**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral II

## TESTE 2 - VERSÃO A

3 de Junho de 2013 - das 11h00 às 12h30

**Resolução abreviada das questões 1 e 2**

1. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + z^2 = 4 + 2z\} .$$

(a) Mostre que $S$ é uma variedade e determine a sua dimensão.
**Resolução:** $S$ é o conjunto de nível 0 da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4 - 2z$, de classe $C^1$. A matrix $DF(x, y, z) = [2x, 0, 2z - 2]$ tem caraterística 1 em todos os pontos de $S$ porque car $DF(x, y, z) < 1$ sse $(x = 0) \wedge (z = 1)$, mas $(0, y, 1) \notin S$ porque $0+1-4-2 \neq 0$. Assim $S$ é uma variedade e a sua dimensão é $3 - \text{car}\, DF = 3 - 1 = 2$.

(b) Determine o espaço tangente a $S$ no ponto $(2, 0, 0)$.
**Resolução:** O espaço normal a $S$ no ponto $(2, 0, 0)$ é gerado por $DF(2, 0, 0) = [2, 0, -2]$. Portanto o espaço tangente a $S$ no ponto $(2, 0, 0)$ é o espaço linear:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x - 2z = 0\right\} .$$

2. Mostre que

$$\begin{aligned} u^2 - v &= 3x + y \\ 4u - 2v^2 &= x - 2y \end{aligned}$$

define implicitamente $(u, v)$ como função de $(x, y)$ numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (0, 4, -2, 0)$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 4)$.
**Resolução:** As equaçoes definem o conjunto de nível $(0, 0)$ da função $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, u, v) = (u^2 - v - 3x - y, 4u - 2v^2 - x + 2y)$. Porque

a) $F \in C^1$

b) $F(0, 4, -2, 0) = (0, 0)$

c)

$$\det D_{uv}F(0, 4, -2, 0) = \left| \begin{array}{cc} 2u & -1 \\ 4 & -4v \end{array} \right|_{(x,y,u,v)=(0,4,-2,0)} = \left| \begin{array}{cc} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{array} \right| = 4 \neq 0$$

o teorema da função implícita garante que as equações definem implicitamente $(u, v)$ como função $f$ de $(x, y)$ numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (0, 4, -2, 0)$. O teorema implica ainda que:

$$\begin{aligned} DF(0,4) &= -D_{uv}(0,4,-2,0)^{-1} D_{xy}(0,4,-2,0) \\ &= -\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 4)$ é a entrada 12 desta matriz, ou seja $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 4) = -\frac{1}{4} \cdot 2 = -\frac{1}{2}$.