Fluido Perfeito/Ideal

- Viscosidade do fluido é nula, $\nu=0$
  - Número de Reynolds é infinito $R_e = \dfrac{U_{ref} L_{ref}}{\nu} \to \infty$
- Admitindo que a conductibilidade térmica é suficientemente pequena para que se possa desprezar a quantidade de calor que o escomento troca com o exterior: <u>Escoamento adiabático</u>
- A entropia por unidade de massa de qualquer partícula mantém-se constante ao longo do tempo

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} s = \frac{\partial s}{\partial t} + U\frac{\partial s}{\partial x} + V\frac{\partial s}{\partial y} + W\frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equação da continuidade (conservação da massa)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$$

- Fluido incompressível, ρ = *constante*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Euler
  (balanço de quantidade de movimento)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \vec{F}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Euler
  (balanço de quantidade de movimento)
- Força gravítica

$$\vec{F} = -g\vec{k} = -\vec{\nabla}(gz)$$

- Identidade vectorial

$$\left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \vec{\nabla}\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2}\right) - \vec{V}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right) \text{ com } \vec{\nabla}\times\vec{V} = \mathrm{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Euler
  (balanço de quantidade de movimento)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}(gz)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz\right) = 0$$

Aerodinâmica

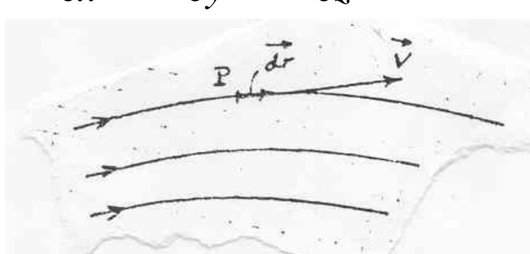
Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli (balanço de energia)

- Variação de uma propriedade *p* ao longo do do deslocamento, $d\vec{r}$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \vec{\nabla}p \cdot d\vec{r}$$



Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Produto interno do vector $d\vec{r}$ pela equação de balanço de quantidade de movimento ao longo de uma linha de corrente, $d\vec{r} \parallel \vec{V}$

$$-\left(\vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V}\right) \cdot d\vec{r} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p \cdot d\vec{r} + \vec{\nabla}\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz\right) \cdot d\vec{r} = 0$$

$$d\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz\right) + \frac{dp}{\rho} = 0$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)

- Escoamento isentrópico, *ds=0*

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho} \wedge ds = 0 \Rightarrow dh = \frac{dp}{\rho}$$

$$d\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + h\right) = 0$$

- Ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + h = constante$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Fluido Perfeito/Ideal
Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Escoamento incompressível, ρ=*constante*

$$dh = d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$d\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

- Ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = constante$$

Fluido Perfeito/Ideal
Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Escoamento a entropia constante, $\vec{\nabla} s = 0$

$$\vec{\nabla} h = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + h\right) = \vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Escoamento incompressível, *ρ=constante*

$$\vec{\nabla} h = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Para $\vec{V} \times \mathrm{rot}\,\vec{V} = 0$

$$\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + h = constante$$

- Em escoamento incompressível, *ρ=constante*

$$\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = constante$$

Fluido Perfeito/Ideal

Equações que regem o escoamento

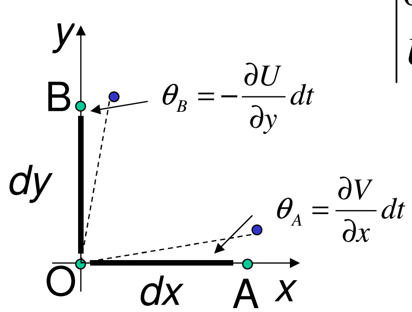
- Equações de Bernoulli em regime permanente (balanço de energia em regime estacionário)
- Casos em que $\vec{V} \times \operatorname{rot} \vec{V} = 0$

1. $\vec{V} = 0$, Hidrostática
2. $\vec{V} \parallel \operatorname{rot} \vec{V}$, Escoamento de Beltrami
3. $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$, Escoamento irrotacionais ou potenciais

Fluido Perfeito/Ideal

- Vorticidade, $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix}$$

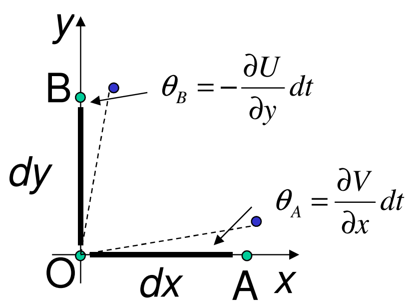


- Escoamento no plano *x,y*
- OA e OB – linhas elementares
- Velocidade do sistema de eixos é idêntica à do ponto O

Fluido Perfeito/Ideal

- Vorticidade, $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$$



- Análise do movimento de rotação de OA e OB
  - Velocidade nos pontos A e B

$$V_A = \frac{\partial V}{\partial x}dx \quad U_B = \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

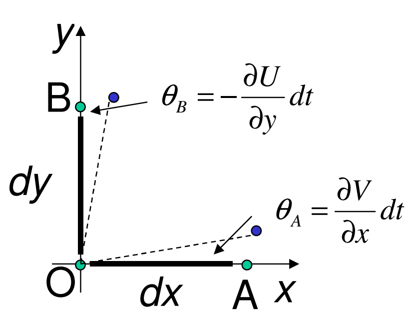
- Ao fim de dt, OA rodou θ_A e OB rodou θ_B

$$dx\theta_A = \frac{\partial V}{\partial x}dxdt \quad dy\theta_B = -\frac{\partial U}{\partial y}dydt$$

Fluido Perfeito/Ideal

- Vorticidade, $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$$



- Velocidade angular média

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_A}{dt}+\frac{\theta_B}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\vec{k}$$

- $\vec{\Omega}$ representa o dobro da velocidade angular média do elemento de fluido se rodasse como um corpo rígido

Fluido Perfeito/Ideal

• Linhas, Superfícies e Tubos de Vórtices

- Linha de vórtice é a linha que em todos os pontos é tangente ao vector vorticidade, $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega} \times d\vec{s} = 0$$

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

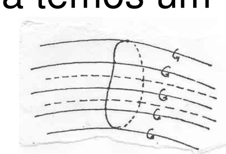
- Superfície de vórtice é a superfície constituída por todas as linhas de vórtice que passam por uma curva arbitrária num determinado instante

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal

• Linhas, Superfícies e Tubos de Vórtices

- Se uma superfície de vórtice estiver assente numa curva fechada temos um tudo de vórtice



- Fluxo de vorticidade através de uma superfície *S* que limita um volume *R*

$$\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n}\, dS = \int_R \vec{\nabla}.\vec{\Omega}\, dV = 0$$

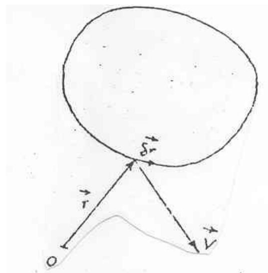
$$\vec{\nabla}.\vec{\Omega} = \vec{\nabla}.\left(\mathrm{rot}\,\vec{V}\right) = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) = 0$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Fluido Perfeito/Ideal

- Circulação da velocidade ao longo de um contorno fechado, Γ

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot \delta\vec{r}$$



δ significa diferenciação no espaço num determinado instante de tempo

Fluido Perfeito/Ideal

- Variação de Γ com t para um circuito formado por partículas de fluido

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \vec{V} \cdot \delta\vec{r} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \delta\vec{r} + \oint \vec{V} \cdot \frac{D\delta\vec{r}}{Dt}$$

$$\vec{V} \cdot \frac{D\delta\vec{r}}{Dt} = \vec{V} \cdot \delta\left(\frac{D\vec{r}}{Dt}\right) = \vec{V} \cdot \delta\vec{V} = \delta\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2}\right) = \delta\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2}\right)$$

Fluido Perfeito/Ideal

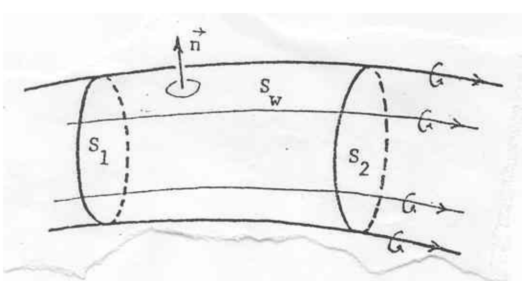
- Variação de Γ com t para um circuito formado por partículas de fluido

$$\oint \vec{V}\cdot\frac{D\delta\vec{r}}{Dt} = \oint \delta\left(\frac{\left|\vec{V}\right|^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot\delta\vec{r}$$

Fluido Perfeito/Ideal

- Conservação de Circulação, Γ, no espaço



Para um tubo de vórtice na região R limitada por quaisquer duas superfícies S_1 e S_2 que cortam o tubo e a parede lateral S_w

$$\int_{S_1+S_2+S_w} \vec{\Omega}\cdot\vec{n}dS = \int_R \vec{\nabla}\cdot\vec{\Omega}d\mathcal{V} = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

- Conservação de Circulação, Γ, no espaço
  - Em Sw, $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} = 0$,donde

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0$$

  - $\vec{n}$ é a normal exterior a *R*. Considerando $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ com sinais idênticos

$$\int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS = \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS$$

$$\int_{S} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = constante = \int_{C} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \Gamma_C$$

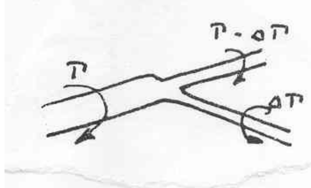
  - Γ_C é a circulação de velocidade ao longo de qualquer curva *C* que envolve o tubo de vórtice e que esteja situada sobre a superfície

Fluido Perfeito/Ideal

- Conservação de Circulação, Γ, no espaço

$$\int_{S} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = constante = \int_{C} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \Gamma_C$$

  - Um tubo de vórtices não pode terminar no seio do fluido
  - A intensidade de um tubo de vórtices só pode variar entre duas secções se filamentos de conveniente intensidade se unirem ou deixarem o tubo



Fluido Perfeito/Ideal

- Para um tubo de vórtice de secção elementar

  - Filamento de vórtice

$$\Gamma_C = \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

  - Tomando $\vec{n}$ paralelo a $\vec{\Omega}$

$$\Gamma_C = \Omega dS \qquad \Omega \propto \frac{1}{dS}$$

  - Vórtice concentrado

$$dS \to 0 \quad \Gamma = \lim_{\substack{dS \to 0 \\ \Omega \to \infty}} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

  - Folha de vórtices: Superfície de vórtices formada por vórtices concentrados

Fluido Perfeito/Ideal

- Teorema de Kelvin

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \delta\vec{r}$$

  - Para escoamento a entropia constante

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}(h + gz)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint -\vec{\nabla}(h + gz) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

- Teorema de Kelvin

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \delta\vec{r}$$

- Para fluido incompressível

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right)$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint -\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) \cdot \delta\vec{r} = 0$$

- Circulação de velocidade ao longo de um contorno fechado que se desloca com o fluido mantem-se constante ao longo do tempo

Fluido Perfeito/Ideal

- Consequências do Teorema de Kelvin

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \vec{\Omega} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

- Fluxo de vorticidade através de uma superfície material mantem-se constante ao longo do tempo

- Vorticidade é convectada pelo fluido. Se uma superfície formada por partículas de fluido coincide com uma superfície de vórtice num dado instante, então permanecerá uma superfície de vórtice. Um tubo de vórtice é constituído sempre pelas mesmas partículas de fluido.

Fluido Perfeito/Ideal

• Consequências do Teorema de Kelvin

$$\frac{D\Gamma_C}{Dt} = \frac{D}{Dt}\oint \vec{\Omega}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

- Vorticidade é convectada pelo fluido
  Se Ω=0 num dado instante, Ω=0 sempre.
  Permanência do escoamento irrotacional

  Escoamentos de fluido perfeito iniciados do repouso são irrotacionais

$$\text{Em } t = 0, \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{\Omega} = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Irrotacional e Incompressível

• Escoamento Irrotacional

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \text{rot}\,\vec{V} = 0$$

• Velocidade obtida a partir do gradiente de uma função potencial (escalar) de velocidade

$$\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$$

• Equação da continuidade (conservação da massa)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = 0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Escoamento bi-dimensional, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$
- Escoamento incompressível, $\rho = constante$
- Equação da continuidade com $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Equação de Laplace

- Equação linear

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Equação de Laplace

- A combinação linear de soluções particulares da equação de Laplace também é uma solução da equação de Laplace.

- Teoria das funções de variável complexa permite a obtenção de soluções analíticas

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função de corrente, ψ

- Equação da continuidade

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\vec{V} = U\,\vec{i} + V\,\vec{j}$$

- ψ(x,y), função de corrente, obedece a

$$d\psi = -Vdx + Udy$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -V,\ \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = U$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função de corrente, ψ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

- Equação das linhas de corrente, dψ=0

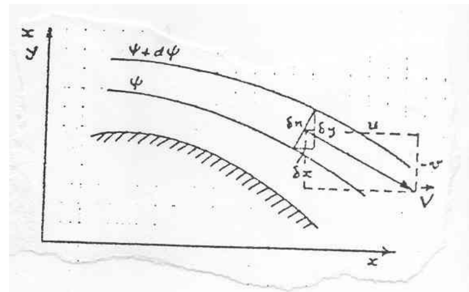
$$-Vdx + Udy = 0$$

$$\frac{dx}{U} = \frac{dy}{V}$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função de corrente, ψ
  - Significado físico de ψ
  - ψ=0 na parede
  - Caudal escoado entre a parede e a linha de corrente dψ



$$dQ = Udy - Vdx$$

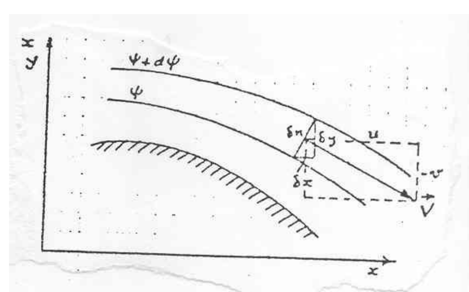
$$dQ = d\psi$$

$$\psi = Q$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função de corrente, ψ
  - $\Delta\psi=\psi_1-\psi_o$ é igual ao caudal escoado entre as linhas de corrente ψ_1 e ψ_o



- Estes resultados baseiam-se apenas na equação da continuidade pelo que são válidos para qualquer escoamento incompressível plano

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função potencial de velocidade, ϕ

- Escoamento irrotacional,

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

- ϕ(x,y), função potencial de velocidade, obedece a

$$d\phi = Udx + Vdy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=U,\ \frac{\partial \phi}{\partial y}=V$$

Aerodinâmica

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Função potencial de velocidade, ϕ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

- Equação das linhas equipotenciais, dϕ=0

$$Udx + Vdy = 0$$

$$\frac{dx}{V}=-\frac{dy}{U}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- Equação da continuidade aplicada a ϕ

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

- Condição de irrotacionalidade aplicada a ψ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Escoamento Bi-dimensional, Irrotacional e Incompressível

- A função potencial ϕ e a função de corrente ψ obedecem à equação de Laplace

- Linhas de corrente são perpendiculares às equipotenciais

$$\vec{\nabla}\phi=U\,\vec{i}+V\,\vec{j}\quad \text{e}\quad \vec{\nabla}\psi=-V\,\vec{i}+U\,\vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi=-UV+VU=0$$

Fluido Perfeito/Ideal
Potencial Complexo

- Funções Analíticas
- *W*, função de variável complexa

$$W = \phi(x, y) + \mathrm{i}\,\psi(x, y)$$

$$\begin{cases} z = x + \mathrm{i}\,y \\ z = re^{\mathrm{i}\theta} \end{cases} \text{com} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \text{e} \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

Fluido Perfeito/Ideal
Potencial Complexo

- Uma função de variável complexa é uma função analítica quando

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{W(z + \Delta z) - W(z)}{\Delta z}$$

existe e o seu valor é independente da forma como *z* tende para zero

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{\Delta\phi + \mathrm{i}\,\Delta\psi}{\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y}$$

- No limite quando $\Delta z \to 0$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d\phi + \mathrm{i}\,d\psi}{dx + \mathrm{i}\,dy} = \frac{\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)dy}{dx + \mathrm{i}\,dy}$$

Fluido Perfeito/Ideal
Potencial Complexo

- Para que o limite seja independente da forma como $\Delta z \to 0$, esta relação tem de ser independente de $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{1}=\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial y}+\mathrm{i}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{\mathrm{i}}$$

- Condições de Riemann-Cauchy

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\qquad\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Fluido Perfeito/Ideal
Potencial Complexo

- Qualquer função *W(z)* que seja somente função de *z* é uma função analítica

- Verificação

$$W=\phi+\mathrm{i}\psi\qquad z=x+\mathrm{i}\,y\qquad x=z-\mathrm{i}\,y$$

- Se a função for analítica $\dfrac{\partial W}{\partial y}=0$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mathrm{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0$$

Fluido Perfeito/Ideal

Potencial Complexo

- Exemplos de funções complexas

1. $W = x^2 - y^2 + \mathrm{i}\,2xy = z^2$
2. $W = x + \mathrm{i}\,2y = z + \mathrm{i}\,y$

- Cálculo de $\dfrac{\partial W}{\partial y}$

1. $$\frac{\partial W}{\partial y} = -2y + 2y + \mathrm{i}(2x - 2x) = 0$$

Função é analítica

2. $$\frac{\partial W}{\partial y} = 0 + 0 + \mathrm{i}(2 - 1) = \mathrm{i}$$

Função não é analítica

Fluido Perfeito/Ideal

Potencial Complexo

- A função potencial de velocidade e a função de corrente obedecem às equações

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- A função potencial complexo

$$W(x, y) = \phi(x, y) + \mathrm{i}\,\psi(x, y)$$

é uma função analítica com a parte real igual à função potencial de velocidade e a parte imaginária igual à função de corrente de um escoamento plano incompressível e irrotacional

Fluido Perfeito/Ideal

Potencial Complexo

- Para o potencial complexo $W(x,y)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\,\psi(x,y)$

$$dW=\frac{dW}{dz}dz$$

- O diferencial *dW* pode ser obtido de

$$dW=\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}dy$$

$$dW=\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy$$

$$dW=\left(U-\mathrm{i}V\right)dx+(V+\mathrm{i}U)dy$$

$$dW=\left(U-\mathrm{i}V\right)dx+\mathrm{i}(U-\mathrm{i}V)dy$$

$$dW=\left(U-\mathrm{i}V\right)\left(dx+\mathrm{i}\,dy\right)$$

Fluido Perfeito/Ideal

Potencial Complexo

- Para o potencial complexo $W(x,y)=\phi(x,y)+\mathrm{i}\,\psi(x,y)$

$$dW=\left(U-\mathrm{i}V\right)dz$$

$$\frac{dW}{dz}=\left(U-\mathrm{i}V\right)=\overline{V}$$

- Velocidade complexa, $\overline{V}$, complexo conjugado do vector velocidade, $\vec{V}$

$$\vec{V}=\left|\vec{V}\right|e^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\overline{V}=\left|\overline{V}\right|e^{-\mathrm{i}\theta}$$