Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

3 de Junho de 2013 - das 9h00 às 10h30

Resolução abreviada

1. Considere o conjunto definido por
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \, , \; x + y + \sqrt{2}z = 0\} \, .$$
   (a) Mostre que C é uma variedade e determine a sua dimensão.
   Resolução: Seja $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + \sqrt{2}z)$. Então F é uma função de classe C^1 e C é o conjunto de nível $(4, 0)$ de F. Como
$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \, ,$$
   então DF não tem característica 2 se e só se $(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 1, \sqrt{2})$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, se e só se $x = y = z/\sqrt{2}$. Substituindo os pontos $(x, x, \sqrt{2}x)$ nas equações que definem o conjunto C obtém-se uma condição impossível.
   Conclusão: C é uma variedade de dimensão 1.
   (b) Determine o espaço normal a C no ponto $(1, 1, -\sqrt{2})$.
   Resolução: As linhas da matriz
$$DF(1, 1, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$
   geram o espaço normal no ponto $P = (1, 1, -\sqrt{2})$, portanto
$$T_P C^{\perp} = \{\alpha(2, 2, -2\sqrt{2}) + \beta(1, 1, \sqrt{2}) \, : \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \, .$$

2. Calcule o máximo da função $f(x, y) = x^2 - x + y^2$ na região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   Resolução: A região D dada é um disco fechado, portanto é um conjunto compacto. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo absolutos em D e, como f é C^1, os pontos de extremo ou são pontos de estacionaridade no interior de D ou pertencem à fronteira ∂D.
   Pontos de estacionaridade:
$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (2x - 1, 2y) = (0, 0) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = (\tfrac{1}{2}, 0) \, .$$
   Sobre a fronteira de equação $x^2 + y^2 = 1$ usamos o método dos Multiplicadores de Lagrange, com $F(x, y) = x^2 + y^2$:
$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla F(x, y) \\ F(x, y) = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x - 1 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema tem duas soluções $(x, y) = (1, 0)$ e $(x, y) = (-1, 0)$. Calculando $f(1, 0) = 0$, $f(-1, 0) = 2$ e $f(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$, conclui-se que o máximo de f em D é 2.

3. Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = (y(\cos x - 1), \operatorname{sen} x) \ .$$

(a) Mostre que F não é gradiente no seu domínio.

Resolução: Como as derivadas parciais

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \cos x - 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \cos x$$

são diferentes, F não é um campo fechado, logo F não é um campo gradiente.

(b) Considere a linha que delimita a região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \, , \, x > 0, y < 0\}$. Utilize o Teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo campo F quando esta linha é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução: Seja R a região dada. A linha que delimita R é a fronteira ∂R. Pelo Teorema de Green

$$\int_{\partial R} F \cdot dg = -\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = -\iint_R 1 dxdy = -\text{Área}(R) = -\frac{\pi}{4} \ ,$$

porque ∂R é percorrida no sentido horário e R é um quarto de um disco de raio 1.

4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 2$. Considere o campo vectorial $G(x, y, z) = \left(x(y^2 + z), 1, -y^2 z - \frac{1}{2} z^2\right)$. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de G através da face de P que está contida no plano $x + y + z = 2$, no sentido da normal unitária exterior.

Resolução: A fronteira da pirâmide P é a união da face S dada no enunciado com os três triângulos

$$\begin{aligned}
T_x &= \{(0, y, z) \, : \, y + z \leq 2 \, , \, y \geq 0 \, , \, z \geq 0\} \ , \\
T_y &= \{(x, 0, z) \, : \, x + z \leq 2 \, , \, x \geq 0 \, , \, z \geq 0\} \ \text{ e} \\
T_z &= \{(x, y, 0) \, : \, x + y \leq 2 \, , \, x \geq 0 \, , \, y \geq 0\} \ .
\end{aligned}$$

As normais unitárias a cada um dos triângulos, exteriores a P, são

$$n_{T_x} = (-1, 0, 0) \quad , \quad n_{T_y} = (0, -1, 0) \quad \text{e} \quad n_{T_z} = (0, 0, -1) \ ,$$

respectivamente. Como div $G = 0$, pelo Teorema da Divergência fica

$$\begin{aligned}
\iint_S G \cdot n_{ext} &= \iiint_P \operatorname{div}(G) - \iint_{T_x} G \cdot n_{T_x} - \iint_{T_y} G \cdot n_{T_y} - \iint_{T_z} G \cdot n_{T_z} \\
&= 0 - 0 + \text{Área}(T_y) - 0 = 2 \ .
\end{aligned}$$

5. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z+1 = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\ 0 < z < 1\}\,,$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$.

(a) Determine um campo vectorial A da forma

$$A(x,y,z) = (-xy, 0, \beta(x,y))$$

tal que rot $A = H$, onde $H(x,y,z) = (y,x,x)$.

Resolução:

$$\text{rot}(A) = H \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rot}(-xy, 0, \beta(x,y)) = \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}(x,y), -\frac{\partial\beta}{\partial x}(x,y), x\right) = (y,x,x)$$

e uma solução é $\beta(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$.

(b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial H através de S no sentido da normal n.

Resolução: O bordo de S é $\partial S = C_1 \cup C_2$ onde

$$C_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2 = 4\}\ .$$

Pela regra da mão direita aplicada à normal n dada, C_1 é percorrida no sentido horário e C_2 no sentido anti-horário, quando vistas do ponto $(0,0,5)$. Sejam

$$g_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \quad \text{e} \quad g_2(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 1)\ , \quad \text{com} \quad t \in]0, 2\pi[\ .$$

Como estas parametrizações percorrem C_1 e C_2 no sentido anti-horário, quando vistas de $(0,0,5)$, o Teorema de Stokes (usando o potencial vector A da alínea anterior) implica que

$$\iint_S H\cdot n = \iint_S \text{rot}(A)\cdot n = -\int_0^{2\pi} A(g_1(t))\cdot g_1'(t)dt + \int_0^{2\pi} A(g_2(t))\cdot g_2'(t)dt = 0\ .$$

6. Considere o aberto $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| < 2\}$. Mostre que, para quaisquer campos escalares F e G de classe C^2 tal que $F(x) = 0$ e $G(x) = 0$ quando $||x|| > 1$, se tem

$$\int_M (div\nabla G)\, F = \int_M G\ div\nabla F\ .$$

Resolução: O exercício resolve-se aplicando o Teorema da Divergência ao campo vectorial $H = F\nabla G - G\nabla F$ e à região M.