Descrição do campo do escoamento

- Metodologia Euleriana

  - Análise do escoamento num volume fixo no espaço

  - Derivada temporal inclui duas parcelas

    1. Variação com o tempo num ponto fixo do espaço
    2. Variação de ponto para ponto no espaço, num determinado instante de tempo

Conceitos Básicos

- Derivada Material

$q = q(x, y, z, t)$ $\rightarrow$ Propriedade genérica

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z}$$

Conceitos Básicos

- Teorema da divergência de Gauss

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{Q} dV = \int_S \vec{Q} \cdot \vec{n} dS$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{Q} \rightarrow$ Balanço do campo vectorial $\vec{Q}$ para um volume infinitesimal

Conceitos Básicos

- Transformação da derivada temporal de um volume variável (V) no tempo para um volume fixo (V_o)

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\xi dV = \int_{V_o} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\xi) dV + \int_{S_o} \rho\xi(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$\xi \rightarrow$ Propriedade genérica por unidade de massa

Balanço de uma propriedade genérica ("Equação de conservação")

- Volume variável no tempo

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\xi dV = \int_V f_\xi dV$$

$f_\xi \rightarrow$ fontes/poços da propriedade ξ

Balanço de uma propriedade genérica ("Equação de conservação")

- Volume fixo

$$\int_{V_o} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\xi)dV + \int_{V_o} \rho\xi(\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \int_{V_o} f_\xi dV$$

$$\int_{V_o}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\xi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\xi\vec{v}) - f_\xi\right]dV = 0$$

- Como V_o é arbitrário

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\xi) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\xi\vec{v}) - f_\xi = 0$$

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Balanço de uma propriedade genérica ("Equação de conservação")

Propriedade	ξ	f_ξ
Massa	1	—
Quantidade de movimento	$\vec{v}$	Forças
Energia	$e = \overline{u} + \frac{v^2}{2} + gz$	Calor Trabalho

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Conservação da Massa (equação da continuidade)

- Forma integral

$$\int_{V_o} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{V_o} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

- Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0$$

Conservação da Massa (equação da continuidade)

- Fluido incompressível (ρ=*constante*)
- Forma integral

$$\int_{V_o} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = 0$$

- Forma diferencial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Balanço de Quantidade de Movimento

- Forma integral

$$\int_{V_o} \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dV + \int_{V_o} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \vec{F}$$

$\vec{F} \rightarrow$ Soma da forças aplicadas ao fluido no volume de controle V_o

- Forças de pressão + tensões normais
- Tensões de corte
- Forças mássicas (força da gravidade)

Balanço de Quantidade de Movimento

- Relação das forças com as variáveis que caracterizam o escoamento

$$\vec{F} = \int_{V_o} \left(-\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{ij} + \rho \vec{g} \right)$$

$$F_x = \int_{V_o} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$F_y = \int_{V_o} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \rho g \right)$$

$$F_z = \int_{V_o} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)$$

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Forma diferencial

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial z} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}_{ij} + \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho u}{\partial y} + w \frac{\partial \rho u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + u \frac{\partial \rho v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \rho g$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + u \frac{\partial \rho w}{\partial x} + v \frac{\partial \rho w}{\partial y} + w \frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Relação entre tensões e movimento do fluido (modelo de Newton)
  - As tensões são linearmente proporcionais às derivadas das componentes da velocidade
  - As constantes de proporcionalidade são independentes da direcção. Fluido isotrópico
  - As tensões não dependem explicitamente da posição no espaço e da velocidade do fluido
  - O tensor é simétrico, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$

Aerodinâmica

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Relação entre tensões e movimento do fluido (modelo de Newton)

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + A \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + A \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + A \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Relação entre tensões e movimento do fluido (modelo de Newton)

$$\sigma_{xx} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + A \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + A \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{zz} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + A \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- μ, λ e A são parâmetros independentes dos gradientes das componentes do vector velocidade

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Relação entre tensões e movimento do fluido (modelo de Newton)

  - Escoamento Uniforme

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = A$$

$$A \equiv -p_{th}$$

  - Pressão média (average pressure),

$$\bar{p} = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)$$

$$\bar{p} = -\lambda\Theta + p_{th}$$

Balanço de Quantidade de Movimento

(Navier-Stokes)

- Relação entre tensões e movimento do fluido (modelo de Newton)

$$\sigma_{xx} = -\overline{p} - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{yy} = -\overline{p} - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{zz} = -\overline{p} - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

- As constantes λ e *A* desaparecem das relações entre tensões e gradientes das componentes do vector velocidade

Balanço de Quantidade de Movimento

- Equações de *Navier-Stokes*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u\frac{\partial \rho u}{\partial x} + v\frac{\partial \rho u}{\partial y} + w\frac{\partial \rho u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu\Theta)$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + u\frac{\partial \rho v}{\partial x} + v\frac{\partial \rho v}{\partial y} + w\frac{\partial \rho v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu\Theta)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) - \rho g$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + u\frac{\partial \rho w}{\partial x} + v\frac{\partial \rho w}{\partial y} + w\frac{\partial \rho w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu\Theta)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Balanço de Quantidade de Movimento

- Equações de Navier-Stokes

  Fluido incompressível, ρ=*constante*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)-g$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Balanço de Quantidade de Movimento

- Equações de Navier-Stokes

  Fluido incompressível, ρ=*constante*

  Viscosidade constante, ν=*constante*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)-g$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Balanço de Quantidade de Movimento

- Equações de Navier-Stokes

  - Variação de quantidade de movimento, $\frac{D\rho\vec{v}}{Dt}$
    - Derivada temporal, $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$

      Escoamento permanente (estacionário) se $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$
    - Termo convectivo, $\rho\left(u\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+v\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+w\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}\right)$

Aerodinâmica

Balanço de Quantidade de Movimento

- Equações de Navier-Stokes

  - Força de pressão
    - Gradiente de pressão, $\vec{\nabla}p$

  - Forças viscosas
    - Termo difusivo, $\mu\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u_i \quad (u_1=u, u_2=v, u_3=w)$

  - Força mássica, $\rho\vec{g}$

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Balanço de Quantidade de Movimento

- Condições de fronteira
  1. Superfície Sólida

$$\vec{v}_s = v_{sn}\vec{n} + v_{st}\vec{t} \;\rightarrow$$ Velocidade da superfície

$$\vec{v} = v_n\vec{n} + v_t\vec{t} \;\rightarrow$$ Velocidade do fluido

- $v_t = v_{st}$ – Condição de não escorregamento (no-slip condition)
- $v_n = v_{ns}$ – Condição de impermeabilidade (impermeability condition)

Referencial solidário com a superfície $\Rightarrow \vec{v} = 0$

Balanço de Quantidade de Movimento

- Condições de fronteira
  2. Interface de dois fluidos não mísciveis

$$\vec{v}_1 = v_{n1}\vec{n} + v_{t1}\vec{t} \;\rightarrow$$ Velocidade do fluido 1

$$\vec{v}_2 = v_{n2}\vec{n} + v_{t2}\vec{t} \;\rightarrow$$ Velocidade do fluido 2

- $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ – Continuidade do vector velocidade
- $\tau_1 = \tau_2$ – Igualdade da tensão de corte
- $\sigma_1 - \sigma_2 = \Delta p_{ts}$ – Discontinuidade da tensão normal dada pela tensão superficial

$$\Delta p_{ts} = \sigma\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$\sigma \rightarrow$ Tensão superficial

$r_1\ r_2 \rightarrow$ Raios principais de curvatura da superfície

Balanço de Quantidade de Movimento

- Inclusão das forças mássicas no termo de pressão

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u_i\right) + \vec{g}$$

- Fluido em repouso

$$0 = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p_h + \vec{g} \Leftrightarrow \quad \vec{g} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p_h$$

- $p_h \equiv$ Pressão hidrostática

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}(p - p_h) + \nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u_i\right)$$

- $\overline{p} = (p - p_h)$ pressão relativa à pressão hidrostática

Balanço de Energia

$$\xi = e = \overline{u} + \frac{v^2}{2} + gz$$

- Forma integral

$$\int_{V_o} \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u} + \frac{v^2}{2} + gz\right)dV + \int_{S_o}\left(\overline{h} + \frac{v^2}{2} + gz\right)(\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \dot{Q} + \dot{W}$$

- Forma diferencial

$$\rho\frac{De}{Dt} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_{ij}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{\tau}_{ij}\right) \equiv \vec{v}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\tau}_{ij}\right) + \Phi$$

$\Phi \longrightarrow$ Dissipação viscosa