

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- Integrar equações de camada limite na direcção normal à parede ($h > \delta$)
- Equação da continuidade

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = 0$$

$$v = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- Escoamento exterior (fluido perfeito)

$$p + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = \text{const.}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- Equação de balanço/transporte de quantidade de movimento na direcção x

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \right) dy = \int_0^h v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

— Termo difusivo

$$\int_0^h v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

$$\int_0^h \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = \left[\frac{\tau}{\rho} \right]_0^h = \frac{-\tau_w}{\rho}$$

➤ $\tau_w \rightarrow$ Tensão de corte na parede

➤ Para $h > \delta$, $\tau = 0$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} - U_e \frac{dU_e}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_w}{\rho} \quad (2)$$

— Integração por partes do termo

$$\int_0^h \left[\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy$$

$$\int_0^h f(y) g'(y) dy = [f(y) g(y)]_0^h - \int_0^h f'(y) g(y) dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

$$\begin{cases} f(y) = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ g'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\int_0^h \left[\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = \left[\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) u \right]_0^h - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} u \right) dy$$

$$\int_0^h \left[\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = \int_0^h U_e \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

— Utilizando a igualdade

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = 2u \frac{\partial u}{\partial x}$$

e substituindo em (2)

$$\int_0^h \left(U_e \frac{\partial u}{\partial x} + U_e \frac{dU_e}{dx} - \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (3)$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

$$\frac{\partial(uU_e)}{\partial x} = U_e \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{dU_e}{dx}$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial(uU_e)}{\partial x} - u \frac{dU_e}{dx} + U_e \frac{dU_e}{dx} - \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial}{\partial x} (uU_e - u^2) + \frac{dU_e}{dx} (U_e - u) \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- O limite de integração h não depende de x pelo que as derivadas em ordem a x podem permutar com a integração em y

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^h u(U_e - u) dy \right] + \frac{dU_e}{dx} \int_0^h (U_e - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

- Adimensionalizando a variável u com U_e

$$\frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^h \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy \right] + \frac{dU_e}{dx} U_e \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de deslocamento, δ^*
(*Displacement thickness*)

$$\delta^* = \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

- Para $h \geq \delta$, $u/U_e \approx 1$, pelo que

$$\delta^* \cong \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de deslocamento, δ^*
 (*Displacement thickness*)

- Caudal na secção $\delta \times 1$ em condições de fluido perfeito

$$\dot{Q}_{ideal} = \rho \int_0^{\delta} U_e dy$$

- Caudal na secção $\delta \times 1$ em condições de fluido real (viscoso)

$$\dot{Q}_{real} = \rho \int_0^{\delta} u dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de deslocamento, δ^*
 (*Displacement thickness*)

- A espessura de deslocamento está relacionada com o deficit de caudal devido à presença da camada limite

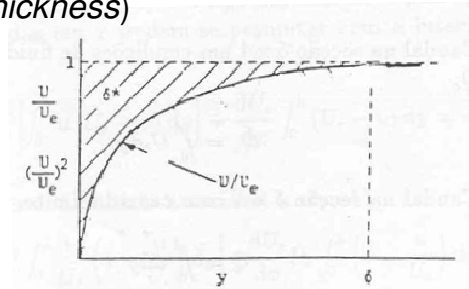
$$\rho U_e \delta^* = \dot{Q}_{ideal} - \dot{Q}_{real} = \rho \int_0^{\delta} U_e dy - \rho \int_0^{\delta} u dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de deslocamento, δ^*
 (*Displacement thickness*)

$$\delta^* \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$



- δ^* equivale à distância que as linhas de corrente do escoamento exterior (fluido perfeito) são deslocadas, devido ao efeito da camada limite.

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de deslocamento, δ^*
 (*Displacement thickness*)

- Definindo $\eta = \frac{y}{\delta}$ obtém-se

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\eta$$

exclusivamente função do perfil adimensional de velocidade

$$\frac{u}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de quantidade de movimento, θ
(*Momentum thickness*)

$$\theta = \int_0^h \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

- Para $h \geq \delta$, $u/U_e \approx 1$, pelo que

$$\theta \cong \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de quantidade de movimento, θ
(*Momentum thickness*)

- Caudal de quantidade de movimento na secção $\delta \times 1$ em condições de fluido perfeito (massa real)

$$\dot{M}_{ideal} = \dot{Q}_{real} U_e = \rho \int_0^\delta u U_e dy$$

- Caudal de quantidade de movimento na secção $\delta \times 1$ em condições de fluido real

$$\dot{M}_{real} = \rho \int_0^\delta u^2 dy$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de quantidade de movimento, θ
 (*Momentum thickness*)

- A espessura de quantidade de movimento está relacionada com o deficit de quantidade de movimento devido à presença da camada limite. θ tem de ser calculado para o caudal real que atravessa a secção $\delta \times 1$, tendo em consideração o valor de δ

$$\rho U_e^2 \theta = \dot{M}_{ideal} - \dot{M}_{real} = \rho \int_0^\delta u U_e dy - \rho \int_0^\delta u^2 dy$$

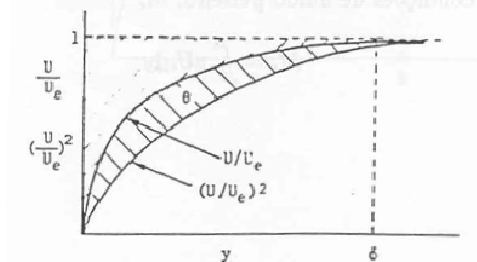
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de quantidade de movimento, θ
 (*Momentum thickness*)

$$\theta \cong \int_0^\delta \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$



- Sendo θ um deficit de quantidade de movimento a sua variação tem de estar relacionada com as forças aplicadas

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Espessura de quantidade de movimento, θ
(*Momentum thickness*)

- Definindo $\eta = \frac{y}{\delta}$ obtém-se

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) d\eta$$

exclusivamente função do perfil adimensional
de velocidade

$$\frac{u}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Factor de Forma, H
(*Shape Factor*)

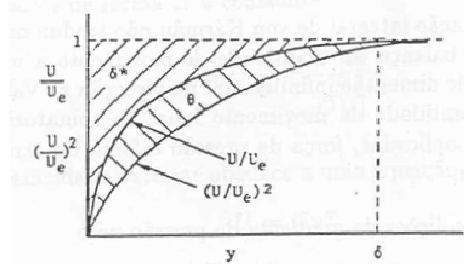
$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{\delta^*}{\delta}}{\frac{\theta}{\delta}} \quad \text{depende apenas de } \frac{u}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

- H quantifica a forma do perfil de velocidade. Como a função integranda da definição de θ é sempre inferior à de δ^* , $H \geq 1$, sendo 1 no caso limite de um perfil uniforme.

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Parâmetros Integrais

Factor de Forma, $H = \frac{\delta^*}{\theta}$
 (*Shape Factor*)



- Coeficiente de tensão de corte superficial, C_f

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- Substituindo os parâmetros integrais de camada limite obtém-se

$$\frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + U_e \delta^* \frac{dU_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \theta \frac{H+2}{U_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Escoamentos semelhantes em regime laminar

- Caso geral

$$\frac{u}{U_e} = F(x, y)$$

- Escoamento em condições de semelhança

$$\frac{u}{U_e} = F(\eta) \quad \text{com} \quad \eta = \frac{y}{\mathcal{O}[\delta]} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}[\delta] = \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$$

$$u(x, y) = U_e(x)F(\eta)$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Escoamentos semelhantes em regime laminar

- Nestas condições, factor de forma H é constante

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{\frac{\delta^*}{\mathcal{O}[\delta]}}{\frac{\theta}{\mathcal{O}[\delta]}}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

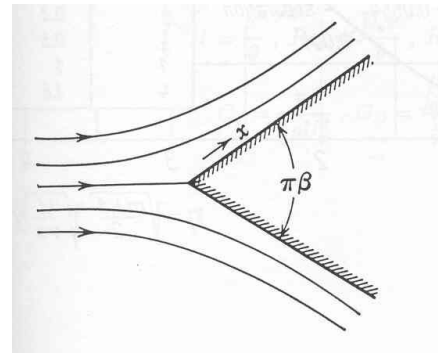
Escoamentos semelhantes em regime laminar

- Velocidade exterior obedece a uma equação do tipo

$$U_e = Cx^m$$

- Solução do escoamento de fluido perfeito em torno de uma cunha de abertura $\pi\beta$

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}$$



Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Escoamentos semelhantes em regime laminar

$$U_e = Cx^m$$

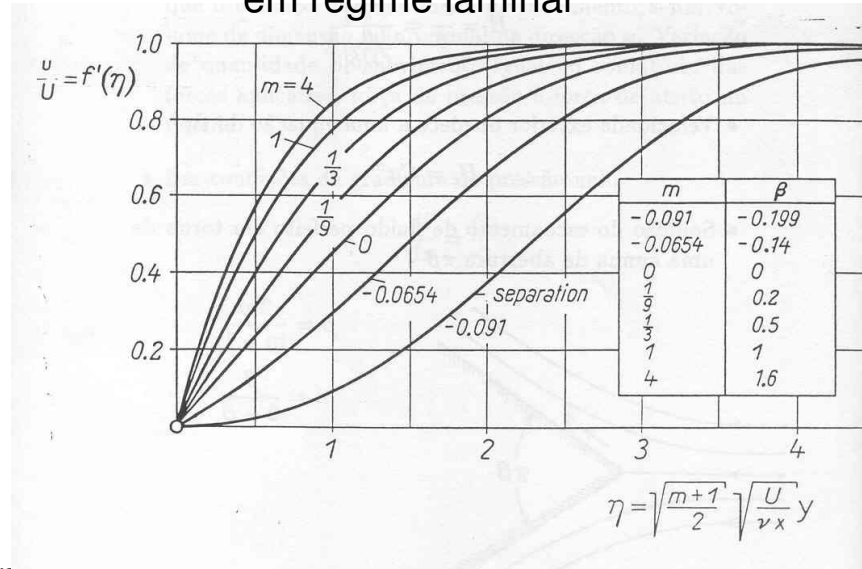
- $m=0 \rightarrow$ Escoamento em gradiente de pressão nulo
- $m=1 \rightarrow$ Escoamento de ponto de estagnação
- $m=-0.0904 \rightarrow$ Perfil de velocidade com $\tau_w=0$

$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Soluções de camada limite semelhantes
em regime laminar



Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- Gradiente de pressão nulo

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

- Perfil adimensional de velocidade é suficiente para obter a solução

$$\frac{u}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

- 2 incógnitas, θ e C_f , para 1 equação $\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$

$$\frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) d\eta$$

$$C_f = \frac{2\nu}{U_e \delta} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0}$$

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{2\nu}{U_e} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0} = \text{constant.}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{2\nu}{U_e} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0} = \text{constant.}$$

$$\int_0^\delta \delta d\delta = \int_0^x \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{2\nu}{U_e} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0} dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{2\nu x}{U_e} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação Integral de von Kármán

$$\delta^2 = 4 \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{\nu x}{U_e} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0}$$

$$\left(\frac{\delta}{x} \right)^2 = 4 \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \frac{\nu}{U_e x} \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0}$$

$$\left(\frac{\delta}{x} \right) = \sqrt{4 \left(\frac{\delta}{\theta} \right) \left(\frac{\partial u / U_e}{\partial y / \delta} \right)_{y/\delta=0}} R_{e_x}^{-0.5}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

- Parâmetros de camada limite

$$\bar{u} = f(\eta) \quad \bar{u} = \frac{u}{U_e}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\text{com} \\ \delta^* = \delta \int_0^1 (1 - \bar{u}) d\eta, \quad \theta = \delta \int_0^1 \bar{u} (1 - \bar{u}) d\eta$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta}, \quad R_{e_x} = \frac{U_e x}{\nu}, \quad R_{e_L} = \frac{U_e L}{\nu}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{1/2 \rho U_e^2}, \quad C_D = \frac{\int_0^L \tau_w dx}{1/2 \rho U_e^2 L}$$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Gradiente de pressão nulo

- Soluções aproximadas e exacta

| $f(\eta)$ | $\delta/x\sqrt{R_{e_x}}$ | $\delta^*/x\sqrt{R_{e_x}}$ | $\theta/x\sqrt{R_{e_x}}$ | H | $C_f\sqrt{R_{e_x}}$ | $C_D\sqrt{R_{e_x}}$ |
|--------------------------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|------|---------------------|---------------------|
| η | 3,464 | 1,732 | 0,578 | 3,00 | 0,578 | 1,16 |
| $3/2\eta - 1/2\eta^3$ | 4,64 | 1,74 | 0,646 | 2,70 | 0,646 | 1,29 |
| $2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$ | 5,84 | 1,752 | 0,687 | 2,55 | 0,687 | 1,37 |
| $\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)$ | 4,791 | 1,741 | 0,655 | 2,66 | 0,655 | 1,31 |
| exacto | —(5) | 1,721 | 0,664 | 2,59 | 0,664 | 1,33 |