Cálculo Diferencial e Integral I

Exame de época especial - 18/07/2012 - 9h - Duração: 3h

I (4,5 val.)

1. Considere a inequação $x^4 - 3x^3 + 2x^2 \leq 0$ e seja A o respectivo conjunto de soluções.

i) (0.5 val.) Determine explicitamente A.

ii) (1.0 val.) Determine os conjuntos de majorantes e minorantes de A. Determine ainda, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A.

2. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência através da relação:

$$u_0 = 1; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$$

i) (1.0 val.) Mostre que (u_n) estritamente crescente e que para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem $u_n < 4$.

ii) (1.0 val.) Mostre que (u_n) converge e calcule o respectivo limite.

3. Para cada uma das sucessões seguintes calcule o respectivo limite ou mostre que não existe:

$$\textbf{(i)}\ (0.5\ \text{val.})\quad \frac{1}{n}\sin(n^2+1) \qquad \textbf{(ii)}\ (0.5\ \text{val.}) \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$$

II (5,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & (\text{se } x \geq 0) \\ xe^{1/x} & (\text{se } x < 0) \end{cases}$$

i) (1.0 val.) Mostre que f diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule f'.

ii) (0.5 val.) Determine os intervalos de monotonia f.

iii) (1.0 val.) Determine as concavidades do gráfico de f,bem como pontos de inflexão e extremos.

iv) (0.5 val.) Indique o contradomínio de f.

2. Calcule os seguintes limites (se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$).

$$\textbf{(i)}\ (0.5\ \text{val.}) \lim_{x\to 1^-} \ln(x)\ln(1-x) \qquad \textbf{(ii)}\ (0.5\ \text{val.}) \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{sen} x}$$

3. (1.0 val.) Mostre que a equação $x^7 + 5x + 3 = 0$ tem uma única solução real.

4. (0.5 val.) Dê um exemplo de uma função definida em $[0,1]$, diferenciável em $]0,1[$ mas que não satisfaça a conclusão do teorema do valor médio de Lagrange.

v.s.f.f.

III (6,5 val.)

1. (2.0 val.) Calcule o valor dos integrais seguintes:

$$\text{(i)} \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx\,, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx\,,$$

2. (1.5 val.) Determine, usando a substituição $x = \ln t$, o valor do integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx\,.$$

3. (1.0 val.) Calcule a área da região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \;\geq\; |x| \quad \text{e} \quad y \;\leq\; 2 - x^2\}.$$

4. (2.0 val.) Seja, para $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{2x} \operatorname{sen}(\frac{1}{t^2+1})\,dt\,.$$

i) Determine a função derivada de F.

ii) Escreva o polinómio de Taylor de 2ª ordem de F no ponto 0.

iii) Mostre que F é impar.

IV (3,5 val.)

1. (1.0 val.) Analise a natureza da série numérica.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}(n+2)}{n^3+2}\,.$$

2. (1.5 val.) Indique o maior intervalo onde a série de potências é absolutamente convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}(x-1)^n.$$

e, para $x = 0$, determine a soma da série numérica.

3. (1.0 val.) Seja $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série convergente. Mostre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{a_n} - 1)\,.$$

é uma série convergente.