Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO B

3 de Junho de 2013 - das 11h00 às 12h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 9 - 2y - y^2\} .$$

[1.5 v] (a) Mostre que S é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1.5 v] (b) Determine o espaço tangente a S no ponto $(0, 0, 3)$.

[3 v] 2. Mostre que

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 3u + v \\ 4x - 2y^2 &= u - 2v \end{aligned}$$

define implicitamente (x, y) como função de (u, v) numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (-2, 0, 0, 4)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial u}(0, 4)$.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y) = \left(-\frac{yx}{x+2}, 2\ln(x + 2)\right) .$$

[1 v] (a) Mostre que G não é gradiente no seu domínio.

[2 v] (b) Considere a linha triangular com vértices nos pontos $(1, 0), (0, 2), (-1, 0)$. Usando o Teorema de Green, calcule o trabalho realizado pelo campo G quando esta linha é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[4 v] 4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 2$. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \left(x^2y^2 - xz, 1, -2xy^2z + \frac{1}{2}z^2\right)$. Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através da face de P que está contida no plano $x + y + z = 2$, no sentido da normal unitária exterior.

5. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2 + \sqrt{x^2 + y^2} \ , \ 0 < z < 1\} ,$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$.

[1 v] (a) Determine um campo vectorial A da forma

$$A(x, y, z) = (xy, 0, q(x, y))$$

tal que $\mathit{rot}\, A = H$, onde $H(x, y, z) = (y, x, -x)$.

[3 v] (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial H através de M no sentido da normal n.

[3 v] 6. Considere o aberto $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| < 3\}$. Mostre que, para quaisquer campos escalares f e g de classe C^2 tal que $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ quando $||x|| > 2$, se tem

$$\int_D f\, \mathit{div} \nabla g = \int_D (\mathit{div} \nabla f)\, g .$$