DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Teste de Recuperação de Álgebra Linear

(LEGM, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT)

2º Semestre 2012/2013 - 12/06/2013 -8h

1º e 2º testes	Questões 1 a 7 (10 valores)	
3º teste	Questões 8 a 10 (5 valores)	
	Questão 11 (2,4 valores)	
	Questões 12 e 13 (2,6 valores)	
	Total	

Código: ZZ0000

Registo:

Nota:

Nome: ______________________ Número: ____________

Recuperação do 1º e 2º testes (duração da prova: 90 minutos)	☐
Recuperação do 3º teste (duração da prova: 90 minutos)	☐
Exame (duração da prova: 180 minutos)	☐

Os alunos que pretendam recuperar apenas o 1º + 2º teste devem responder apenas às questões 1 a 7, sendo a duração da prova de 90 minutos.

Os alunos que pretendam recuperar apenas o 3º teste devem responder apenas às questões 8 a 13, sendo a duração da prova de 90 minutos.

Os alunos que permanecerem na sala de exame decorridos 90 minutos desde o início da prova estarão obrigatoriamente a recuperar o conjunto dos três testes (equivalente a um exame) **não podendo** melhorar individualmente a nota do 1º + 2º ou do 3º teste.

Nas questões 1 a 10, com excepção da alínea 3b) e questão 7, os alunos devem apresentar apenas a resposta final de cada exercício. Apenas será avaliada a resposta final, pelo que esta deve estar totalmente correcta. Significa, portanto, que os alunos devem verificar os cálculos efectuados antes de responderem.

Nas questões 3b), 7 e 11 a 13 os alunos devem justificar as suas respostas e apresentar os cálculos efectuados.

Nenhuma espécie de consulta será permitida. A utilização ou exibição de máquinas de calcular, computadores, telemóveis, ou quaisquer outros meios de comunicação remota, é expressamente proibida. Também não é permitida a utilização de leitores de mp3 ou outros aparelhos similares.

Recuperação do 1º e 2º testes: questões 1 a 7. Duração: 90’.

1. (2,0 val) Determine o conjunto **S** das soluções dos seguintes sistemas, o primeiro com incógnita $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o segundo com incógnita $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$:

a) $\left\{ \begin{array}{l} x + 6y - 3z = 2 \\ x + 8y - 4z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \end{array} \right. .$ **b)** $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 3z + 2w = 3 \\ 9x + 4y + 6z + 4w = 6 \\ 3x + 2y + 3z + 3w = 6 \\ 3x + 2y + 4z + 4w = 9 \end{array} \right. .$

a) Resposta: $\mathbf{S} =$

b) Resposta: $\mathbf{S} =$

2. (1,0 val) Determine os únicos valores de α e β que fazem com que os vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 5, 3, \beta)\,, \quad \overrightarrow{v_2} = (1, 5, 4, 5\beta) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v_3} = (1, \alpha, 6, 1)$$

sejam linearmente dependentes.

Resposta: $\alpha =$ $\beta =$

3. (2,0 val) Considere as matrizes **A** e **B**, definidas pelas igualdades

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a matriz $\mathbf{A}^{-1}$.

b) Calcule a única matriz **X** que satisfaz a igualdade

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X}$$

a) Resposta: $\mathbf{A}^{-1} =$

b) Resolução:

4. (1,5 val) Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \mathcal{L}\{(1,1,-7,2),(1,0,-7,2)\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2w = 0 \quad \text{e} \quad z - 7w = 0\right\}.$$

a) Calcule uma base para o subespaço V.

b) Calcule uma base para o subespaço $U + V$.

c) Calcule uma base para o subespaço $U \cap V$.

Resposta:

a) Uma base de V é

b) Uma base de $U + V$ é

c) Uma base de $U \cap V$é

5. (1,0 val) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é representada nas bases canónicas pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

Indique uma base para cada um dos seguintes subespaços:

a) espaço das colunas da matriz $[T]$.

b) núcleo da transformação T .

Resposta:

a) Uma base de $\operatorname{Col}[T]$ é

b) Uma base de $\operatorname{Nuc} T$ é

6. (1,5 val) Considere a base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vectores $\mathbf{v}_1 = (5,3)$ e $\mathbf{v}_2 = (3,2)$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a única transformação linear tal que

$$T(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{v}_2 \quad \text{e} \quad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1.$$

a) Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ na base $\mathcal{B}$.

b) Indique a matriz que representa T na base $\mathcal{B}$.

c) Calcule $T(1,1)$.

Resposta:

a) $[(1,1)]_{\mathcal{B}} =$

b) $[T]_{\mathcal{B}} =$

c) $T(1,1) =$

7. (1,0 val) No espaço $\mathbb{P}_2$ dos polinómios de grau menor ou igual a dois, considere a base ordenada $\mathcal{P}_2 = (1, t, t^2)$ e a transformação linear $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida pela fórmula

$$T\,(p\,(t)) = 2\,p\,(t+3) - p\,(5)\;t\;.$$

a) Determine a matriz que representa T na base $\mathcal{P}_2$.

b) Determine o conjunto $\mathcal{S}$ dos polinómios que são soluções da equação $T\,(p\,(t)) = 2 - t$.

a) Resolução:

Resposta: $[T]_{\mathcal{P}_2} =$

b) Resolução:

Resposta: $\mathcal{S} =$

Recuperação do 3º teste: questões 8 a 13. Duração: 90'.

8. (2,0 val) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det \mathbf{A}$.

b) Calcule $\det(2\mathbf{B})$

c) Calcule $\det\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^{-1}\right)$

d) Calcule a entrada $(2,3)$ de $\mathbf{A}^{-1}$.

Resposta:

a) $\det \mathbf{A} =$

b) $\det(2\mathbf{B}) =$

c) $\det\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}^{-1}\right) =$

d) $[\mathbf{A}^{-1}]_{23} =$

9. (1,0 val) Considere o produto interno usual e calcule uma base para o complemento ortogonal dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) $U = \mathcal{L}\{(1,1,-7,2),(1,0,-7,2)\}$.

b) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2w = 0 \quad \text{e} \quad z - 7w = 0\}$.

Resposta:

a) Uma base de $U^\perp$ é

b) Uma base de $V^\perp$ é

10. (2,0 val) Considere o produto interno usual e os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u} = (1,0,1,0)\ , \qquad \mathbf{v} = (3,0,9,0) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = (2,3,3,4)\ ,$$

e os subespaços $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}\}$ e $V = \mathcal{L}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$.

a) Calcule a projecção ortogonal do vector $\mathbf{v}$ sobre o subespaço U.

b) Calcule a projecção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre o complemento ortogonal do subespaço U.

c) Calcule a projecção ortogonal do vector $\mathbf{w}$ sobre o subespaço V.

d) Calcule a distância de $\mathbf{w}$ ao subespaço V.

Resposta:

a) $\text{Proj}_U\, \mathbf{v} =$

b) $\text{Proj}_{U^\perp}\, \mathbf{v} =$

c) $\text{Proj}_V\, \mathbf{w} =$

d) $\text{dist}(\mathbf{w}, V) =$

Nos problemas que se seguem deverá justificar as suas respostas e apresentar os cálculos efectuados.

11. (2,4 val) Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os valores próprios de $\mathbf{A}$.

b) Determine os subespaços próprios de $\mathbf{A}$.

c) Indique uma matriz diagonal $\mathbf{D}$ e uma matriz $\mathbf{S}$ invertível tal que $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$.

d) Calcule $\mathbf{A}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$.

12. (1,2 val) Considere o plano $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(1,0,0)$, $(2,0,5)$ e $(1,1,4)$, e a recta r definida por

$$\mathsf{r} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - z = 1 \quad \text{e} \quad y + z = 3\right\}.$$

a) Escreva estes conjuntos na forma $\{p\} + S$, onde $p \in \mathbb{R}^3$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule a distância entre a recta r e o plano α.

13. (1,4 val) Seja $\mathbf{A}$ uma matriz real 3×3 para a qual existe um vector $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{A}^2\,\mathbf{u}_0 \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^3\,\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}\ ,$$

onde $\mathbf{0}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^3$.

a) Considere além de $\mathbf{u}_0$ os vectores $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\,\mathbf{u}_0$ e $\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^2\,\mathbf{u}_0$. Mostre que o conjunto ordenado formado por estes três vectores ($\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Considere uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz $\mathbf{A}$. Qual a representação matricial desta aplicação T na base definida na alínea anterior?

c) Prove que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável.