Código: BZ0001
Nota:

3º Teste de Álgebra Linear

(LEGM, LMAC, MEBiom, MEC, MEFT)
2º Semestre 2012/2013 - 25/05/2013 -9h

Duração: 1h30'

Nome: ______________________________ Número: __________

1. (2,0 val) Considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule $\det \mathbf{A}$.

b) Calcule $\det\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-2}\right)$

c) Calcule $\det(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

d) Calcule a entrada $(3,2)$ de $\mathbf{A}^{-1}$.

Resposta:

a) $\det \mathbf{A} =$

b) $\det\left(\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-2}\right) =$

c) $\det(\mathbf{A}-\mathbf{B}) =$

d) $[\mathbf{A}^{-1}]_{32} =$

2. (1,0 val) Considere o produto interno usual e calcule uma base para o complemento ortogonal dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$.

a) $U = \mathcal{L}\{(2,5,0,7), (0,0,2,3)\}$.

b) $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \quad 2x+2y+7w=0 \quad \text{e} \quad 3y+3z+7w=0 \quad \text{e} \quad 6x-6z+7w=0\}$.

Resposta:

a) Uma base de $U^\perp$ é

b) Uma base de $V^\perp$ é

3. (2,0 val) Considere o produto interno usual e os seguintes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1,1)\ , \qquad \mathbf{v} = (2,0,-4,6) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{w} = (-5,0,0,1)\ ,$$

e os subespaços $U = \mathcal{L}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}\}$ e $W = \mathcal{L}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.

a) Determine um vector $\mathbf{u}_2$ de forma que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ seja uma base ortogonal do subespaço U.

b) Calcule a projecção ortogonal do vector $\mathbf{w}$ sobre o subespaço U.

c) Calcule a distância do vector $\mathbf{w}$ ao subespaço U.

d) Determine um vector $\mathbf{u}_3$ de forma a que o conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ seja uma base ortogonal do subespaço $U+W$.

Resposta:

a) $\mathbf{u_2} =$

b) $\text{Proj}_U\, \mathbf{w} =$

c) $\text{dist}(\mathbf{w}, U) =$

d) $\mathbf{u}_3 =$

Nos problemas que se seguem deverá justificar as suas respostas e apresentar os cálculos efectuados.

4. (2,4 val) Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule os valores próprios de $\mathbf{A}$.

b) Determine os subespaços próprios de $\mathbf{A}$.

c) Calcule $\mathbf{A}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$.

5. (1,2 val) Considere a recta $\mathsf{r}_1 \subset \mathbb{R}^3$ que passa pelos pontos $(3,2,0)$ e $(3,6,1)$, e a recta r_2 definida por

$$\mathsf{r}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x - z = 3 \quad \text{e} \quad y - 4z = 6\right\}.$$

a) Escreva estas rectas na forma $\{p\} + S$, onde $p \in \mathbb{R}^3$ e S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

6. (1,4 val) Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas $n \times n$ tais que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \ ,$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula.

a) Prove que o espaço das colunas da matriz $\mathbf{B}$ está contido no espaço nulo da matriz $\mathbf{A}$, ou seja, que $\operatorname{Col}\mathbf{B} \subset \operatorname{Nul}\mathbf{A}$.

b) Mostre que $\quad \dim(\operatorname{Nul}\mathbf{A}) + \dim(\operatorname{Nul}\mathbf{B}) \geqslant n$.

c) Supondo adicionalmente que $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$, ou seja, que

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \ ,$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, mostre que a matriz $\mathbf{A}$ é diagonalizável.