Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Álgebra Linear

Teste 1 - 25 de Outubro de 2011 [aula teórica]
Versão **A**
Duração: 40 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a seguinte matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1 val.) a) Aplique o método de eliminação de Gauss à matriz A de forma a obter uma matriz em escada de linhas B.

Resolução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\longrightarrow}{\begin{array}{c} L_2 \mapsto L_2 - L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 - 3L_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underset{\longrightarrow}{L_3 \mapsto L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

(1 val.) b) Usando o resultado da alínea a) encontre o conjunto-solução do sistema

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolução Atendendo à forma da matriz B, temos z como incógnita livre. Resolvendo por substituição, obtemos

$$y = -\frac{5}{4}z + \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}z + 5$$

e, portanto, o conjunto-solução do sistema é

$$S = \left\{ (-\frac{1}{2}z + 5, -\frac{5}{4}z + \frac{1}{2}, z) \ : \ z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (5, \frac{1}{2}, 0) \ + \ (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 1)\ z \ : \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.5 val.) a) Determine, pelo método de Gauss Jordan, a solução da equação matricial, $AX = C$.

Resolução A matriz aumentada para esta equação matricial é

$$\widetilde{A} = (A|C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando Gauss-Jordan, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \mapsto \frac{1}{3} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \mapsto -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \\
&\xrightarrow{L_1 \mapsto L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A solução da equação matricial é portanto

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(0.75 val.) b) Diga, justificando, qual a relação da matriz X encontrada na alínea anterior, com a inversa da matriz A.

Resolução Seja $C_j(B)$ a coluna j da matriz B. Considerando a primeira coluna da igualdade matricial (com duas colunas) $AX = C$, obtemos

$$AC_1(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como a primeira coluna, $C_1(X)$, da matriz (de duas colunas) X satisfaz a mesma equação (determinada) que a terceira coluna da matriz inversa de A concluímos que a primeira coluna de X é igual à terceira coluna de A^{-1}, $C_1(X) = C_3(A^{-1})$. Análogamente

$$AC_2(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2(X) = C_1(A^{-1}),$$

ou seja a segunda coluna de X é igual à primeira coluna de A^{-1}.

(0.75 val.) 3. Mostre, usando a fórmula de Sarrus,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

a fórmula de Laplace para a decomposição do determinante de uma matriz 3×3 ao longo da segunda coluna.

Resolução Colocando em evidência, na fórmula de Sarrus, as entradas da segunda coluna de A, obtemos a regra de Laplace para o desenvolvimento do determinante ao longo da segunda coluna

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{12}\left(a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33}\right) + a_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}\right) + a_{32}\left(a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}\right) = \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$