

Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

$$z = kb \frac{(\zeta + b)^k + (\zeta - b)^k}{(\zeta + b)^k - (\zeta - b)^k} \Leftrightarrow \frac{z - kb}{z + kb} = \left(\frac{\zeta - b}{\zeta + b} \right)^k$$

- O expoente k está relacionado com o ângulo do bordo de fuga, τ , através de

$$\tau = (2 - k)\pi \Leftrightarrow k = 2 - \frac{\tau}{\pi}$$

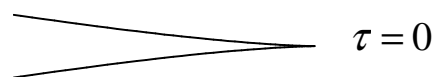
- $k=2$ corresponde à transformação de Joukowski

Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

$$z = kb \frac{(\zeta + b)^k + (\zeta - b)^k}{(\zeta + b)^k - (\zeta - b)^k} \Leftrightarrow \frac{z - kb}{z + kb} = \left(\frac{\zeta - b}{\zeta + b} \right)^k$$

- $k=2$ corresponde a uma linha de corrente divisória que sai com continuidade tangencial. O bordo de fuga não é um ponto de estagnação

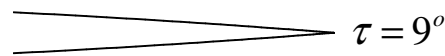


Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

$$z = kb \frac{(\zeta + b)^k + (\zeta - b)^k}{(\zeta + b)^k - (\zeta - b)^k} \Leftrightarrow \frac{z - kb}{z + kb} = \left(\frac{\zeta - b}{\zeta + b} \right)^k$$

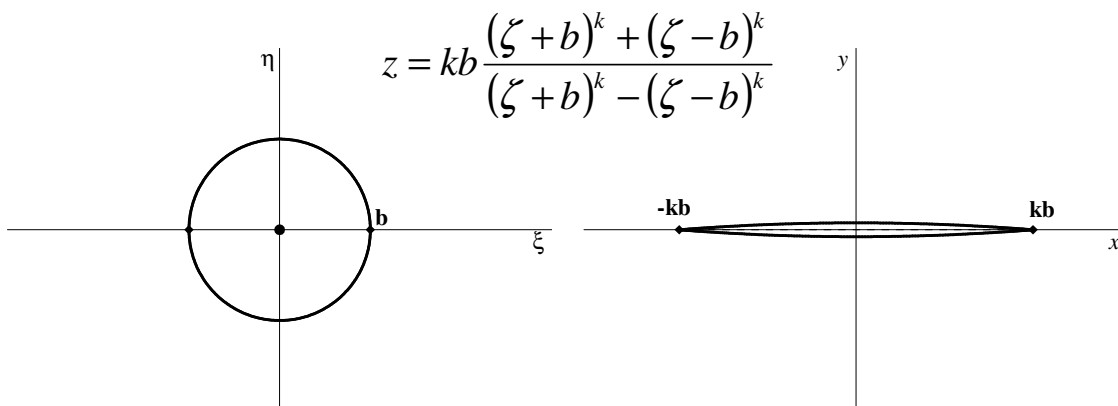
- $k=1,95$ corresponde a uma linha de corrente divisória que faz um ângulo inferior a π .
O bordo de fuga é um ponto de estagnação



Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

1. Cilindro centrado na origem do referencial

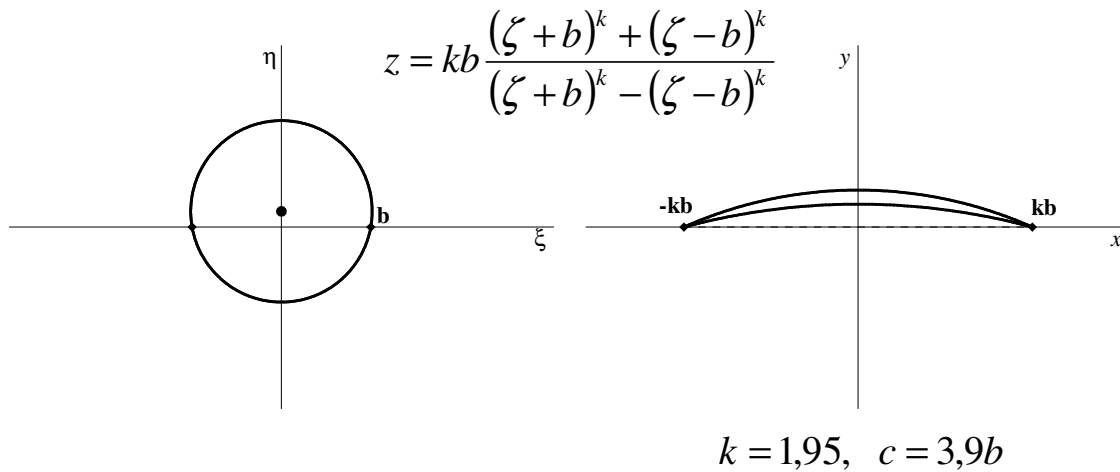


$$k = 1,95, \quad c = 3,9b$$

Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

2. Cilindro centrado no eixo imaginário

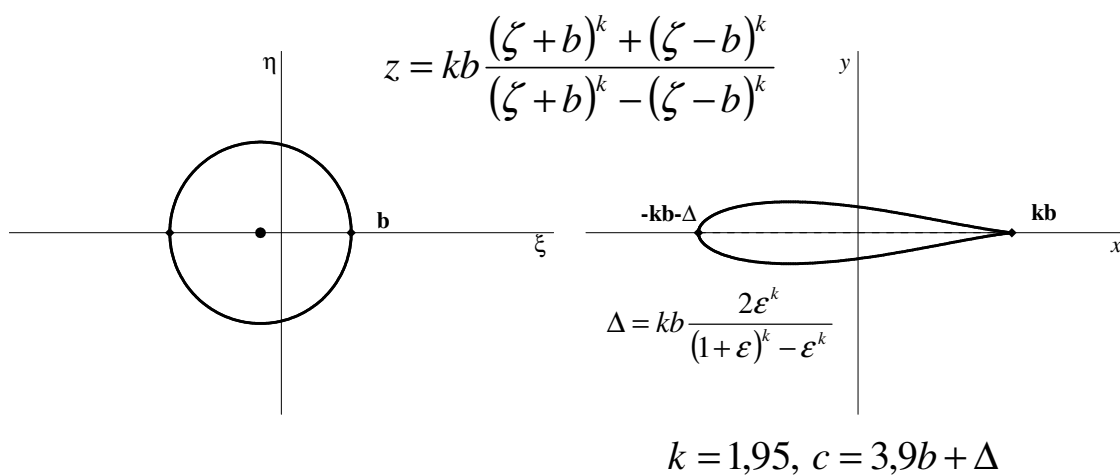


Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

3. Cilindro centrado no eixo real negativo

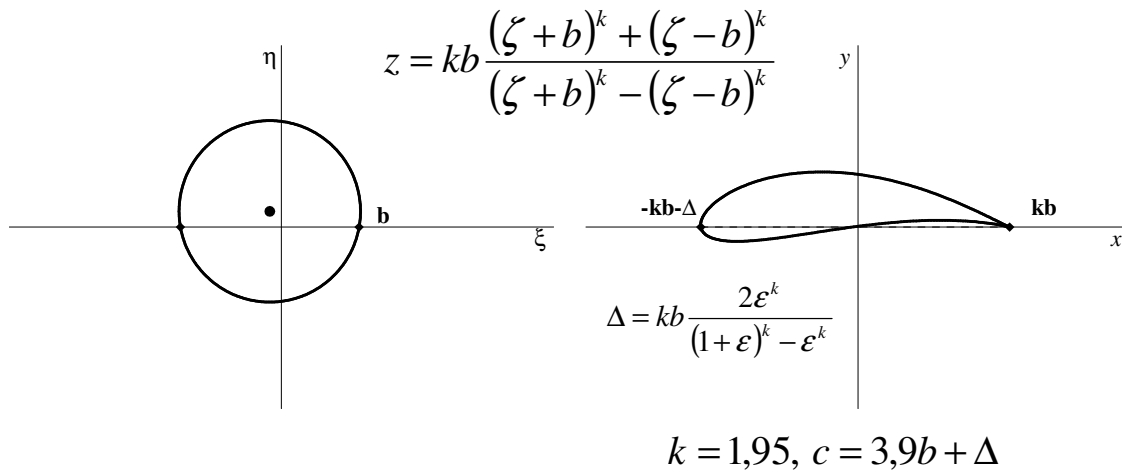


Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores
Perfis de Kármán-Treftz

4. Cilindro centrado no 2º quadrante

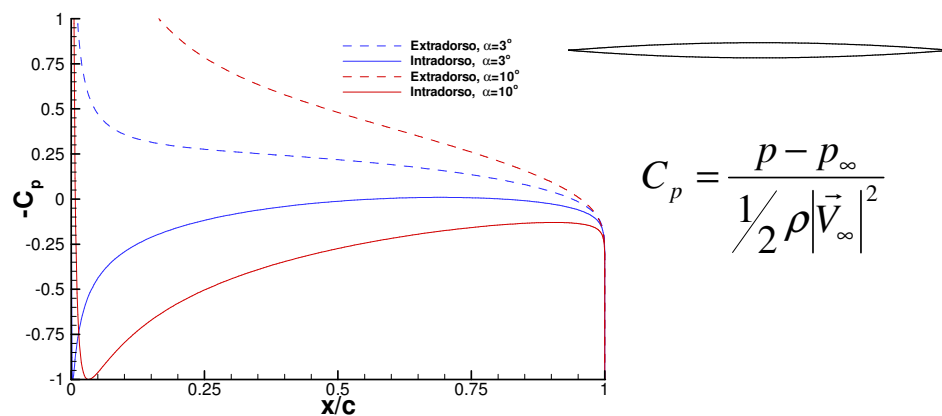


Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores
Perfis de Kármán-Treftz

1. Cilindro centrado na origem do referencial

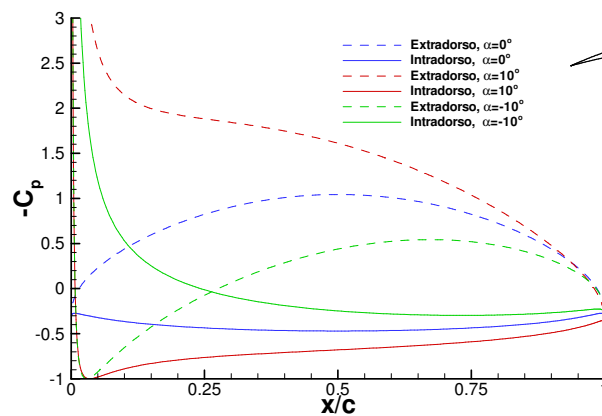


Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores Perfis de Kármán-Treftz

2. Cilindro centrado no eixo imaginário



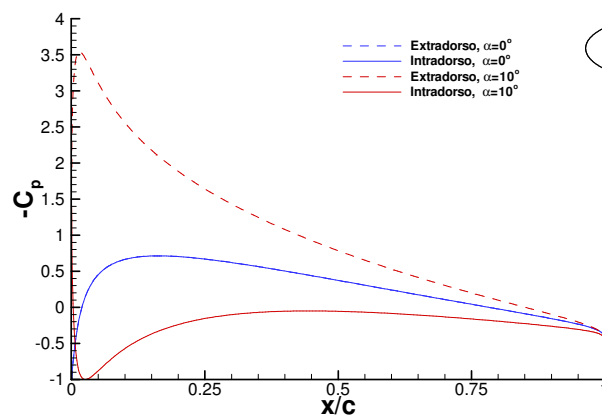
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho |\vec{V}_\infty|^2}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores Perfis de Kármán-Treftz

3. Cilindro centrado no eixo real negativo



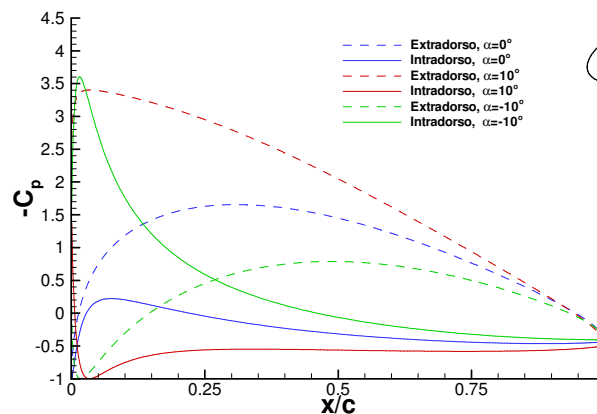
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho |\vec{V}_\infty|^2}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores

Perfis de Kármán-Treftz

4. Cilindro centrado no 2º quadrante



$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho |\vec{V}_\infty|^2}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores

Generalização da transformação conforme

- A transformação de Joukowski pode ser considerada como um caso particular da transformação

$$z = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n}$$

- Na transformação de Joukowski temos:

$$a_1 = b^2 \wedge a_n = 0 \text{ para } n \geq 2$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores

Generalização da transformação conforme

$$z = \zeta + \sum_{n=1} \frac{a_n}{\zeta^n}$$

- No caso geral os coeficientes a_n são complexos
- A transformação generalizada permite obter qualquer perfil sustentador a partir de um cilindro circular

Perfis Sustentadores

Generalização da transformação conforme

$$z = \zeta + \sum_{n=1} \frac{a_n}{\zeta^n}$$

- O coeficiente de sustentação, C_l , de um perfil sustentador em escoamento irrotacional e incompressível a pequenos ângulos de ataque é dado por

$$C_l = 2\pi \left(1 + a_t \left(\frac{d}{c} \right) \right) (\alpha + \beta)$$

- Para um perfil de Joukowski

$$a_t \cong 0,77$$

Perfis Sustentadores

Momento de Picada em torno do centro do perfil

$$M_0 = -\rho \frac{Q\Gamma}{2\pi} + \Re[-i2\pi\rho U_\infty M e^{-i\alpha}]$$

- Para um perfil sustentador $Q=0$

$$M_0 = \Re[-i2\pi\rho U_\infty M e^{-i\alpha}]$$

- M é o coeficiente do termo z^{-2} da velocidade complexa a grandes distâncias do perfil

- Admitindo que o coeficiente a_1 é dado por $a_1 = b^2 e^{-i2\lambda}$

$$M = a_1 |\vec{V}_\infty| e^{-i\alpha} - a^2 |\vec{V}_\infty| e^{i\alpha}$$

Perfis Sustentadores

Momento de Picada em torno do centro do perfil

- Para pequenos valores de α tem-se

$$M_c \cong -4\pi\rho b^2 |\vec{V}_\infty|^2 (\alpha + \lambda)$$

- Admitindo uma corda $c \cong 4b$

$$C_{M_c} = \frac{M_c}{\frac{1}{2}\rho |\vec{V}_\infty|^2 c^2} \cong -\frac{\pi}{2} (\alpha + \lambda)$$

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Os perfis NACA foram desenvolvidos a partir de 1933 pelo National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), hoje em dia denominado National Aeronautics and Space Administration (NASA).
- Os perfis NACA são construídos adicionando uma distribuição de espessura na direcção normal ao esqueleto e encontram-se divididos em várias séries.

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 4 dígitos, NACA ABCD
 - A → Flecha relativa em percentagem, f/c
 - B → Coordenada da flecha máxima, x_m , dada por $10x_m/c$
 - CD → Espessura relativa em percentagem, d/c

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores
Perfis NACA

- Série de 4 dígitos, NACA ABCD
- Distribuição de espessura

$$y = \frac{d}{0,2} \left(0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right)$$

- Esqueleto

2 arcos de parábola concordantes no ponto de flecha máxima, cuja abcissa é x_m

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Perfis Sustentadores
Perfis NACA

- Série de 4 dígitos, NACA ABCD
- Distribuição de espessura

$$y = \frac{d}{0,2} \left(0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right)$$

- Esqueleto

$$y_m = \begin{cases} \frac{f}{x_m^2} x(2x_m - x) & \Leftarrow x \leq x_m & f = \frac{A}{100} \\ \frac{f}{(1-x_m)^2} (1-x_m)(1+x-2x_m) & \Leftarrow x > x_m & x_m = \frac{B}{10} \end{cases}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

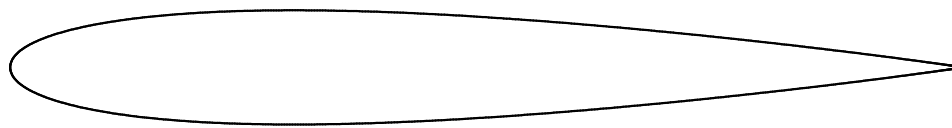
Aerodinâmica

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 4 dígitos

- NACA 0012

Perfil simétrico com 12% de espessura relativa



Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

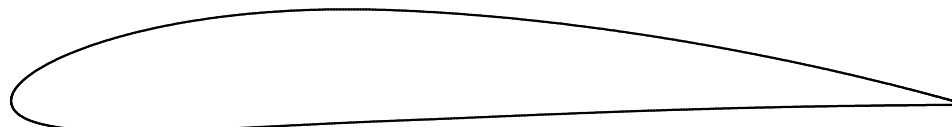
Aerodinâmica

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 4 dígitos

- NACA 4412

Perfil com uma flecha relativa de 4% localizada em $x_m=0.4c$ (40% do bordo de ataque) e com 12% de espessura relativa



Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 5 dígitos, NACA ABCDE

A → Valor aproximado de $\frac{2}{3} \times 10(C_l)_{proj}$

BC → Coordenada da flecha máxima, x_m ,
dada por $200x_m/c$

DE → Espessura relativa em percentagem, d/c

$(C_l)_{proj}$ é o coeficiente de sustentação de projecto

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 5 dígitos, NACA ABCDE

- Distribuição de espessura idêntica à série 4

$$y = \frac{d}{0,2} \left(0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right)$$

- Esqueleto

2 polinómios que definem uma curvatura decrescente desde o bordo de ataque, sendo uma recta a partir dum ponto ligeiramente à direita do ponto de flecha máxima, cuja abcissa é x_m

Aerodinâmica

 Perfis Sustentadores
 Perfis NACA

- Série de 5 dígitos, NACA ABCDE
- Distribuição de espessura

$$y = \frac{d}{0,2} \left(0,2969\sqrt{x} - 0,126x - 0,3516x^2 + 0,2843x^3 - 0,1015x^4 \right)$$

- Esqueleto

$$y_m = \begin{cases} \frac{1}{6}k_1(x^3 - 3mx^2 + m^2(3-m)x) & \Leftarrow x \leq m \\ \frac{1}{6}k_1m^3(1-x) & \Leftarrow x_m > m \end{cases}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

 Perfis Sustentadores
 Perfis NACA

- Série de 5 dígitos, NACA ABCDE
 - Esqueleto
- Valores de k_1 , m e x_m para $(C_l)_{proj} = 0,3$

Designação	x_m	m	k_1
210	0,05	0,0580	361,4
220	0,10	0,1260	51,64
230	0,15	0,2025	15,957
240	0,20	0,2900	6,643
250	0,25	0,3910	3,230

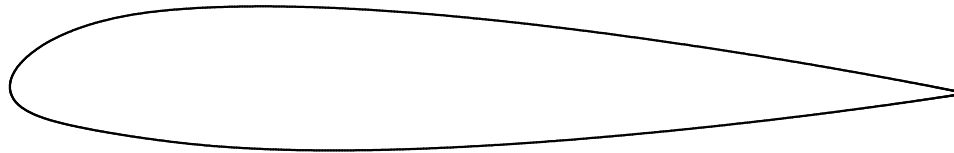
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 5 dígitos

- NACA 23015

Perfil com $(C_l)_{proj} = 0,3$, uma flecha máxima localizada em $x_m = 0.15c$ (15% do bordo de ataque) e com 15% de espessura relativa



Perfis Sustentadores Perfis NACA

- Série de 6 dígitos, NACA 6A,B-CDE, $a = a_0$

A → Valor de $x_p/10c$. x_p é a abcissa do ponto de pressão mínima para o correspondente perfil simétrico com ângulo de ataque nulo. x_p está relacionado com a distribuição de espessura do perfil

Perfis Sustentadores

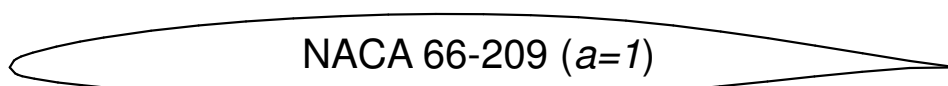
Perfis NACA

- Série de 6 dígitos, NACA 6A,B-CDE, $a=a_0$
- B → Gama de valores de C_l (multiplicado por 10) acima e abaixo do valor de C_l de projecto em que existem gradientes de pressão favoráveis ou quase nulos no intradorso e extradorso do perfil
- C → $10(C_l)_{proj} \cdot (C_l)_{proj}$ é o coeficiente de sustentação de projecto

Perfis Sustentadores

Perfis NACA

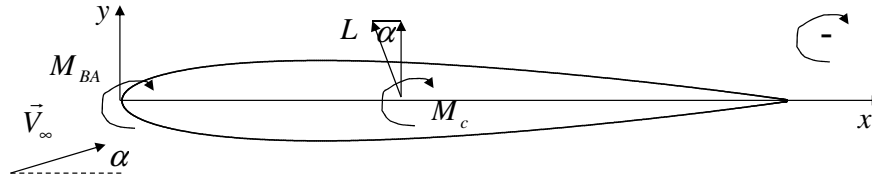
- Série de 6 dígitos, NACA 6A,B-CDE, $a=a_0$
- DE → Espessura relativa em percentagem
- a_0 → Abcissa até à qual a carga (diferença de pressão entre o extradorso e o intradorso) é aproximadamente constante. Para $x > a_0$ a carga decresce linearmente. a_0 está relacionado com o esqueleto do perfil



NACA 66-209 ($a=1$)

Perfis Sustentadores

Momento de Picada em Torno do Bordo de Ataque



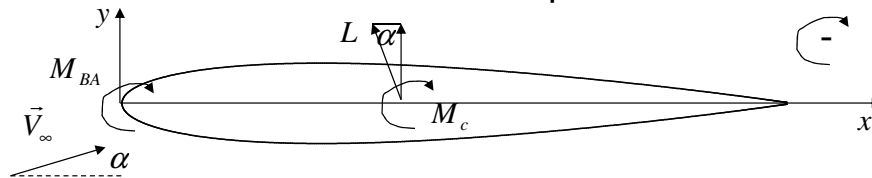
- Propagação de momentos

$$M_{BA} = M_c + L \cos(\alpha) \frac{c}{2} \cong M_c + \frac{c}{2} L$$

$$C_{M_{BA}} = C_{M_c} + C_l \cos(\alpha) \frac{1}{2} \cong C_{M_c} + \frac{1}{2} C_l$$

Perfis Sustentadores

Momento de Picada em Torno do Bordo de Ataque



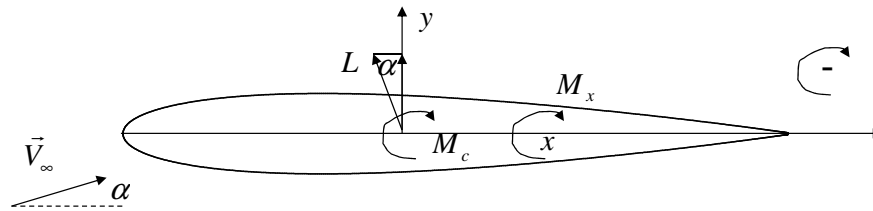
- Para um perfil sustentador a pequenos α temos

$$C_l \cong 2\pi(\alpha + \beta) \quad C_{M_c} \cong -\frac{\pi}{2}(\alpha + \lambda)$$

donde $C_{M_{BA}} \cong \frac{\pi}{2}(\beta - \lambda) + \frac{\pi}{2}(\alpha + \beta)$

$$C_{M_{BA}} \cong \frac{\pi}{2}\gamma + \frac{C_l}{4} \quad \text{com } \gamma = \beta - \lambda$$

Aerodinâmica

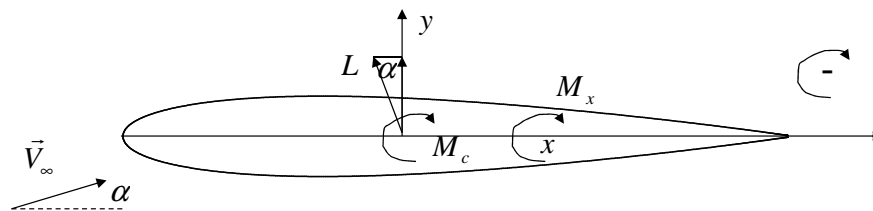
 Perfis Sustentadores
 Centro Aerodinâmico ou Foco


- Centro aerodinâmico é o ponto relativamente ao qual o momento de picada é independente do ângulo de ataque, α
- Coeficiente de momento em torno do ponto x

$$C_{M_x} \cong C_{M_c} - \frac{x}{c} C_l$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

 Perfis Sustentadores
 Centro Aerodinâmico ou Foco


- Centro aerodinâmico obtém-se da condição

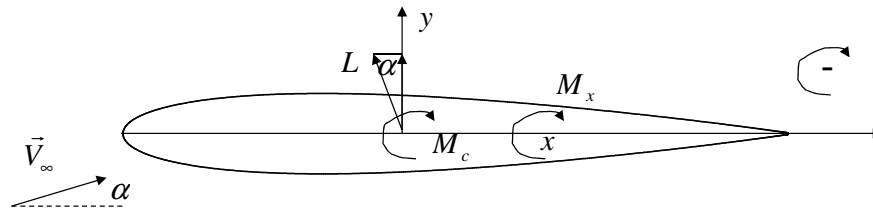
$$\frac{dC_{M_x}}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{dC_{M_c}}{dC_l} = 0$$

donde

$$\frac{dC_{M_c}}{dC_l} - \frac{x_{ca}}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_{ca}}{c} = \frac{dC_{M_c}}{dC_l} = \frac{dC_{M_c}}{d\alpha} \frac{1}{\frac{dC_l}{d\alpha}}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Perfis Sustentadores Centro Aerodinâmico ou Foco



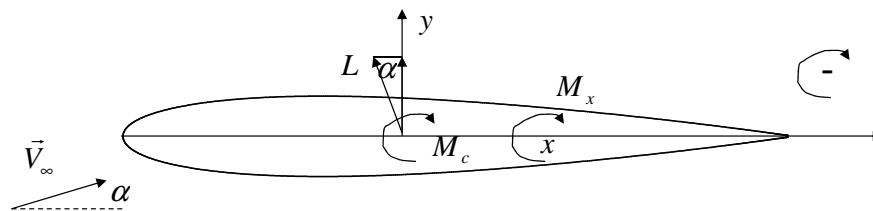
- Para um perfil sustentador a pequenos α temos

$$\frac{dC_{M_c}}{d\alpha} \cong -\frac{\pi}{2} \quad \frac{dC_l}{d\alpha} \cong 2\pi$$

donde

$$\frac{x_{ca}}{c} \cong -\frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi} = -\frac{1}{4}$$

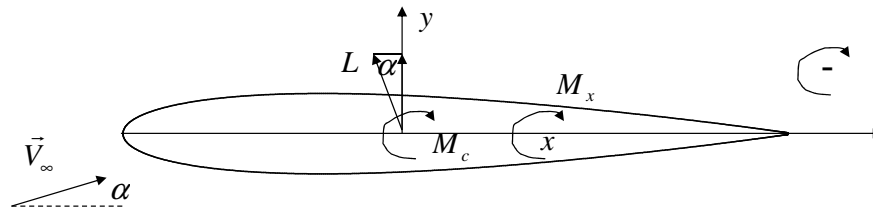
Perfis Sustentadores Centro Aerodinâmico ou Foco



- O centro aerodinâmico encontra-se aproximadamente a 25% da corda
- O coeficiente de momento em torno do centro aerodinâmico é dado por

$$C_{M_{ca}} = \frac{dC_{M_c}}{d\alpha} (\lambda - \beta) = -\frac{dC_{M_c}}{d\alpha} \gamma \cong \frac{\pi}{2} \gamma$$

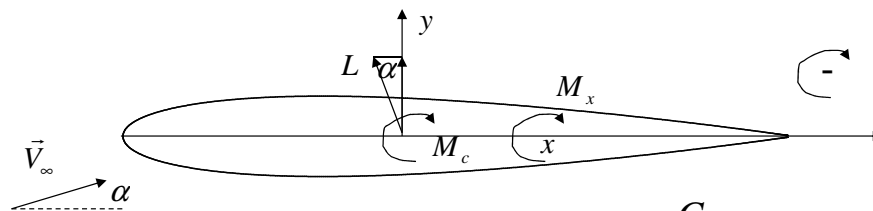
Perfis Sustentadores Centro de Pressão



- Centro de pressão é o ponto da linha que contém a corda relativamente ao qual o momento de picada é nulo. Ou seja, o ponto de intersecção da linha de acção da força de sustentação e da linha que contém a corda

$$C_{M_x} \cong C_{M_c} - \frac{x}{c} C_l = 0$$

Perfis Sustentadores Centro de Pressão



$$C_{M_x} \cong C_{M_c} - \frac{x}{c} C_l = 0 \Leftrightarrow \frac{x_{cp}}{c} = \frac{C_{M_c}}{C_l}$$

- Para um perfil sustentador a pequenos α temos

$$C_l \cong 2\pi(\alpha + \beta) \quad C_{M_c} \cong -\frac{\pi}{2}(\alpha + \lambda)$$

donde

$$\frac{x_{cp}}{c} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi\gamma}{2C_l} = -\frac{1}{4} + \frac{C_{M_{ca}}}{C_l}$$