} = (10^5, 10^6, 0)$.

c) Sendo n o número de iterações, quantas deverá executar para garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$?

7. Considere a matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

b) Considere $\beta = 1,\ \alpha = 2$ e $b = (0, 0, 0)$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = (0, 0, 0)$.

(i) Mostre que, qualquer que seja $x^{(0)}$, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que a matriz C associada ao método de Jacobi satisfaz $C_J^3 = 0$.)

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = (0, 2, 1)$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(1)} = (0, -2, -1),\ x^{(2)} = (0, 2, 1),\ x^{(3)} = (0, -2, -1), \ldots$.

Verifique que $(0, 2, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

8. Considere o sistema linear $A\,x = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\,\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < 4/3$. Prove que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$.

Que pode dizer a respeito da convergência dos dois métodos quando $\omega = 0$?

b) Seja $\omega = \dfrac{1}{2}$ e $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

9. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10\,x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10\,x_3 & = & 12 \\ 10\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12. \end{cases}$$

   (a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

   (b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

   (c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

   (d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

10. Pretende-se resolver um certo sistema $A\,x = b$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrária.

   (a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações. Justifique e diga quantas.

   (b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

3 Métodos numéricos para sistemas não lineares

1. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3 + 5\,y - 2\,z & = & 0 \\ e^y - z^2 & = & 1 \\ -x^2 + y + z & = & 0 \end{array}\right.$$

Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 3\,c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\,c & 1 & 1 \end{array}\right].$$

a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

b) No caso de $c = 1$ resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss e obtenha a primeira iterada $x^{(1)}$ do método de Newton.

c) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

R: (b) $x^{(1)} = (0, 0, -1)$. (c) $|c| > 4/3$.

2. Considere o sistema não linear

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,x - \cos(x + y) = 2 \\ 3\,y - \sin(x + y) = 6. \end{array}\right.$$

Inicializando com $x^{(0)} = (1, 1)$ calcule duas iterações pelo método de Newton.

3. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não lineares

$$\left\{\begin{array}{ccc} e^x - 3 & = & 0 \\ 3\,y + 4\,z & = & 3 \\ 2\,x^2 + 2\,x + 2\,z & = & 1. \end{array}\right.$$

a) Tomando como aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior pelo método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

4. Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não lineares pelo método de Newton

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 &= -3 \\ 4\,x_1 + x_2^3 + x_3 &= 2 \\ x_1\,x_3 + 5\,x_2 &= 3, \end{cases}$$

usando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

a) Mostre que, para se obter $x^{(1)}$, se deve resolver um sistema linear da forma $Av = h$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e v e h são vectores de $\mathbb{R}^3$. Calcule h.

b) Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial $v^{(0)} = (-1, -1, -1)$, aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear.

c) Obtenha o valor de $x^{(1)}$, primeira iterada do método de Newton.

`EXAME, LEIC 12/02/2004`

5. Considere o sistema de equações algébricas não lineares

$$F(x) = 0,$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad F(x) = \begin{bmatrix} -3\,x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 - 3\,x_2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3\,x_3 - 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que a determinação de um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução única z do problema inicial, usando uma iterada do método de Newton e partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = (\alpha, \alpha, 0)$ (onde α é uma constante real), conduz à resolução de um sistema linear $A\,y = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2\,\alpha & 0 \\ 2\,\alpha & -3 & 0 \\ 2\,\alpha & 2\,\alpha & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3\,\alpha - \alpha^2 \\ 3\,\alpha - \alpha^2 \\ 1 - 2\,\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

b) Tomando $\alpha = 1$, resolva o sistema $Ay = b$ da alínea anterior pelo método de eliminação de Gauss e conclua a determinação do valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$.

`EXAME, LEFT 15/07/2003`

6. Considere o método de Newton aplicado à resolução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x_1^4 - x_3^2)\, x_2 + 1 & = & 0 \\ (x_1^2 + x_3 + 8\, b) x_2 & = & 3 \\ (3 - 3\, x_3^2)\, x_2 + 1/8 & = & 0. \end{array} \right.$$

a) Verifique que, se $x^{(0)} = (1, b, -1)$, então $x^{(1)} = x^{(0)} - h$, sendo h a solução do sistema linear $A\, h = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 4\, b & 0 & 2\, b \\ 2\, b & 8\, b & b \\ 0 & 0 & 6\, b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8\, b^2 - 3 \\ 1/8 \end{bmatrix}.$$

b) Justifique que o método de Jacobi, aplicado ao sistema $A\, h = b$, converge qualquer que seja $h^{(0)}$, se e só se $b \neq 0$.

Pode garantir que $h^{(3)}$ seja a solução exacta do sistema $Ah = b$?

`TESTE, LEAmb 05/04/2003`

7. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\, x_1 + x_2\, (x_3 + 1) & = & 10 \\ 3\, (x_2 + 1) + x_3^2 & = & 11 \\ 3\, x_1 + x_3^2 & = & 9, \end{array} \right.$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3, 2, 1]$.

a) Mostre que o sistema $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

b) Resolva o sistema linear obtido em a) e calcule $\mathbf{x}^{(1)}$.

Capítulo IV

Aproximação de funções

Interpolação polinomial

1. Na tabela seguinte são apresentados valores duma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressão do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule uma aproximação para $f(1.3)$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressão do erro de interpolação, admitindo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau não superior a 2.

R: (a) $p_2(x) = 1.890\,\dfrac{(x-1.0)(x-1.6)}{0.16} - 2\,\dfrac{(x-0.8)(x-1.6)}{0.12} + 3.185\,\dfrac{(x-0.8)(x-1)}{0.48}$.

(b) $p_2(x) = 1.890 + 0.55\,(x-0.8) + 1.78125\,(x-0.8)\,(x-1.0)$.

(c) $|f(1.3) - p_2(1.3)| \leq \dfrac{1}{3!}\dfrac{6}{0.8^4}\,|(1.3-0.8)(1.3-1.0)(1.3-1.6)|$.

2. Considere a seguinte tabela de valores:

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-33	14	-2	-5

   (a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1, 3]$, determine, por interpolação inversa, uma aproximação do zero da função situado no intervalo $[-1, 1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a sua escolha.

   (b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1, 1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Suponha que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressão que permita obter $f(x)$.

R:

a) Polinómio interpolador inverso:

$$Q(y) = -1 - 0.125(y - 14) + \frac{13}{456}(y - 14)(y + 2); \qquad Q(0) = -0.048.$$

b) Polinómio interpolador :

$$P_2(x) = 14 - 8(x + 1) + 1.625(x - 1)(x + 1); \qquad \text{zero de } P_2 : \quad x = 0.6266.$$

c)

$$f(x) = P_2(x) - 2.375(x - 1)(x + 1)(x - 3) + 3(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x - 2)$$

3. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1.$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_i) = 0$, $i = 0, 1, ..., n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

4. Sejam $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ os polinómios fundamentais de Lagrange para os nós $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (com $n \geq 1$). Prove que, se $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, então $\sum_{j=0}^{n} x_j^p l_j(x) = x^p$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

`EXAME, LEIC 13/02/2003`

5. Designando por N ($N \geq 1$) o número de subintervalos, de igual comprimento $h = 1/N$, do intervalo $I = [0,1]$, pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x nesse intervalo, usando os pontos igualmente afastados

$$x_j = j\,h, \qquad j = 0, 1, \ldots, N\,.$$

Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, para $0 \leq i \leq (N-1)$, a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1, nos pontos x_i e x_{i+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h (ou o menor valor de N), de modo que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo I seja inferior a 10^{-6}.

R: $h < \sqrt{8 \times 10^{-6}/e} \simeq 1.716 \times 10^{-3}$, $N = 583$.

6. Considere a função real cujos valores são dados na seguinte tabela:

x	-2	-1	-0.5	0
$f(x)$	6	2	α	4

(a) Supondo que f é um polinómio de grau 2, obtenha esse polinómio e calcule o valor de α, usando a fórmula de Lagrange.

(b) Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior e supondo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, calcule de novo o valor de α. `EXAME, LEIC 29/01/2004`

7. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10}(x)$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcule uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2,3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

$R:$ (a) $f(2.4) \simeq p_2(2.4) = 0.379976$, $e_2(2.4) = f(2.4) - p_2(2.4) = 0.000235$, $E = max_{2.0 \leq x \leq 3.0}|f(x) - p_2(x)| \leq 0.000871$.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$, tal que $f \in C([0, 0.55])$:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.65	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha uma aproximação de $f(0.47)$ usando um polinómio interpolador de grau 2. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]}|f^{(3)}(x)| = M$, calcule um majorante para o erro do resultado obtido na alínea anterior.

R:

a)Usando os nós de interpolação $x_0 = 0.34, x_1 = 0.4, x_2 = 0.52$:

$$f(0.47) \approx P_2(0.47) = 0.27802$$

b)

$$|f(x) - P_2(x)| \leq M \times 0.758 \times 10^{-4}.$$

9. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador $p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2$.

(a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

(b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine a expressão analítica de f.

10. Suponha que os valores de f calculados nos nós $x_0, ..., x_n$ estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações $\tilde{f}_0, ..., \tilde{f}_n$. Seja p_n o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e $\tilde{p}_n$ o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

(a) Mostre que se $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$, então $\max_{x\in[x_0,x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon$, em que $C = (n + 1) \max_k \max_{x\in[x_0,x_n]} |l_k(x)|$

(b) No caso de nós igualmente espaçados, e $n = 2$, obtenha $C = \frac{5}{4}$.

11. Sabendo que $f^{(n+1)}[a, b] \subset [a, b]$, mostre que o erro de interpolação verifica, para qualquer $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\}e^{|b-a|}.$$

12. Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

13. Seja f uma função de classe C^3 em $[a, b]$ e $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a dois que interpola f nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$. Mostre que:

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}} \max_{y \in [a,b]} |f^{(3)}(y)|, \forall x \in \mathbb{R}$$

14. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x	-1	1	4
$f(x)$	2	-2	-8

Sabendo que f é um polinómio e que:

$$f[-1, 1, 2] = 4, \qquad f[-1, 1, 2, 4, x] = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\}$$

determine a forma de f.

R:

$$P_2(x) = 2 - 2(x+1) + 4\,(x+1)\,(x-1)$$
$$P_3(x) = P_2(x) - 2\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4)$$
$$f(x) = P_4(x) = P_3(x) + 3\,(x+1)\,(x-1)\,(x-4)\,(x-2)$$

15. Considere a tabela de valores

x_i	1	2	3	5	6
f_i	4.75	4	5.25	19.75	36

Calcule um valor aproximado de $f(3.5)$ executando interpolação de Newton, com polinómios de grau um, dois e três. Justifique a escolha dos nós de interpolação em cada um dos casos anteriores. Se f for um polinómio, poder· dizer alguma coisa sobre o seu grau? Justifique.

16. Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \qquad f(0) = 1 \qquad \text{e} f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre uma aproximação para a raiz da função f usando interpolação inversa.

17. Pretende-se calcular uma aproximação do zero z da função

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{-x}$$

situado no intervalo $[0.5, 1.0]$.

(a) Prove que z é único neste intervalo.

(b) Determine uma aproximação de z por interpolação linear inversa.

(c) Determine uma estimativa do erro da aproximação calculada na alínea anterior.

18. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressão exacta de f.

19. Seja $f \in C^3[0, 1]$ uma função real.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio p de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0) \qquad p(1) = f(1) \qquad \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

(b) Supondo que $|f'''(x)| \leq M,\ \forall x \in [0,1]$, mostre que $\max_{x\in[0,1]}|f(x)-p(x)| \leq \frac{M}{6}$

20. Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-i)$$

no intervalo $[0,n]$ para diferentes valores de n. Verifique que

$$\max_{t\in[0,n]}|\psi_{n+1}(t)| < n!$$

21. Considere as funções

$$f(x) = \frac{1}{1+25\,x^2}, \qquad g(x) = e^x + e^{-x}, \qquad x \in [-1,1]$$

(a) Determine o polinómio interpolador de Lagrange de f e de g nos pontos

$$x_i = -1 + 2\,(i-1)/n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

com $n = 5, 9$ e 13. Compare graficamente os polinómios interpoladores com as funções a aproximar. Explique os resultados com base na teoria.

Método dos mínimos quadrados

1. Considere a seguinte tabela:

x	1.0	1.2	1.5	1.6
$f(x)$	5.44	6.64	8.96	9.91

   (a) Obtenha o polinómio do primeiro grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos da tabela.

   (b) Idem, mas para o polinómio do segundo grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

   (c) Admitindo que $|f'(x) - g'(x)| \leq M, \ \forall x \in [1.2, 1.5]$ obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.

   Sugestão: use o teorema de Lagrange.

   (d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3° grau?

Solução:

$$a) \quad P_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$$

$$b) \quad P_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2; \qquad f(1.4) \approx P_2(1.4) = 8.118.$$

$$c) \quad |e(1.4)| \leq 0.01283 + M|1.4 - 1.5|$$

$$d) \quad \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_1(x_i))^2 = 0.06485; \qquad \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_2(x_i))^2 = 0.306 \times 10^{-2};$$

$$\sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_3(x_i))^2 = 0.$$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo:

$$g(x) = \frac{1}{A\,x + B}$$

Determine as constantes A e B pelo método dos mínimos quadrados.

Sugestão: poder· ser conveniente efectuar uma mudança de variável.

Solução: Mudança de variável : $h(x) = 1/g(x) = A\,x + B$; $A = 4/15; B = 11/30$.

3. Determine a função da forma $g(x) = A\,e^x + B\,e^{-x}$ que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x	0	0.5	1.0
$f(x)$	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz do sistema de equações normais usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

Solução: $A = 2.0; B = 3.0$.

4. Seja f tal que $f(-2) = 3, f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = a\,x + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

Solução: $a = 3, b = 8, \quad \sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - ax_i - b)^2 = 6$.

5. Considere os 6 pontos $(-1, 7), (0, 6), (1, 6), (2, 4), (4, 3), (5, 1)$.
   (a) Determine a função $g(x) = a - x + b\,x^2$ cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.
   (b) O mesmo que em a) usando $g(x) = a\,e^{b\,x} - \dfrac{x^2}{4}$, e uma transformação de variáveis.

6. Considere os pontos $(-5, -1), (-3, 0), (0, -1), (1, 2)$.
   (a) Determine a função da forma $g(x) = \dfrac{a}{x+1} + b\,x^2$, que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados.
   (b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.
   (c) O mesmo que em a) para $g(x) = (a + b\,x^2)/(x + 1)$.

7. Dada a tabela

x	0	1.5	3.0	4.5	6.0
$f(x)$	1.00	1.57	2.00	4.30	7.00

diga em que consiste a sua melhor aproximação de mínimos quadrados por funções aproximantes do tipo $g(x) = a\,x + b\cos(x)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule esta melhor aproximação, bem como o desvio em 4.5. `EXAME, LEIC 15/12/2001`

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_j	0	$\pi/2$	π	$3\,\pi/2$
f_j	1	0.5	-1	0

   (a) Obtenha a função do tipo $g(x) = a_0 + a_1\,\sin(x) + a_2\,\cos(x)$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine $Q = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2$.

   (b) Seja $Q_1 = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - a\cos(x_j))^2$. Com base na alínea anterior justifique que $Q_1 > 0.0625$, $\forall a \in \mathbb{R}$. `EXAME, LEIC 13/02/2003`

9. Considere a aproximação de mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1),\ (0, 1),\ (1, 2), (2, 2)$$

por uma função $g(x) = a_1\,\phi_1 + a_2\,\phi_2 + a_3\,\phi_3$ com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(x) + x^4 - 2\,x^3 - x^2 + 3\,x + 1.$$

Diga se a matriz do sistema normal é invertível e comente a escolha das funções ϕ_k.

10. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_j	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
f_j	0.262087	1.20472	2.82757	1.34375	0.0130539

Calcule os valores das constantes a, b que minimizam o funcional $\sum_{j=0}^{4}(f_j - a\,e^{b\,x_j^2})^2$.
Sugestão: Utilize o método de Newton para sistemas não lineares.

Capítulo V
Integração numérica

1. Considere o integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e:

i. A regra dos trapézios; **ii.** A regra de Simpson.

b) Faça uma estimativa do número mínimo de subintervalos que se deveria considerar se se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com um erro inferior a 10^{-4}, mediante cada uma das regras referidas.

Solução: a) i) 1.49068; ii) 1.46371; b) i) 117; ii) 12.

2. No intervalo $[0, a]$, uma função f é assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3\,x - 1 & 1 \leq x \leq a \end{cases}$$

a) Obtenha aproximações para o integral $I(f) = \int_0^a f(x)dx$, com $a = 2$ e $a = 3$, dos seguintes modos:

i. Utilizando a regra dos trapézios composta, com passo $h = 1$.

ii. Utilizando a regra de Simpson simples.

b) Determine o erro de cada um dos resultados obtidos, comparando com o valor exacto de $I(f)$.

c) A fórmula do erro da regra dos trapézios é aplicável neste caso? E a da regra do Simpson? Justifique.

Solução: Fórmula dos trapézios composta: para $a = 2, T_2 = 6$; se $a = 3, T_3 = 25/2$ (em ambos os casos obtém-se o valor exacto do integral). Fórmula de Simpson: $a = 2, S = 16/3$; $a = 3, S = 25/2$ (só no segundo caso se obtém o valor exacto do integral.

Explicação: A função considerada não é continuamente diferenciável em [0,3] (a primeira derivada é descontínua em $x = 1$). A fórmula do erro, em geral, não é aplicável, nem para a regra dos trapézios nem para a de Simpson. No entanto, quando se aplica a regra dos trapézios composta, estamos a integrar a função separadamente em $[0, 1]$, $[1, 2]$ e em $[1, 3]$. Como a função é infinitamente diferenciável em cada um destes intervalos, a fórmula do erro de integração pode ser aí aplicada. De acordo com essa fórmula, o erro é nulo (a segunda derivada de um polinómio de grau 1 é 0). Assim se explica que a regra dos trapézios composta com $h = 1$ seja exacta para esta função. O mesmo raciocínio não é válido para a regra de Simpson, já que, neste caso, a função é integrada no intervalo $[0, 3]$. Ainda assim, no caso de $a = 3$, a regra de Simpson leva-nos ao valor exacto do integral (o que acontece por coincidência).

3. Para aproximar o integral $I = \int_0^1 e^x\, g(x)\, dx$, pretende–se construir uma fórmula de quadratura do tipo

$$Q(g) = A_0\, g(0) + A_1\, g(1).$$

a) Calcule A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para funções do tipo $g(x) = a + b\, x$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Seja $g(x) = \sin(x)$. Obtenha uma aproximação de I usando a regra de quadratura obtida em a) e calcule uma estimativa do erro absoluto.

c) Determine um valor aproximado para I usando a regra dos trapézios composta com **4 subintervalos.**

d) Recorrendo à regra dos trapézios composta, determine o número mínimo de subintervalos necessários para garantir que o erro absoluto do resultado seja inferior a 10^{-2} (despreze erros de arredondamento).

4. Dado o integral $I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\, dx$, pretende-se obter a fórmula de integração

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1[f(x_1) + f(-x_1)]$$

de modo a que a regra seja pelo menos de grau 2.

a) Exprima A_0 e A_1 em função de x_1.

b) Mostre que a fórmula obtida é pelo menos de grau 3, e determine x_1 de modo a que a fórmula seja pelo menos de grau 5.

Solução:

(a) Os pesos A_0 e A_1 são solução do sistema

$$\begin{cases} A_0 + 2\, A_1 & = 2 \\ \quad\;\; 2\, x_1^2\, A_1 & = 2/3 \end{cases}$$

Logo, $A_1 = 1/(3\, x_1^2)$, $A_0 = (6\, x_1^2 - 2)/(3\, x_1^2)$ e

$$Q(f) = \frac{6\, x_1^2 - 2}{3\, x_1^2}\, f(0) + \frac{1}{3\, x_1^2}\, [f(x_1) + f(-x_1)].$$

(b) Como $Q(x^3) = I(x^3) = 0$ e $Q(x^4) = 2/3\, x_1^2$, a regra é pelo menos de grau 3. Atendendo a que $Q(x^4) = I(x^4) = 2/5$ se e só se $x_1 = \pm\sqrt{3/5}$, fazendo $x_1 = \sqrt{3/5}$, e dado que $Q(x^5) = I(x^5) = 0$, a regra respectiva é pelo menos de grau 5 de exactidão.

5. A tabela seguinte mostra os resultados obtidos por uma regra de Newton-Cotes (composta) no cálculo do integral $I(f)$ de uma certa função f indefinidamente diferenciável.

n	8	16	32	64
I_n	295.27	274.15	268.97	267.68

O valor I_n representa a **aproximação** obtida com $n+1$ nós de integração. Sabendo que o **valor exacto** do integral é $I(f) = 267.25$, diga, justificando, que fórmula pode· ter sido utilizada (trapézios ou Simpson).

6. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	0	2	$1/2$	$-1/2$

a) Utilizando a fórmula de Newton com diferenças divididas, determine o polinómio p_2, de grau ≤ 2, que interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -2$, $x_2 = 0$ e $x_4 = 2$.

b) Suponha que pretendemos aproximar o valor de $I = \int_{-2}^{2} f(x)dx$ por $\int_{-2}^{2} p_2(x)\, dx$. Sabendo que as derivadas de f satisfazem as condições $|f^{(j)}(x)| \leq j/2$, $j = 1, \ldots, 4$, no intervalo $[-2, 2]$, determine um majorante para o erro de integração. Justifique.

7. Calcule o valor aproximado de

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\, dx,$$

a) Usando a regra dos trapézios composta com 5 nós de integração. Determine um majorante do erro.

b) Usando a regra de Simpson simples. Determine um majorante do erro.

8. Pretende-se obter uma fórmula com dois nós no intervalo $[-1, 1]$, i.e., uma fórmula do tipo:

$$I_1(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

a) Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular A_0 e A_1 de modo a que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

b) Resolva o sistema em ordem a A_0 e A_1.

c) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem pelo menos grau 2.

Solução: b) $A_1 = \dfrac{2x_0}{x_0 - x_1}$; $A_0 = \dfrac{-2x_1}{x_0 - x_1}$.

9. Considere uma função $f \in C^4(-2, 10)$, a qual toma os valores $f(1) = -2, f(4) = 7$ e $f(10) = 6$. Admita que $1, 4$ e 10 são pontos fixos de $f \circ f$.

   a) Determine o valor aproximado de $\int_{-2}^{10} f(x)dx$ que se obtém usando a regra de Simpson com 5 nós de quadratura.

   b) Supondo que $|f^{(iv)}(x)| \leq 10$, determine um majorante do erro absoluto cometido em a).

10. a) Encontre uma fórmula de quadratura $Q(f) = 2\,f(a) + A\,f(b)$ que seja exacta para os polinómios de grau menor ou igual a 1, no intervalo $[0, 1]$.

    b) Indique como construir uma fórmula composta, partindo da expressão obtida em a).

11. Considere integrais do tipo

$$J(f) = \int_0^1 f(x)\,e^{-x}\,dx.$$

   a) Deduza uma fórmula de quadratura que seja exacta para $J(a + b\,x)$, usando um único ponto em $[0, 1]$.

   b) Indique a correspondente fórmula composta, e calcule uma aproximação do integral $J(\cos(x^2))$ usando 4 subintervalos.

12. Considere o integral definido

$$I = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \ln(\sin(x))\,dx$$

   a) Determine o menor número de pontos em que deve conhecer o valor da função integranda para calcular I pela regra dos trapézios composta com um erro que não exceda 2×10^{-2}.

b) Utilizando o resultado da alínea anterior, calcule um valor aproximado de I.

13. Considere a região S do plano, situada no 1° quadrante, delimitada pelas rectas $x = 1/2, x = 1$ e pelas curvas de equações $y = x^3$ e $y^2 = x$.

a) Denote por $A(S)$ a área da respectiva região. Estabeleça o integral definido que lhe permite calcular exactamente $A(S)$.

b) Se calcular um valor aproximado $\tilde{A}(S)$ da área da região considerada mediante aplicação da regras de Simpson, qual o menor número de pontos em que deve conhecer o valor da função integranda, de modo a garantir um erro de truncatura inferior a 3×10^{-3}?

c) Indique os cálculos necessários para obter $\tilde{A}(S)$ pelo método referido e nas condições da alínea anterior.

d) Calcule o erro exacto da aproximação $\tilde{A}(S)$.

14. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-1	1	2	3	5	7
$f(x)$	-1	1	-1	1	2	$5/2$

a) Obtenha dois valores aproximados para $\int_{-1}^{7} f(x)dx$, de duas maneiras distintas, recorrendo a fórmulas de quadratura e usando o maior número possível de pontos da tabela. Justifique a escolha dos pontos.

b) Supondo que $\max_{x\in[-1,7]}|f^{(n)}(x)| \leq M_n, \forall n$, com M_n constante real, determine expressões, em função de M_n, para os erros de integração nos dois casos que considerou na alínea anterior.

15. Para aproximar o integral $I(f) = \int_0^1 xf(x)dx$, em que $f \in C^2[0,1]$, considere a fórmula de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1 f'(1),$$

onde f' designa a derivada de f. Determine os pesos A_0, A_1 de modo a que a fórmula dê o valor exacto do integral quando f é um polinómio de grau ≤ 1.

`EXAME,LEC 25/07/2001`

16. Seja $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, e $\mathcal{P}_m$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a m. Pretende-se aproximar $I(f)$ por uma fórmula do tipo

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

(a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$, nos seguintes casos:

(i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;

(ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;

(iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;

(iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.

(b) Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior, determine o grau de Q.

Solução: i)$A_0 = 5/9, A_1 = 16/9, A_2 = -1/3$; grau 2; ii) $A_0 = 1/3, A_1 = 4/3; A_2 = 1/3$; grau 3 ; iii)$A_0 = A_2 = 1; A_1 = 0$; grau 3; iv) $A_0 = A_2 = 5/9, A_1 = 8/9$; grau 5.

17. Utilizando a regra dos trapézios composta, mostre que

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Capítulo VI

Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias

Euler	$y_{n+1} = y_n + h\, f_n$
Euler implícito	$y_{n+1} = y_n + h\, f_{n+1}$
Ponto médio	$y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n + h/2, y_n + h/2\, f_n)$
Heun	$y_{n+1} = y_n + h/2\,(f_n + f(x_n + h, y_n + h\, f_n))$

1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - x + 4\,y(x) \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

com solução exacta $y(x) = x/4 - 3/16 + (19/16)\, e^{4x}$.

a) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$ usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

b) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$. Compare com o valor do erro de facto cometido.

c) Utilize o método de Taylor de ordem 2, com $h = 0.1$, para obter uma aproximação de $y(0.2)$. Compare com o resultado da alínea a).

Solução: a) $y_2 = 2.19$; b) $|y_2 - y(0.2)| \le 0.648$; erro de facto cometido: $e_2 = 0.315$. c) $y_2 = 2.4636$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(x\, y(x)) \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que este problema tem uma única solução.

b) Aplique o método de Euler com $h = 0.1$ e calcule uma aproximação para $y(0.2)$.

c) Obtenha um majorante para o erro absoluto do valor obtido na alínea anterior, desprezando erros no valor inicial y_0.

d) Qual deverá ser o valor do passo h para poder garantir um erro absoluto não superior a 10^{-4} no valor calculado na alínea b)?

3. Utilize o método do ponto médio para obter uma aproximação da solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

no ponto $x = 0.1$, com espaçamentos respectivamente $h = 0.1, 0.05$ e 0.025. Sabendo que a solução exacta deste problema é dada por $y(x) = e^x - 1 - x$, compare os resultados obtidos com o valor exacto de $y(0.1)$. Comente.

Solução: $h = 0.1$, $y_1 = 0.005$; erro: 1.7×10^{-4}; $h = 0.05$, $y_2 = 0.0051266$; erro: 4.4×10^{-5}; $h = 0.025$, $y_4 = 0.00515962$; erro: 1.1×10^{-5}. Quando se reduz o passo para metade, o erro diminui aproximadamente 4 vezes, visto tratar-se de um método de segunda ordem.

4. Considere a seguinte família de problemas de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

a) Mostre que para $f(x, y) = y + \sin(x)\, y + x^3$, o problema tem solução única.

Considere $y_0 = 1$. Obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ aplicando o método de Euler implícito com $h = 0.1$.

b) Considere agora $f(x, y) = y + \sin(x)/y^4 + x^3$. Poderá garantir existência e unicidade de solução para qualquer valor inicial y_0?

Para $y_0 = 1$, obtenha uma aproximação de $y(0.2)$ aplicando o método de Euler implícito com $h = 0.1$. Use o método de Euler explícito para prever o valor de y_{n+1} no membro da direita da respectiva equação às diferenças.

5. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + x\, y'(x) + y(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

a) Determine o valor aproximado de $y(1)$, pelo método de Euler, com $h = 0.5$.

b) Idem, mas pelo método do ponto médio.

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - x^2 + 1 & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

com solução exacta dada por $y(x) = 1 + 2\,x + x^2 - 0.5\,e^x$.

a) Obtenha um valor aproximado para $y(1)$ pelo método de Heun com $h = 0.2$.

b) Idem, mas pelo método do ponto médio.

c) Idem, mas pelo método de Taylor de ordem 2.

d) Compare as soluções aproximadas obtidas nas alíneas anteriores com a solução exacta. Comente.

7. Verifique que o método do ponto médio, quando aplicado ao problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -20\,y(x) & 0 \le x \le 20 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

resulta na fórmula de recorrência

$$y_{n+1} = (1 - 20\,h + 200\,h^2)^{n+1}, \ \forall n \ge 0.$$

a) Aplique este método (com $h = 0.1$) para obter um valor aproximado de $y(1)$ e compare o resultado com o valor exacto, sabendo que a solução do problema anterior é $y(x) = \exp(-20\,x)$.

b) Se $h > 0.1$, verifique o que acontece com a solução fornecida pelo método de Runge-Kutta. Comente.

8. Considere o problema de Cauchy

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} y'(t) = -t\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Mostre que $y(t) = e^{-t^2/2}$ é a única solução de (P). Compare o valor exacto de $y(2)$ com o valor aproximado dado pelo método de Euler, considerando primeiro $h = 1$ e depois $h = 0.5$.

b) Apresente estimativas de erro para os valores obtidos em a), e determine o número de passos de forma a garantir um erro absoluto inferior a 10^{-6} (considerando que o valor inicial é exacto). o?

Solução: a) com $h = 1, y(2) \approx y_2 = 0$; com $h = 0.5, y(2) \approx y_4 = 0.09375$. b) Estimativa do erro: para $x_n = 2$, $|y_n - y(x_n)| \le h\frac{e^4-1}{4}$.

9. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \dfrac{y(x)}{x}, & 2 \leq x \leq 3 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

com solução exacta dada por $y(x) = x/2 + 2/x$. Determine um valor aproximado para $y(2.1)$ pelo método de Euler com passos respectivamente $h = 0.1, 0.05$ e 0.025. Confirme numericamente que a convergência do método é de ordem 1.

Solução: $h = 0.1$, $y_1 = 2$; erro: 0.00238; $h = 0.05$, $y_2 = 2.0012$; erro: 0.0012; $h = 0.025$, $y_4 = 2.0018$; erro: 0.0006. Quando se reduz o passo para metade, o erro também diminui aproximadamente para metade pois o método de Euler é de ordem 1.

10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) & a \leq x \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

onde $f \in C[a,b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Escrevendo a equação na forma $y(x) = y_0 + \int_a^x f(x)\, dx$, mostre que o método do ponto médio corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral $\int_a^x f(x)\, dx$. Mostre ainda que o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios.

11. Considere o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = e^x, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

Obtenha valores aproximados para $y(0.2)$ e $y'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$.

12. Seja $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(a) = a$.

a) Mostre que se $f(x,y) = g(y)$, com $|g(x)| \leq c < 1$ e $|g'(x)| \leq L$, para qualquer x, então a sucessão $x_{n+1} = y(x_n)$ converge, qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, e o seu limite é a.

b) Indique qual a expressão do método de Taylor de segunda ordem e indique a expressão de y_1 para um espaçamento h.

13. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

a) Aplique o método de Euler com $h = 0.25$, para determinar a aproximação de $u(1)$, e compare com a solução exacta do problema $u(x) = \dfrac{1}{2} e^{-x} \left(1 + e^{2x}\right)$.

b) O mesmo que em a), mas usando o método do ponto-médio (RK de ordem 2).

c) Considere agora a equação de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) = u^3(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aproxime $u(1)$ usando o método do ponto médio com $h = 0.5, h = 0.25$ e $h = 0.1$.

d) O mesmo que em c) para $u''(x) = u'(x)u(x)^2 - x\,u'(x)^2$.

14. Considere $y'(t) = f(y(t))$ e suponha que $f'(x) \in [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que se $h = 1$, o método de Euler converge para um valor fixo quando $m \to \infty$. Que ponto fixo é esse?

b) O que acontece quando os valores de h tendem para zero?

c) Calcule uma aproximação de $y(1)$ considerando $h = 0.2$, $f(x) = \sin(x)/2 - x$ e $y(0) = 1$.