

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO A

3 de Junho de 2013 - das 11h00 às 12h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4 + 2z\}.$$

[1.5 v] (a) Mostre que S é uma variedade e determine a sua dimensão.

[1.5 v] (b) Determine o espaço tangente a S no ponto $(2, 0, 0)$.

[3 v] 2. Mostre que

$$\begin{aligned}u^2 - v &= 3x + y \\4u - 2v^2 &= x - 2y\end{aligned}$$

define implicitamente (u, v) como função de (x, y) numa vizinhança de $(x, y, u, v) = (0, 4, -2, 0)$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 4)$.

3. Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(-\ln(1 + y), \frac{xy}{1 + y} \right).$$

[1 v] (a) Mostre que F não é gradiente no seu domínio.

[2 v] (b) Considere a linha triangular com vértices nos pontos $(1/2, 0)$, $(0, 3)$, $(-1/2, 0)$.

Usando o Teorema de Green, calcule o trabalho realizado pelo campo F quando esta linha é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[4 v] 4. Considere a pirâmide $P \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano

$$x + y + z = 1. \text{ Considere o campo vectorial } H(x, y, z) = \left(3, (z^3 + x^2)y, -x^2z - \frac{1}{4}z^4 \right).$$

Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de H através da face de P que está contida no plano $x + y + z = 1$, no sentido da normal unitária exterior.

5. Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2 = \sqrt{y^2 + z^2}, 0 < x < 1\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_x > 0$.

[1 v] (a) Determine um campo vectorial A da forma

$$A(x, y, z) = (p(y, z), 0, -yz)$$

tal que $\text{rot } A = G$, onde $G(x, y, z) = (-z, z, y)$.

[3 v] (b) Usando o Teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial G através de M no sentido da normal n .

[3 v] 6. Considere o aberto $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| < 3\}$. Mostre que, para quaisquer campos escalares f e g de classe C^2 tal que $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ quando $\|x\| > 2$, se tem

$$\int_D f \text{div} \nabla g = \int_D (\text{div} \nabla f) g.$$