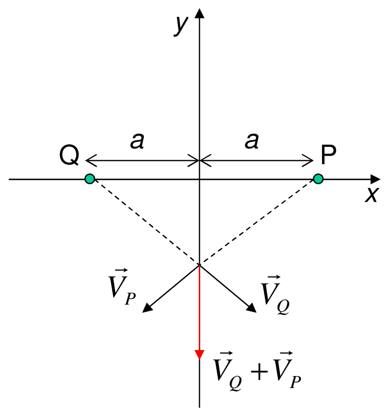
Fluido Perfeito/Ideal

Método das imagens

- O método das imagens garante que uma determinada linha curva é uma linha de corrente do escoamento. O método é facilmente aplicável a linhas rectas

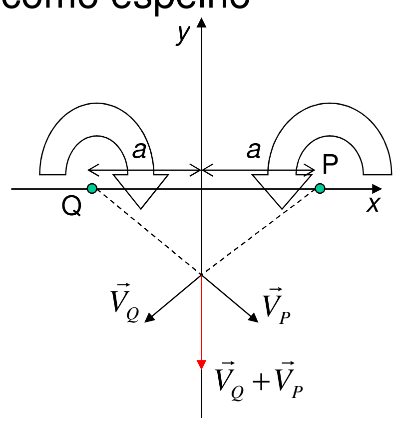


- Para uma linha de fontes de intensidade $\frac{M}{2\pi} = m$ colocada no ponto P(a,0), a linha x=0 será uma linha de corrente se colocarmos uma linha de fontes de igual intensidade no ponto Q(-a,0) (fonte imagem)

Fluido Perfeito/Ideal

Método das imagens

- Para um escoamento gerado por singularidades, uma parede recta pode ser substituída pelas imagens das singularidades utilizando a parede como espelho

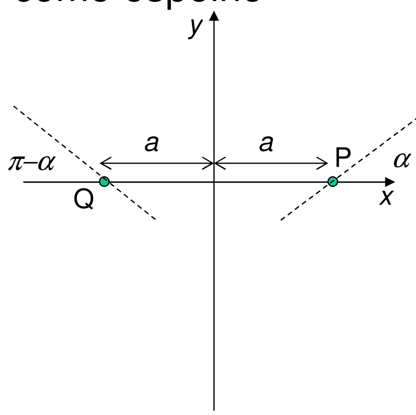


- Para uma linha de vórtice de intensidade $\frac{\Gamma}{2\pi}$ colocada no ponto P(a,0), a imagem tem a intensidade $-\frac{\Gamma}{2\pi}$ e está colocada no ponto Q(-a,0)

Fluido Perfeito/Ideal

Método das imagens

- Para um escoamento gerado por singularidades, uma parede recta pode ser substituída pelas imagens das singularidades utilizando a parede como espelho



- Para uma linha de dipolos de intensidade μ e direcção α colocada no ponto P(a,0), a imagem tem a intensidade μ, a direcção $\pi-\alpha$ e está colocada no ponto Q(-a,0)

Aerodinâmica

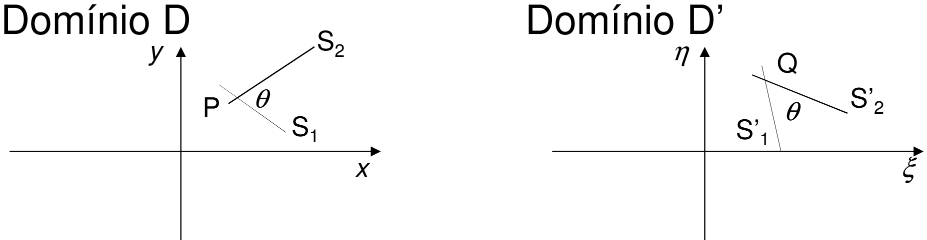
Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

- Considere-se a relação $\zeta=f(z)$ que transforma o domínio D do plano $z(x,y)$ para o domínio D' $\zeta(\xi,\eta)$

Domínio D

Domínio D'



- A transformação $\zeta=f(z)$ diz-se conforme se duas curvas S_1 e S_2 em D que se intersectam no ponto P(x_o,y_o) fazendo um ângulo θ, se transformarem nas curvas S'_1 e S'_2 que se intersectam no transformado do ponto P (Q(ξ_o,η_o)) com o mesmo ângulo θ em grandeza e sentido

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

- Exemplo

$$\zeta = az \quad \text{com} \begin{cases} \zeta = \rho e^{\mathrm{i}\alpha} \\ z = re^{\mathrm{i}\theta} \\ a = r_1 e^{\mathrm{i}\theta_1} \end{cases}$$

$$\zeta = r_1 e^{\mathrm{i}\theta_1} r e^{\mathrm{i}\theta} = (r_1 r) e^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta)}$$

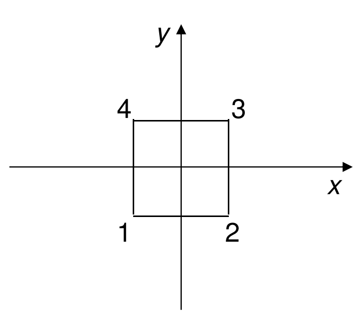
- Esta transformação amplia qualquer figura em *z* de um factor $|a| = r_1$ e roda-a de θ_1 em relação à figura do plano *z*

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

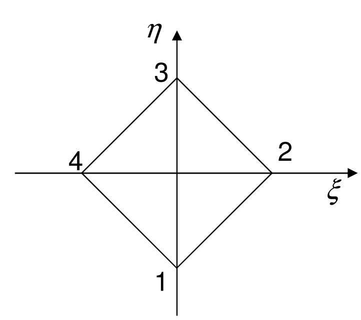
- Exemplo

Plano *z*



$$\zeta = az$$
$$\text{com}$$
$$a = 2e^{\mathrm{i}\pi/4}$$

Plano ζ



Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- Desenvolvimento em série de Taylor de *f(z)* em torno do ponto z_o

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_o)}{n!}(z - z_o)^n$$

$$f(z) = f(z_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(z_o)}{n!}(z - z_o)^n$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- Na vizinhança de z_o

$$z - z_o = dz,\ \ f(z) - f(z_o) = \zeta - \zeta_o = d\zeta$$

$$d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(z_o)}{n!}(dz)^n$$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- Supondo que $f'(z_o)$ tem um zero de ordem m no ponto $z=z_o$, ou seja $n \le m \Rightarrow f^n(z_o)=0$

$$d\zeta = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^n(z_o)}{n!}(dz)^n$$

$$d\zeta \cong \frac{f^{m+1}(z_o)}{(m+1)!}(dz)^{m+1}$$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

$$n \le m \Rightarrow f^n(z_o)=0 \Rightarrow d\zeta \cong \frac{f^{m+1}(z_o)}{(m+1)!}(dz)^{m+1}$$

Para

$$d\zeta = \rho e^{\mathrm{i}\alpha}, \quad dz = re^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{e} \quad \frac{f^{m+1}(z_o)}{(m+1)!} = \Lambda e^{\mathrm{i}\lambda}$$

tem-se

$$\rho e^{\mathrm{i}\alpha} = \Lambda r^{m+1} e^{\mathrm{i}(\lambda+(m+1)\theta)}$$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- Rotação, $\alpha - \theta = \arg\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)$

$$\alpha - \theta = \lambda + m\theta$$

- Ampliação linear, $\frac{\rho}{r} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$

$$\frac{\rho}{r} = \Lambda r^m$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- A rotação do segmento elementar *dy* é de $\lambda + m\theta$

- A razão entre os módulos dos dois segmentos elementares $d\zeta$ e *dz*, denominada ampliação linear, é igual a $\Lambda = |f'(z_o)|$ se *m=0*, ou seja $f'(z_o) \neq 0$. Para *m>0,* a ampliação linear é nula

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Conservação dos ângulos e ampliação linear

$$\zeta = f(z)$$

- Pontos para os quais a derivada da transformação é nula $d\zeta/dz = 0$ designam-se por pontos singulares da transformação

- Uma transformação é conforme se *f(z)* for uma função analítica de *z* e $f'(z_o) \neq 0$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Potencial complexo no plano *z*

$$W = \phi + \mathrm{i}\psi = F(z) \text{ com } z = x + \mathrm{i}\, y$$

$$\frac{dW}{dZ} = F'(z) = U - \mathrm{i}V$$

- Transformação conforme

$$\zeta = f(z) \text{ com } \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$$

- Potencial complexo W, escrito em termos de ζ

$$W = F(z), \quad z = g(\zeta) = f^{-1}(\zeta)$$

$$W = F(g(\zeta)) = G(\zeta)$$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Potencial complexo *W*, escrito em termos de ζ

$$W = F(g(\zeta)) = G(\zeta)$$

- $G(\zeta)$ é uma função analítica de ζ. Logo, $G(\zeta)$ representa um escoamento irrotacional plano em ζ. As linhas de corrente, ψ=ct^{e}, no plano ζ são as transformadas das linhas de corrente no plano *z*

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Potencial complexo *W*, escrito em termos de ζ

$$W = F(g(\zeta)) = G(\zeta)$$

- Velocidade complexa

$$\frac{dW}{d\zeta} = G'(\zeta) = U_\zeta - \mathrm{i}V_\zeta$$

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW}{dz}\frac{dz}{d\zeta} \Leftrightarrow \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} \Leftrightarrow \frac{dW}{d\zeta} = \frac{\frac{dW}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}}$$

$\frac{dW}{dz} \rightarrow$ Velocidade em *z*

$\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow$ Derivada da transformação

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Exemplo:
  - Escoamento em torno de um cilindro de raio *a* no plano *z*

$$W = U_\infty\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

  - Transformação conforme para o plano ζ

$$\zeta = z - \frac{a^2}{z}$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Exemplo:
- Transformação das linhas de corrente divisórias:

Plano z	Plano ζ
$1 \to \theta = 0 \wedge r \ge a$	$\zeta = r - \frac{a^2}{r} \Leftrightarrow (\alpha = 0 \wedge \rho \ge 0)$ $(\xi \ge 0 \wedge \eta = 0)$
$2 \to \theta = \pi \wedge r \ge a$	$\zeta = -\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \Leftrightarrow (\alpha = \pi \wedge \rho \ge 0)$ $(\xi \le 0 \wedge \eta = 0)$
$3 \to 0 \le \theta \le 2\pi \wedge r = a$	$\zeta = \mathrm{i}\, 2a\, \mathrm{sen}(\theta) \Leftrightarrow \xi = 0 \wedge -2a \le \eta \le 2a$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Exemplo:
  - Potencial complexo no plano *z*

$$W = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

  - Potencial complexo no plano transformado ζ

$$\zeta^2 + 4a^2 = z^2 + \frac{a^4}{z^2} + 2a^2 = \left(z + \frac{a^2}{z} \right)^2$$

$$W = U_\infty \sqrt{\zeta^2 + 4a^2}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
- Exemplo:
  - Função potencial e função de corrente no plano *z*

$$\phi = U_\infty r \cos(\theta) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \psi = U_\infty r \,\mathrm{sen}(\theta) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

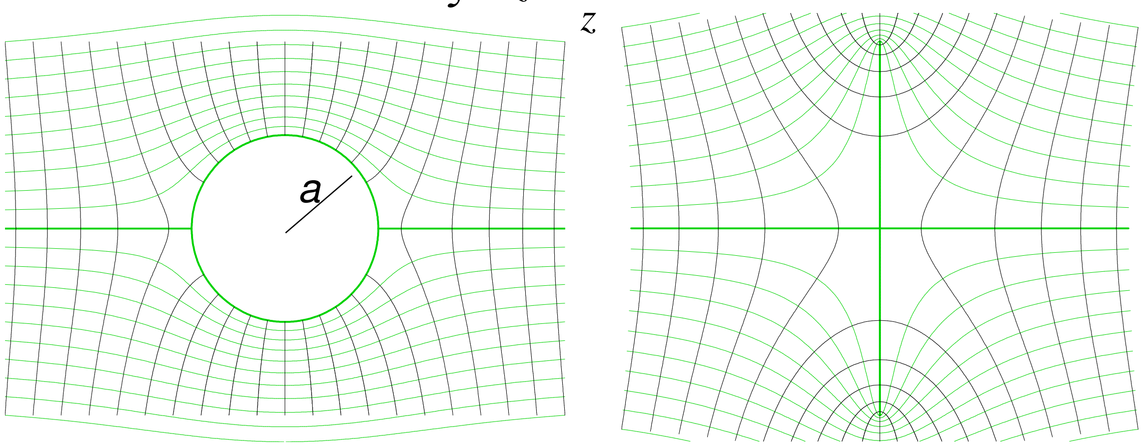
  - Transformação de pontos no plano *z* para o plano ζ

$$\xi = r \cos(\theta) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \eta = r \,\mathrm{sen}(\theta) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos

Plano z $\qquad \zeta = z - \dfrac{a^2}{z}$ $\qquad$ Plano ζ



ϕ=constante

ψ=constante

Fluido Perfeito/Ideal
Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos
  - Potencial complexo no plano z

$$W = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

  - Velocidade complexa no plano z

$$\frac{dW}{dz} = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

  - Derivada da transformação conforme

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 + \frac{a^2}{z^2}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme

- Aplicação a escoamentos irrotacionais planos

  - Velocidade complexa no plano ζ

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{\dfrac{dW}{dz}}{\dfrac{d\zeta}{dz}} = \frac{U_\infty\left(\dfrac{z^2-a^2}{z^2}\right)}{\dfrac{z^2+a^2}{z^2}} = U_\infty\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}$$

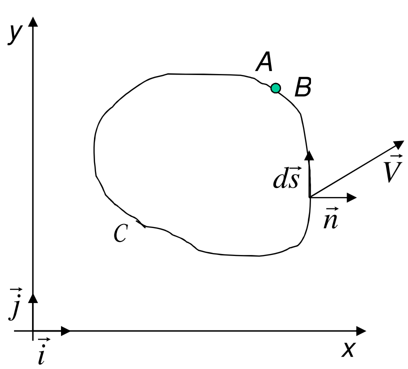
  - Singularidades da transformação em $z = \pm \mathrm{i}\, a$

  - Velocidade tende para infinito nos topos da placa

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Considerando um escoamento cujo potencial complexo é dado por $W = \phi + \mathrm{i}\psi$



- Circulação de velocidade ao longo do contorno C

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

com

$$\vec{V} = U\vec{i} + V\vec{j}$$

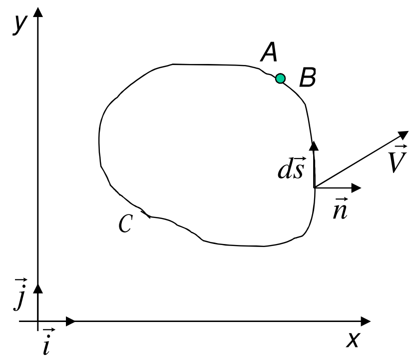
$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$\Gamma = \oint_C (Udx + Vdy) = \oint_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy\right) = \oint_C d\phi$$

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Considerando um escoamento cujo potencial complexo é dado por $W=\phi+\mathrm{i}\psi$



- Caudal por unidade de comprimento (largura) que atravessa a superfície cilíndrica de que C é a directriz

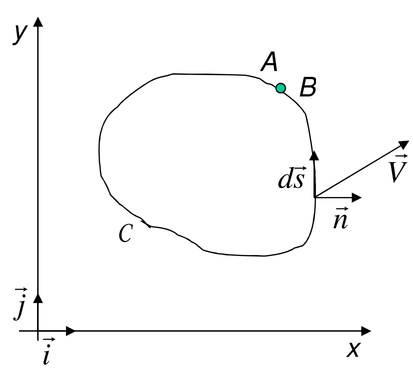
$$Q=\oint_C \vec{V}\cdot\vec{n}\,ds$$

$$Q=\oint_C (U dy - V dx)=\oint_C\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)=\oint_C d\psi$$

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Considerando um escoamento cujo potencial complexo é dado por $W=\phi+\mathrm{i}\psi$



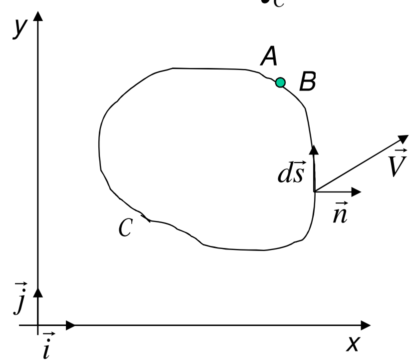
- Somando os resultados obtidos para a circulação e para o caudal, temos

$$\oint_C dW=\oint_C d\phi+\mathrm{i}\oint_C d\psi=\Gamma+\mathrm{i}Q$$

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Contribuição de singularidades do tipo fonte/poço e vórtice para o $\oint_C dW$



- Potencial complexo de uma linha de fontes/poços ou de um linha de vórtice

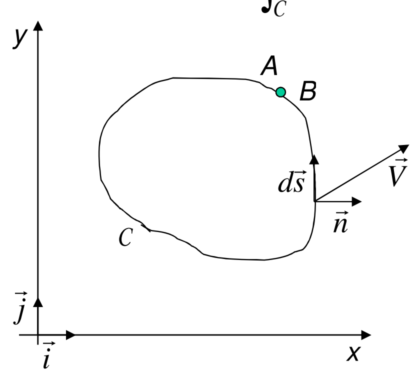
$$W = a\ln(z - z_o)$$

$$a = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi} \leftarrow \text{ Fonte/poço} \\ -\mathrm{i}\dfrac{\Gamma}{2\pi} \leftarrow \text{ Vórtice} \end{cases}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Contribuição de singularidades do tipo fonte/poço e vórtice para o $\oint_C dW$



$$\oint_C dW = W_B - W_A$$

$$\oint_C dW = a\left[\ln(z - z_o)\right]_A^B$$

$$\oint_C dW = a\left[\ln(r) + \mathrm{i}\,\chi\right]_A^B$$

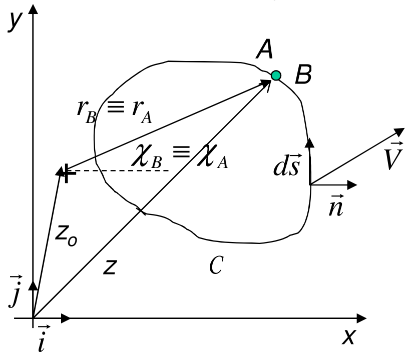
$$\oint_C dW = a\left(\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)\right) + \mathrm{i}\,a(\chi_B - \chi_A)$$

- r é o módulo do vector (z-z_o)
- χ é o argumento do vector (z-z_o)

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Contribuição de singularidades do tipo fonte/poço e vórtice para o $\oint_C dW$



- Singularidade exterior ao contorno C

$$\oint_C dW = a\left(\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)\right) + \mathrm{i}\,a(\chi_B - \chi_A)$$

$$r_B \equiv r_A$$

$$\chi_B \equiv \chi_A$$

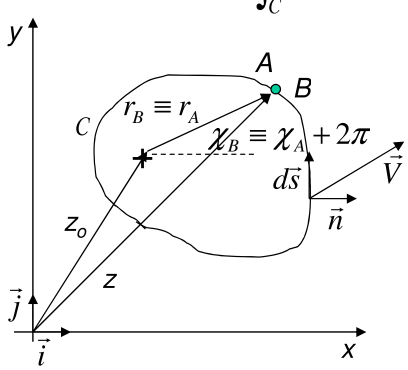
$$\oint_C dW = 0$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Contribuição de singularidades do tipo fonte/poço e vórtice para o $\oint_C dW$



- Singularidade interior ao contorno C

$$\oint_C dW = a\left(\ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right)\right) + \mathrm{i}\,a(\chi_B - \chi_A)$$

$$r_B \equiv r_A$$

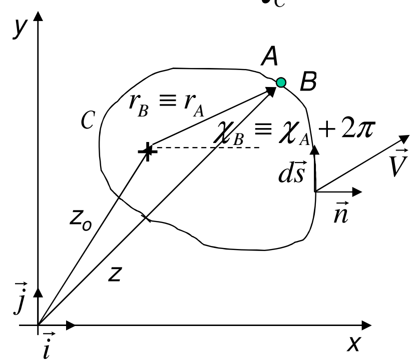
$$\chi_B \equiv \chi_A + 2\pi$$

$$\oint_C dW = \mathrm{i}\,2\pi a$$

Fluido Perfeito/Ideal

Circulação e Fluxo Relativos a um Contorno Fechado

- Contribuição de singularidades do tipo fonte/poço e vórtice para o $\oint_{\mathcal{C}} dW$



- Singularidade interior ao contorno $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} dW = \mathrm{i}\,2\pi a$$

$$\oint_{\mathcal{C}} dW = \Gamma + \mathrm{i}\,Q$$

$$\Gamma = \sum \Gamma_i \qquad Q = \sum Q_i$$

- Γ_i e Q_i representam a soma das intensidades das linhas de vórtices e fontes/poços que se encontram no interior de $\mathcal{C}$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme de Linhas de Fontes/Poços, Vórtices ou Dipolos

- Considere-se uma linha de fontes/poços de intensidade Q colocada em z_o no plano z. Para um contorno $\mathcal{C}$ em torno do ponto z_o tem-se

$$\oint_{\mathcal{C}} dW = Q$$

- O contorno $\mathcal{C}$ é transformado num contorno C no plano ζ. A função de corrente ψ tem o mesmo valor em pontos correspondentes dos dois planos, pelo que

$$\oint_{\mathcal{C}} dW = \oint_{C} dW = Q$$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme de Linhas de Fontes/Poços, Vórtices ou Dipolos

- Como as duas curvas $\mathcal{C}$ e C podem-se contrair indefinidamente, conclui-se que há uma linha de fontes/poços de intensidade Q no transformado do ponto z_o, ζ_o
- Uma análise semelhante pode ser feita para concluir que se existe uma linha de vórtice de intensidade Γ em z_o, então existirá uma linha de vórtice de igual intensidade em $\zeta_o=f(z_o)$

Fluido Perfeito/Ideal

Transformação Conforme de Linhas de Fontes/Poços, Vórtices ou Dipolos

- Se existir uma linha de dipolos de intensidade μ e ângulo α em z_o, então no ponto $\zeta_o=f(z_o)$ existirá uma linha de dipolos de intensidade μ' e ângulo β

$$\mu' = \mu \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_o}$$

$$\beta = \alpha + \arg\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=z_o}$$