Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Média temporal aplicada às variáveis dependentes e aos princípios de "conservação"

$$\overline{\tilde{\phi}_i} = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{t_o}^{t_o+T} \tilde{\phi}_i dt}{T} = \Phi_i$$

$\tilde{\phi}_i$ representa qualquer uma das variáveis dependentes (escoamento incompressível *u*,*v*,*w*,*p*)

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Decomposição das variáveis instantâneas

$$\tilde{\phi} = \Phi_i + \phi_i$$

$\tilde{\phi}$ $\rightarrow$ Variável instantânea

Φ_i $\rightarrow$ Valor médio

ϕ_i $\rightarrow$ Flutuação em torno do valor médio

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Consequências da média temporal

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \rightarrow$$ Derivada temporal do valor médio é nula

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} &= 0 \rightarrow \\ \overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} &= 0 \rightarrow \end{aligned}\right\}$$ Média temporal das derivadas das flutuações é nula

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Termos lineares

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \overline{\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow \overline{\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i}} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Termos não lineares

$$\tilde{u}\frac{\partial\tilde{\phi}_i}{\partial x}+\tilde{v}\frac{\partial\tilde{\phi}_i}{\partial y}+\tilde{w}\frac{\partial\tilde{\phi}_i}{\partial z}=\frac{\partial\tilde{u}\,\tilde{\phi}_i}{\partial x}+\frac{\partial\tilde{v}\,\tilde{\phi}_i}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{w}\,\tilde{\phi}_i}{\partial z}$$

$$\overline{\frac{\partial\tilde{u}_j\tilde{\phi}_i}{\partial x_j}}=U_i\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_j}+\frac{\overline{\partial u\phi}}{\partial x_j}$$

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0$$

- Flutuações de velocidade também satisfazem

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Equações de transporte de quantidade de movimento

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial x}-\overline{uu}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{uv}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial U}{\partial z}-\overline{uw}\right)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial V}{\partial x}-\overline{vu}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial V}{\partial y}-\overline{vv}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial W}{\partial z}-\overline{vw}\right)$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial W}{\partial x}-\overline{wu}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial W}{\partial y}-\overline{wv}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial W}{\partial z}-\overline{ww}\right)$$

- $-\rho\overline{u_i u_j}$ Tensões de Reynolds
- O número de equações é inferior ao número de incógnitas

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Equações de transporte de $-\rho\overline{u_i u_j}$

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt}=\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial t}+U_k\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_k}=-\left(\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\overline{u_i u_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)+\overline{\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{u_i u_j u_k}\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\overline{pu_j}}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{pu_i}}{\partial x_j}\right)$$

$$+\nu\frac{\partial^2\overline{u_i u_j}}{\partial x_i^2}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

- Sistema continua com menos equações do que incógnitas

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de tensões de Reynolds

  - 6 equações de transporte adicionais
  - A maioria dos termos das equações de transporte das tensões de Reynolds tem de ser modelado, incluindo as flutuações de pressão
  - Existem modelos que determinam as tensões de Reynolds a partir de equações algébricas
  - Anisotropia da turbulência está incluida no modelo

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

  - Hipótese de Boussinesq: as tensões de Reynolds são proporcionais aos gradientes de velocidade média
  - A constante de proporcionalidade é designada por viscosidade turbulenta
  - Anisotropia da turbulência é díficil de modelar. Maioria dos modelos são isotrópicos

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Equações de Reynolds

$$U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+W\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{ef}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right)$$

$$U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+W\frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{ef}\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)$$

$$U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{ef}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu_{ef}\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

$$\nu_{ef}=\nu+\nu_t$$

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Equações de Reynolds
  - ν_t é a viscosidade turbulenta
  - Escala de velocidade vezes escala de comprimento da turbulência
  - Diferentes tipos de modelos disponíveis

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

  - Modelos algébricos

  - Escala de comprimento da turbulência
    $l = \kappa y \rightarrow$ Comprimento de mistura

  - Escala de velocidade da turbulência
    $l|\vec{\omega}| \rightarrow$ $\vec{\omega}$ é o vector vorticidade
    $\nu_t = l^2|\vec{\omega}|$

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelos algébricos

- Escala de comprimento da turbulência é multiplicada por uma função de amortecimento na vizinhança da parede. Tem também de ser alterado para a região exterior da camada limite e para jactos

-Modelo simples, mas com muitas limitações. Implementação numérica pode ser complicada em escoamentos complexos

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

  - Modelos de 1 equação (antigos)

  - Escala de comprimento da turbulência é o comprimento de mistura dos modelos algébricos

  - Escala de velocidade é obtida da equação de de transporte de energia cinética da turbulência

$$k = \frac{1}{2}\overline{u^2 + v^2 + w^2}$$

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Energia cinética da turbulência, *k*

  - Equação de transporte(balanço)

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\left(\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{pu_j} + \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right)$$

$$+\nu\frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \nu\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2}$$

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Energia cinética da turbulência, *k*

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \rightarrow \quad \text{Convecção}$$

$$-\left(\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) \rightarrow \quad \text{Produção de k}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\overline{p u_j} + \frac{1}{2}\overline{u_i u_i u_j}\right) \rightarrow \quad \text{Difusão turbulenta}$$

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Energia cinética da turbulência, *k*

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} \rightarrow \quad \text{Difusão viscosa}$$

$$-\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2} \rightarrow \quad \text{Taxa de dissipação, } \varepsilon$$

- Maioria dos termos inclui “novas incógnitas” e por isso têm de ser modelados

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta
  - Modelos de uma equação

Spalart & Allmaras $\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu}$

$$U\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x}+V\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial y}=c_{b1}\tilde{\nu}\tilde{S}+\frac{1}{\sigma_s}\left[\nabla\cdot\left(\nu+\tilde{\nu}\right)\nabla\tilde{\nu}+c_{b2}\left(\nabla\tilde{\nu}\cdot\nabla\tilde{\nu}\right)\right]-c_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2$$

$c_{b1}, c_{b2}, c_{w1} \rightarrow$ Constantes $\quad f_{v1}, f_w \rightarrow$ Funções

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta
  - Modelo de uma equação de Spalart & Allmaras
  - Aplicável junto à parede
  - Viscosidade turbulenta proporcional à variável dependente
  - Necessita da distância à parede, *d*, e na versão original da localização da transição

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelos de 2 equações: escala de velocidade é $\sqrt{k}$

- Modelo *k*-ε $\nu_t = C_\mu \dfrac{k^2}{\varepsilon}$

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = \nu_t S^2 + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\nabla k\right) - \varepsilon$$

$$U\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = C_1\frac{\varepsilon}{k}\nu_t S^2 + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla \varepsilon\right) - C_2\frac{\varepsilon^2}{k}$$

$C_\mu,\ C_1,\ C_2, \sigma_k, \sigma_\varepsilon \rightarrow$ Constantes

Aerodinâmica

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

- Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelo *k*-ε

- Muito popular no cálculo de jactos e em escoamentos com transmissão de calor

- Pouco adaptado a escoamentos com gradiente de pressão adverso

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

• Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelo k-ε

- Não é válido junto a paredes

- Pode ser combinado com um modelo de 1 equação junto a paredes (modelo de 2 camadas)

- Existem variadas formulações de baixos números de Reynolds para se poder aplicar junto a paredes

Escoamento em Regime Turbulento

Aproximações de Reynolds

(RANS equations)

• Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelo k-ω $\quad \nu_t = \frac{k}{\omega}$

$$U\frac{\partial k}{\partial x} + V\frac{\partial k}{\partial y} = \nu_t S^2 + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\nabla k\right) - \beta^* \omega k$$

$$U\frac{\partial \omega}{\partial x} + V\frac{\partial \omega}{\partial y} = \alpha S^2 + \nabla\cdot\left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega}\right)\nabla \omega\right) - \frac{F_\omega}{\omega}(\nabla k \cdot \nabla \omega) - \beta\omega^2$$

$\beta^*, \beta, \alpha, \sigma_k, \sigma_\omega \rightarrow$ Constantes $\quad F_\omega \rightarrow$ Função

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

• Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelo *k*-ω

- Pode-se aplicar junto a paredes

- ω tende para infinito na parede

- Existem várias formulações sendo a mais popular a SST (shear-stress transport) que inclui um limitador para a viscosidade turbulenta

Escoamento em Regime Turbulento
Aproximações de Reynolds
(RANS equations)

• Modelos de viscosidade turbulenta

- Modelo *k*-ω

- Muito popular no cálculo de escoamentos em gradiente de pressão adverso

- Implementação numérica não é trivial e em algumas versões (SST por exemplo) requer a distância à parede