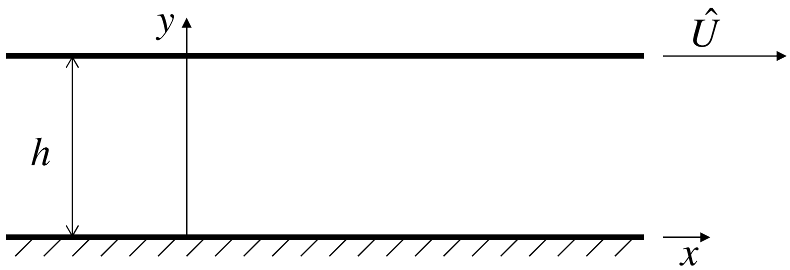
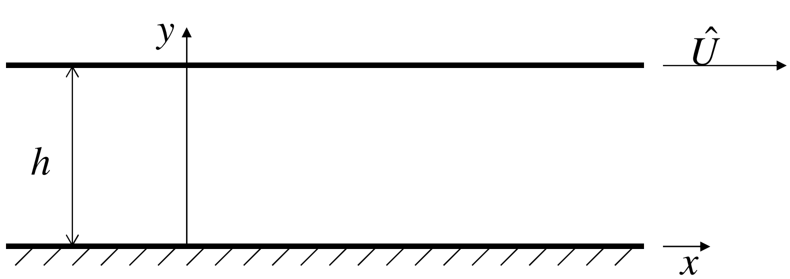
Escoamento Couette Laminar e Incompressível



- Escoamento permamente, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Escoamento independente da direcção *z*, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$
  (bi-dimensional)
- Escoamento completamente desenvolvido, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível



- Condições de Fronteira

  - Impermeabilidade das paredes:

  $y = 0 \Rightarrow v = 0 \quad y = h \Rightarrow v = 0$

  - Não escorregamento:

  $y = 0 \Rightarrow u = 0 \quad y = h \Rightarrow u = \hat{U}$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível

- Equação da continuidade

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow v = const.$$

- Condição de fronteira

$$v = 0$$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível

- Balanço de quantidade de movimento, x

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Balanço de quantidade de movimento, y

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

- A pressão só pode variar com x

$\frac{dp}{dx}$ tem de ser indepedente de x $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0\right)$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível

- Balanço de quantidade de movimento, x

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Condições de fronteira

$$y = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$y = h \Rightarrow u = \hat{U}$$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível

- Solução

$$u = \frac{y}{h}\hat{U} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y(h - y)$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\hat{U}}{h} + \frac{dp}{dx}\left(y - \frac{h}{2}\right)$$

- Comprimento e velocidade de referência

$$L_{ref} = h$$

$$U_{ref} = \hat{U}$$

Escoamento Couette Laminar e Incompressível

- Solução com variáveis adimensionais

$$\frac{u}{\hat{U}} = \frac{y}{h}\left[1 - \Lambda\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]$$

$$\frac{\tau_{yx}}{1/2\rho\hat{U}^2} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left[1 - 2\Lambda\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{h}\right)\right]$$

- Números adimensionais

$$R_e = \frac{\hat{U}h}{\nu}$$ Número de Reynolds

$$\Lambda = \frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$$ Parâmetro do gradiente de pressão

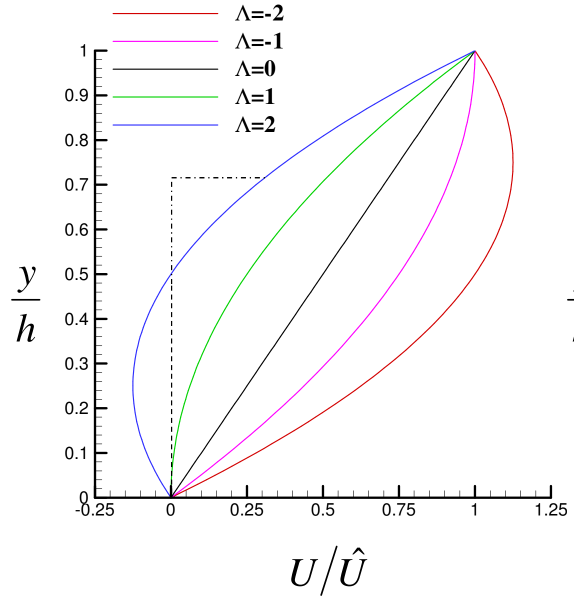
Escoamento Couette Laminar e Incompressível

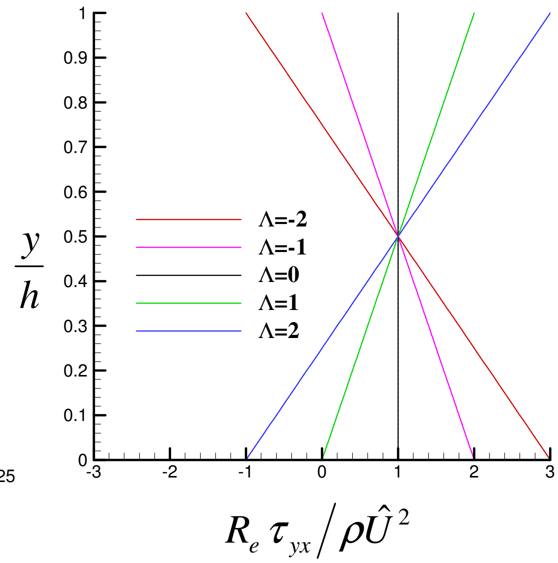
- Números adimensionais

$$R_e \propto \frac{\dfrac{\rho\hat{U}^2}{h}}{\mu\dfrac{\hat{U}}{h^2}}$$ Número de Reynolds

$$\Lambda = \frac{\dfrac{dp}{dx}}{\mu\dfrac{\hat{U}}{h^2}}$$ Parâmetro do gradiente de pressão

Escoamento Couette Laminar e Incompressível





Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

Viscosidade constante, *ν=constante*

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

Adimensionalização das equações

Valores de referência

Velocidade $U_e \quad \rightarrow u=U_e u^*,\ v=U_e v^*$

Comprimento $L \quad \rightarrow x=Lx^*,\quad y=Ly^*$

Pressão $\rho U_e^2 \rightarrow\ p=\rho U_e^2 p^*$

Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial\left(x^*\right)^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial\left(y^*\right)^2}\right)$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}+\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial\left(x^*\right)^2}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial\left(y^*\right)^2}\right)$$

$$R_e=\frac{\rho U_e L}{\mu}=\frac{U_e L}{\nu}=\frac{\rho U_e\frac{U_e}{L}}{\mu\frac{U_e}{L^2}}=\mathcal{O}\left[\frac{\text{efeitos convectivos}}{\text{efeitos difusivos}}\right]$$

Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$$ (tensão de corte em uni-dimensional)

Ar	$\mu \simeq$ 1,8×10^{-5}kgm^{-1}s^{-1}	$\nu \simeq$1,1×10^{-5}m^{2}s^{-1}
Água	$\mu \simeq$ 1,0×10^{-3}kgm^{-1}s^{-1}	$\nu \simeq$1,0×10^{-6}m^{2}s^{-1}

- Aplicações práticas são normalmente escoamentos a números de Reynolds, R_e, elevados

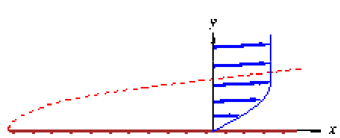
Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

- Efeito das tensões de corte restritos a pequenas regiões em que existem grandes variações de velocidade em pequenas distâncias

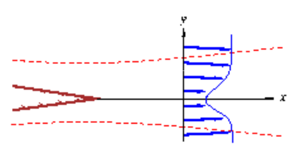
- Camadas de corte delgadas (*thin shear layers*)
  - Espessura da camada de corte delgada, δ, é muito inferior a L, $\delta/L \ll 1$

Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

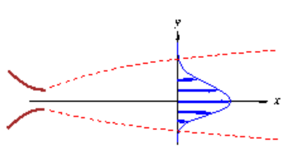
Camada Limite
(*Boundary-layer*)



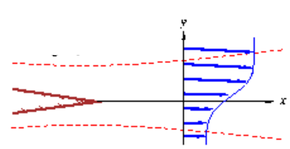
Esteira
(*Wake*)



Jacto
(*Jet*)



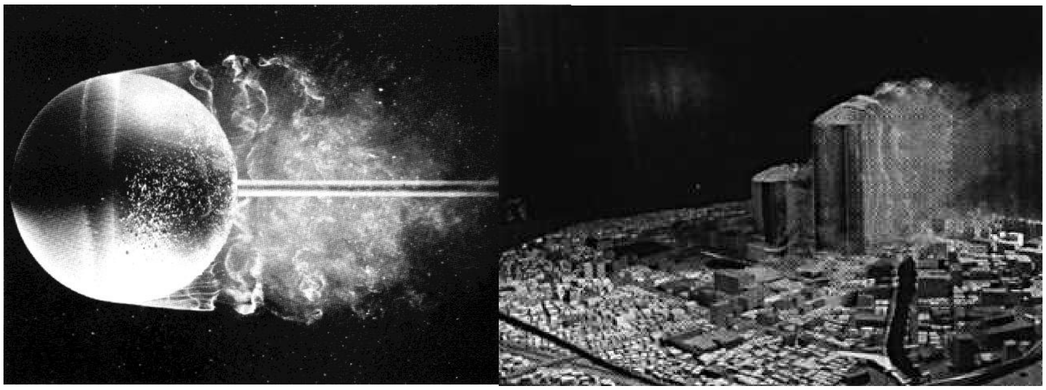
Camada de Mistura
(*Mixing layer*)



Escoamento Incompressível Bi-dimensional em regime permanente

Camadas de corte espessas (corpos não fuselados)

(*Bluff body*)



Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Simplificações de Prandtl(1904)

Análise da ordem de grandeza dos termos das equações da continuidade e de balanço de quantidade de movimento

Hipótese de partida $R_e \gg 1$. ($\delta/L \ll 1$) $R_e = \dfrac{U_e x}{\nu}$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Simplificações de Prandtl(1904)

Ordem de grandeza da variável ξ, $\mathcal{O}[\xi]$, é dada pelo limite superior de variação de ξ

Ordens de grandeza conhecidas

$$\mathcal{O}[x] \rightarrow L$$
$$\mathcal{O}[y] \rightarrow \delta$$
$$\mathcal{O}[u] \rightarrow U_e$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{U_e}{L} + \frac{\mathcal{O}[v]}{\delta} = 0$$

$$\mathcal{O}[v] = \frac{U_e \delta}{L}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Equação de Bernouilli aplicada ao escoamento exterior (fluido perfeito)

$$p + \frac{1}{2}\rho U_e^2 = const.$$

$$\frac{dp_e}{dx} + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} = 0$$

$$O\left[\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right] = \frac{1}{\rho}\frac{p_e}{L} = \frac{U_e^2}{L}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Balanço de quantidade de movimento na direcção *x*

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{U_e^2}{L} + \frac{U_e^2}{L} = \frac{U_e^2}{L} + \nu\left(\frac{U_e}{L^2} + \frac{U_e}{\delta^2}\right)$$

$$\frac{U_e^2}{L} + \frac{U_e^2}{L} = \frac{U_e^2}{L} + \frac{U_e^2}{L}\frac{\nu}{U_e L}\left[1 + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right]$$

$$1 + 1 = 1 + \frac{1}{R_e}\left[1 + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right]$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Balanço de quantidade de movimento na direcção *x*

Análise do termo difusivo $\frac{1}{R_e}\left[1+\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right]$

$$\mathcal{O}\left[\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{1}{R_e} \qquad \cong 0$$

$$\mathcal{O}\left[\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\frac{1}{R_e}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \Rightarrow \frac{\delta}{L}=\frac{1}{\sqrt{R_e}}\ll 1$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Balanço de quantidade de movimento na direcção *y*

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{U_e^2\delta}{L^2}+\frac{U_e^2\delta}{L^2}=\mathcal{O}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right]+\nu\left(\frac{U_e\delta}{L^3}+\frac{U_e}{L\delta}\right)$$

$$\frac{U_e^2\delta}{L^2}+\frac{U_e^2\delta}{L^2}=\mathcal{O}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right]+\frac{\nu}{U_e L}\left[\frac{U_e^2\delta}{L^2}+\frac{U_e^2\delta}{L^2}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2\right]$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Balanço de quantidade de movimento na direcção *y*

Como $\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 = R_e$

$$1 + 1 = \frac{L^2}{U_e^2 \delta} \mathcal{O}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right] + \frac{1}{R_e} + 1$$

$$\mathcal{O}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right] = \frac{U_e^2 \delta}{L^2}$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

Balanço de quantidade de movimento na direcção *y*

Através da camada limite

$$\mathcal{O}\left[\int_0^\delta \frac{\partial p}{\partial y} dy\right] = \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \rho U_e^2 = \frac{1}{R_e} \rho U_e^2 \ll \frac{1}{2} \rho U_e^2$$

pelo que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cong 0$$

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- O sistema de coordenadas tem de respeitar as seguintes condições:
  1. A coordenada *x* tem de estar alinhada com o escoamento exterior
  2. A coordenada *y* é normal à superfície

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- A pressão estática é independente da coordenada *y*. A variação de pressão com *x* (*dp/dx*) pode ser obtida a partir do escoamento exterior, $p(x) \simeq p_e(x)$, pelo que a pressão não faz parte das incógnitas.

A pressão é um dado do problema

Aproximações de Camada Limite (*Boundary-Layer*)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- As equações deixam de exibir carácter elíptico na direcção *x*. Para um valor de *x* qualquer, o escoamento depende apenas do que se passa a montante. Nestas condições, é possível obter a solução através de um processo de marcha na direcção *x* (problema de valor inicial).

Formas simplificadas das equações de Navier-Stokes

- Equações de camada limite ou camadas de corte delgadas (*Boundary layer, thin shear layer equations*)

— Pressão determinada pelo escoamento exterior à região viscosa,

$$\frac{\partial p}{\partial y}\cong 0$$

— Difusão na direcção principal do escoamento desprezada,

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\cong 0$$

Formas simplificadas das equações de Navier-Stokes

- Equações de Navier-Stokes parabolizadas
  (*Parabolized Navier-Stokes equations*)

  — Pressão na direcção principal do escoamento imposta a partir das condições exteriores à região viscosa,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{\partial p_e}{\partial x}$$

  — Difusão na direcção principal do escoamento desprezada,

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \cong 0$$

Formas simplificadas das equações de Navier-Stokes

- Equações de Navier-Stokes reduzidas
  (*Reduced Navier-Stokes equations*)

  — Difusão na direcção principal do escoamento desprezada,

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \cong 0$$